ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT
HERAUSGEGEBEN
VON

JOURNAL
RÉDIGÉ
PAR

G. MITTAG-LEFFLER

27

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1903.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

NIELS HENRIK ABEL

IN MEMORIAM

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 27. — 1903. — TOME 27.

SUR LES FONCTIONS QUI ADMETTENT UN THÉORÈME D'ADDITION

PAR

PAUL PAINLEVÉ

À PARIS.

1. Comme point de départ de sa doctrine des fonctions elliptiques, WEIERSTRASS a pris le théorème suivant: *Toute fonction $x = \varphi(u)$ qui admet un théorème d'addition se ramène algébriquement à une fonction uniforme, méromorphe et doublement périodique de u, ou à une dégénérescence d'une telle fonction.* Autrement dit, $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de $\wp(u, g_2; g_3)$ ou de e^{gu} ou de u.

En tête de sa théorie des fonctions abéliennes, WEIERSTRASS a inscrit une proposition analogue:

Tout système de n fonctions (indépendantes[1]) à n variables qui admet un théorème d'addition est une combinaison algébrique de n fonctions abéliennes (ou dégénérescences) à n arguments et aux mêmes périodes.

Cette proposition, qui a été souvent invoquée par les élèves de WEIERSTRASS, n'a pas seulement une importance considérable dans la théorie des fonctions abéliennes; elle intervient encore dans de nombreuses questions intéressant les surfaces algébriques, les équations différentielles, etc.

Malheureusement, la démonstration de l'illustre géomètre allemand n'a été ni enseignée[2] ni publiée; il n'en subsiste aucune trace dans ses manuscrits; elle est aujourd'hui perdue.

---

[1] J'entends par là que les n fonctions ne sont liées par aucune relation identique.

[2] Dans le seul de ses cours (cours manuscrit) où il soit fait allusion à cette démonstration, WEIERSTRASS précise le théorème et annonce qu'il l'établira dans les leçons suivantes. Mais le manuscrit porte alors que WEIERSTRASS, malade, a interrompu son cours; quand il le reprend quelques semaines plus tard, il poursuit le développement de la théorie des fonctions abéliennes, sans revenir sur le théorème en question.

L'importance et la beauté de ce théorème rendaient bien désirable qu'il fût enfin établi. Mais, si, dans le cas d'une variable indépendante, la démonstration en est aisée, elle présente, dès que le nombre des variables est égal à 2, de très profondes difficultés. Celle que j'ai développée dans mes leçons de Stockholm (pages 292—340) est rigoureuse, mais longue et compliquée; depuis lors, sans en changer le principe, je suis parvenu à l'alléger très notablement. C'est cette démonstration, sous sa forme nouvelle, qui fait l'objet du présent mémoire. J'espère qu'elle paraîtra claire et élémentaire. Je ne crois pas d'ailleurs qu'elle soit susceptible de simplifications importantes.

2. *Enoncé du théorème d'addition.* Je commencerai par préciser l'énoncé même du théorème.

D'après la définition de WEIERSTRASS, un système de deux fonctions (*indépendantes*) de deux variables, soit $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, admet *un théorème d'addition*, si les valeurs de x, y pour $u = u_0 + u_1$, $v = v_0 + v_1$, s'expriment *algébriquement* à l'aide des valeurs (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de (x, y) pour $u = u_0$, $v = v_0$ d'une part, et $u = u_1$, $v = v_1$ d'autre part.

D'une façon plus explicite, les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ étant quelconques, si on pose

$$x = \varphi(u_0 + u_1, v_0 + v_1), \qquad y = \psi(u_0 + u_1, v_0 + v_1),$$

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \qquad y_0 = \psi(u_0, v_0),$$

$$x_1 = \varphi(u_1, v_1), \qquad y_1 = \psi(u_1, v_1),$$

il est loisible de tirer u_0, v_0, u_1, v_1 des quatre dernières équations et de porter dans les deux premières. Soit:

$$x = A(x_0, y_0, x_1, y_1), \qquad y = B(x_0, y_0, x_1, y_1)$$

les expressions ainsi trouvées. Le couple de fonctions $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ admet un théorème d'addition si A et B sont *algébriques* en x_0, y_0, x_1, y_1.

La définition est la même pour n fonctions de n variables.

3. *Rappel de quelques propriétés des fonctions abéliennes.* Considérons un système de $(n + 1)$ séries θ à n arguments $u_1, \ldots, u_n$ et aux mêmes périodes (d'ailleurs arbitraires). Les quotients de n de ces séries θ par la

$(n+1)^e$ définissent n fonctions à n variables, méromorphes et $2n$ fois périodiques, et on peut toujours choisir les séries θ de manière que ces n fonctions $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$, soient indépendantes. Ces n fonctions (où on a au préalable effectué sur les u une substitution linéaire *quelconque*) formeront, par définition, *un système fondamental de fonctions abéliennes*[1] à n variables; les périodes y sont laissées quelconques;[2] quand on les choisit telles que le nombre des systèmes (distincts) de périodes soit moindre que $2n$, les fonctions $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$ forment un système de fonctions abéliennes *dégénéré*.

Toute fonction méromorphe $X(u_1, \ldots, u_n)$ à $2n$ systèmes de périodes *distincts* s'exprime *algébriquement* à l'aide des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ d'un système de fonctions abéliennes aux mêmes périodes. C'est ce qui résulte des travaux de Weierstrass, de MM. Picard, Poincaré et (dans le cas de deux variables) d'une belle méthode synthétique de M. Appell.[3]

On sait enfin que tout système de fonctions abéliennes (dégénéré ou non) admet *un théorème d'addition* et qu'il vérifie un système différentiel de la forme:

$$(1) \quad du_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + Q_i(x_1, \ldots, x_n)dx_2 + \ldots + T_i(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $P_i, \ldots, T_i$ sont algébriques en $x_1, \ldots, x_n$, et où les seconds membres sont des différentielles totales exactes. Si les fonctions abéliennes forment un système fondamental à périodes quelconques, le système (1) dépend algébriquement d'un nombre de constantes (*modules*) égal au nombre des périodes *arbitraires*. Pour des valeurs arbitraires de ces modules, les n intégrales $\int P_i dx_1 + Q_i dx_2 + \ldots + T_i dx_n$ admettent $2n$ systèmes de périodes *distincts;* pour des valeurs exceptionnelles des modules, ce nombre s'abaisse et les fonctions correspondantes $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$ sont des fonctions abéliennes *dégénérées*.

---

[1] On sait que, pour $n \geq 4$, ces fonctions sont plus générales que celles qui sont définies par l'inversion jacobienne dans la théorie des courbes algébriques.

[2] Ces périodes satisfont toujours aux conditions classiques de Riemann.

[3] J'ai fait connaître récemment une démonstration très directe et très élémentaire de ce théorème (Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 14 avril 1902).

Ces remarques faites, le théorème de Weierstrass prend la forme précise qui suit:

Si n fonctions de n variables admettent un théorème d'addition, ce sont des combinaisons algébriques des n fonctions d'un système fondamental de fonctions abéliennes (dégénéré ou non).

Pour abréger, je développerai la démonstration du théorème dans le cas de deux variables. Mais elle s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de variables.

4. *Cas de deux variables.* Dans le cas de deux variables u, v, les systèmes dégénérés de fonctions abéliennes peuvent (moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur u, v) recevoir la forme suivante, ainsi qu'il ressort de la dégénérescence des séries θ (à deux arguments):

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{lll} x = \wp(u), & y = e^{v}\dfrac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}, & (\alpha \text{ c}^{\text{te}} \text{ arbitraire}) \\ x = \wp(u), & y = v + \varepsilon\zeta(u), & (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1) \\ x = e^{u}, & y = e^{v}, & \\ x = u, & y = e^{v}, & \\ x = u, & y = v. & \end{array}\right.$$

On sait d'ailleurs que les fonctions abéliennes de deux variables se confondent avec les fonctions hyperelliptiques de genre 2. Autrement dit, on peut prendre, comme couple fondamental de fonctions abéliennes $x(u,v)$, $y(u,v)$, les fonctions:

$$x = \xi + \eta, \qquad y = \xi\eta,$$

où ξ, η vérifient le système:

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \dfrac{d\eta}{\sqrt{R(\eta)}} = du, \\ \dfrac{\xi d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \dfrac{\eta d\eta}{\sqrt{R(\eta)}} = dv. \end{array}\right. \qquad R(\xi) \equiv a_5\xi^5 + a_4\xi^4 + \ldots + a_0.$$

Le théorème de Weierstrass, dans le cas de deux variables, se laisse donc énoncer ainsi:

Si un couple de fonctions $X(u,v)$, $Y(u,v)$ admet un théorème d'addition, X et Y sont des combinaisons algébriques soit de deux fonctions hyper-

elliptiques non dégénérées (aux mêmes périodes), soit d'un des couples x, y définis par le tableau (2), où les arguments u, v ont subi une transformation linéaire convenable.

Rappelons enfin que les fonctions hyperelliptiques définies par (3) dégénèrent dans le cas (et seulement dans le cas) où $R(\xi)$ a des racines égales ou est de degré inférieur à 5.[1]

Introduction d'un système de différentielles totales.

5. Je vais établir maintenant la relation étroite qui existe entre le théorème de WEIERSTRASS et le problème de l'inversion des systèmes de différentielles totales (algébriques).

Soit $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ un couple de fonctions analytiques[2] indépendantes qui admet un théorème d'addition, et soit:

$$(4) \qquad x = \varphi(u + u_0, v + v_0), \qquad y = \psi(u + u_0, v + v_0),$$

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \qquad y_0 = \psi(u_0, v_0).$$

On a:

$$(5) \qquad x = A(x_0, y_0, u, v), \qquad y = B(x_0, y_0, u, v),$$

A et B désignant des fonctions algébriques de x_0, y_0. Si, entre les égalités (5) et les égalités:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = A'_u, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A'_v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = B'_u, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = B'_v,$$

on élimine x_0, y_0, on forme un système différentiel:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = p(x, y, u, v), & \dfrac{\partial x}{\partial v} = q(x, y, u, v), \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} = p_1(x, y, u, v), & \dfrac{\partial y}{\partial v} = q_1(x, y, u, v), \end{cases}$$

[1] Voir les nos 36—37.

[2] Il n'est pas nécessaire de supposer les fonctions *analytiques*. Si $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ sont des fonctions continues, à dérivées premières continues, des variables réelles (u, v), et admettent (pour u, v, u_0, v_0 réels) un théorème d'addition, elles sont sûrement analytiques, d'après le raisonnement même qui suit.

où p, q, p_1, q_1 sont *algébriques* en x, y, et dont l'intégrale générale est donnée par (5). Mais, d'autre part, on serait parvenu au même système (6) en éliminant u_0, v_0, et par suite u, v, entre les équations (4) et les équations dérivées $\frac{\partial x}{\partial u} = \varphi'_u(u + u_0, v + v_0)$, etc. Les fonctions p, q, p_1, q_1, sont donc *indépendantes de u, v*. Comme enfin, du système (6), on peut tirer $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, à savoir: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}$, etc., il est loisible de donner à ce système la forme:

$$(7) \quad du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \qquad dv = P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy,$$

où les seconds membres sont des *différentielles totales* exactes (*algébriques*).

Inversement, donnons-nous *a priori* un tel système (7), et supposons que *l'intégrale générale $x(u, v)$, $y(u, v)$ de ce système dépende algébriquement des deux constantes d'intégration, soit a, b*. Il est clair que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ admettent un théorème d'addition. Substituons, en effet, à a, b les valeurs x_0, y_0 de x, y pour $u = 0$, $v = 0$, valeurs qui dépendent algébriquement de a, b; nous avons:

$$x = A(x_0, y_0, u, v), \qquad y = B(x_0, y_0, u, v),$$

A et B étant algébriques en x_0, y_0. Mais d'autre part si $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ est une solution particulière du système (7), l'intégrale générale est donnée par $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$, $y = \psi(u + u_0, v + v_0)$; d'où il suit (en remarquant que u, v et u_0, v_0 jouent un rôle symétrique) que les fonctions φ, ψ admettent un théorème d'addition. [1]

D'après cela, le théorème de Weierstrass peut être remplacé par le suivant: *quand l'intégrale générale $x(u, v)$, $y(u, v)$ d'un système* (7) *dépend algébriquement des constantes initiales x_0, y_0, ces fonctions se ramènent algébriquement à un couple de fonctions hyperelliptiques* (*aux mêmes périodes*), *dégénéré ou non.*

[1] Il est clair d'après cela que si $x(u, v)$, $y(u, v)$ admettent un théorème d'addition, il en va de même pour les fonctions obtenues en effectuant sur u, v une substitution linéaire.

6. *Substitution au théorème de Weierstrass d'un théorème équivalent.* Précisons encore cette équivalence. Puisque la fonction $x(u, v)$ dépend algébriquement des constantes x_0, y_0, elle vérifie une relation:

$$x^n + R_{n-1}(x_0, y_0, u, v)x^{n-1} + \ldots + R_0(x_0, y_0, u, v) = 0$$

où les R sont *rationnels* en x_0, y_0, analytiques en u, v. Je dis que les R sont des fonctions *méromorphes* de u, v. En effet, supposons que les R admettent une singularité *non polaire* $u = \alpha$, $v = \beta$; ce sera une singularité d'une quelconque des fonctions $x(u, v)$ définies par le système (7); la fonction $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$ admettrait donc, quels que fussent u_0, v_0, la singularité fixe $u = \alpha$, $v = \beta$, ce qui est absurde.

La fonction $x(u, v)$ est donc une fonction à un nombre fini, soit m, de branches ($m \leqq n$); si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignent ses m branches, posons:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= x_1(u + u_0, v + v_0) + \ldots + x_m(u + u_0, v + v_0) \\ &\equiv x_1(x_0, y_0, u, v) \quad + \ldots + x_m(x_0, y_0, u, v);\end{aligned}$$

ρ_1 est une fonction *méromorphe* des u, v qui dépend des deux constantes arbitraires x_0, y_0 (ou u_0, v_0) et peut recevoir les deux formes:

$$\rho_1 = F(x_0, y_0, u, v) = G(u + u_0, v + v_0),$$

F dépendant algébriquement de x_0, y_0.

La même remarque s'applique aux autres fonctions symétriques de $x_1, \ldots, x_m$,

$$\rho_2 = \sum x_1 x_2, \ldots, \rho_m = x_1 x_2 \ldots x_m,$$

ainsi qu'aux fonctions symétriques analogues $r_i(x_0, y_0, u, v)$ des branches de $y(u, v)$. Parmi ces fonctions symétriques ρ_j, r_i, il y en a deux au moins, soit $X(x_0, y_0, u, v)$ et $Y(x_0, y_0, u, v)$, qui sont deux fonctions *distinctes*[1] de x_0, y_0. Si, entre x, y, X, Y, on élimine x_0, y_0, on voit que x, y se trouvent exprimés algébriquement à l'aide de X, Y, les variables u, v figurant analytiquement. Mais on serait arrivé aux mêmes expressions en éliminant u_0, v_0 (c'est à dire $u + u_0$, $v + v_0$) entre x, y, X, Y: il suit de là que x et y d'expriment algébriquement à l'aide de X, Y, sans que u, v figurent.

[1] Autrement, x et y ne dépendraient que d'une *seule* constante arbitraire.

Moyennant une transformation *algébrique* convenable effectuée sur x, y, *il est donc loisible de supposer que les fonctions* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *sont uniformes et méromorphes.*

7. Enfin, dans les équations (7), on peut, comme il est bien connu, exprimer *rationnellement* P, Q, P_1, Q_1 à l'aide de x, y et d'une irrationnelle unique $z(x, y)$, définie par une relation algébrique

$$S(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

cela de telle façon qu'inversement z s'exprime rationnellement en x, y, P, Q, P_1, Q_1. Comme P ou $\frac{\partial u}{\partial x}$ se déduit rationnellement de $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, ainsi que Q, P_1, Q_1, la fonction $z(u, v)$ est uniforme et méromorphe en même temps que $x(u, v)$, $y(u, v)$. De plus, soit x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z pour $u = 0$, $v = 0$, valeurs liées par la condition:

$$S(x_0, y_0, z_0) = 0; \tag{9}$$

à un système x_0, y_0, z_0, u, v correspond une détermination *unique* des fonctions $x(u, v, x_0, y_0, z_0)$, $y(u, v, x_0, y_0, z_0)$, $z(u, v, x_0, y_0, z_0)$, et puisque x, y, z sont des fonctions algébriques de x_0, y_0, ce sont des fonctions *rationnelles* des constantes x_0, y_0, z_0, liées par (9).

Nous sommes amenés ainsi à considérer les systèmes (7) de la forme:

$$\begin{cases} du = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy, \\ dv = P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy, \end{cases} \tag{10}$$

dont les seconds membres sont des différentielles totales attachées à la surface algébrique S, et tels que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par (10), soient des fonctions méromorphes de u, v, *rationnelles en* x_0, y_0, z_0.

D'ailleurs, si l'intégrale générale $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ d'un système (10) renferme *rationnellement* les constantes x_0, y_0, z_0 [liées par $S(x_0, y_0, z_0) = 0$], il résulte aussitôt du raisonnement de la page 7 que ce sont des fonctions méromorphes de u, v. Le problème qui se pose est donc le suivant:

Etudier les fonctions inverses de deux intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, *dans l'hypothèse où ces fonctions dépendent* **rationnellement** *des constantes initiales* x_0, y_0, z_0 [*liées par la condition* $S(x_0, y_0, z_0) = 0$].

8. *Difficulté du nouveau problème.* Un premier cas qui se trouve dès maintenant élucidé d'après les résultats classiques, est celui où *les intégrales* $I = \int P dx + Q dy$, $J = \int P_1 dx + Q_1 dy$ *admettent au moins quatre couples* (*distincts*) *de périodes.*[1] Les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, si elles sont uniformes et méromorphes, sont alors quatre fois périodiques, et se confondent nécessairement avec un couple de fonctions *hyperelliptiques* de u, v.

Le seul cas qui reste à discuter est celui où *les intégrales*

$$I = \int P dx + Q dy, \qquad J = \int P_1 dx + Q_1 dy$$

ont moins de quatre couples de périodes distincts.

Avant d'aller plus loin, insistons sur quelques remarques qui feront mieux comprendre la difficulté du problème.

Si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ renferment rationnellement (x_0, y_0, z_0), nous savons qu'elles sont à coup sûr uniformes et méromorphes. *Mais il faut bien se garder de croire que la réciproque est vraie.*

Tout d'abord, alors même que le nombre des couples de périodes n'est pas inférieur à 4, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent être uniformes sans être méromorphes. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter les yeux sur l'exemple:

$$(11) \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3}} - \frac{\lambda[\eta_1 + \omega_1 x]\,dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Représentons par $\wp(u)$ la fonction $\wp$ de WEIERSTRASS qui correspond aux invariants g_2, g_3; par $\wp_1$ celle qui correspond aux invariants γ_2, γ_3; par $2\omega_1$, $2\omega_2$ les périodes de $\wp$, par $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ celles de $\wp_1$. Les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ définies par (11) se déduisent (en augmentant u, v de constantes arbitraires) du couple:

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp_1[v + \lambda\eta_1 u - \lambda\omega_1 \zeta(u)],$$

fonctions de u, v qui sont uniformes mais admettent une infinité de *points*

[1] Il est aisé de montrer directement que deux fonctions uniformes de u, v (*indépendantes*) ne peuvent admettre plus de quatre couples de périodes (distincts) sans être des constantes; le théorème s'établit comme le théorème analogue dans le cas d'une seule variable, mais il résulte aussitôt de ce qui suit.

essentiels correspondant aux pôles de $\zeta(u)$. Les quatre couples de périodes sont ici:

$$2\omega_1\,,\quad 0\quad,\ 2\omega_2\,,\quad 0\ ,$$

$$0\quad,\ 2\omega_1'\,,\quad i\pi\lambda\ ,\ 2\omega_2',$$

et si ω_1, ω_2, ω_1', ω_2', λ sont quelconques, ces périodes ne satisfont pas à la condition de Riemann.

9. Au moins, du moment que le nombre des couples de périodes n'est pas inférieur à 4, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ ne peuvent être méromorphes sans être hyperelliptiques, et par suite sans renfermer rationnellement les constantes (x_0, y_0, z_0). Il n'en va plus de même quand le nombre des couples de périodes est moindre que 4: tout d'abord, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent encore être uniformes sans être méromorphes; mais, de plus, *elles peuvent être méromorphes et renfermer sous forme transcendante les constantes* (x_0, y_0, z_0). C'est ce qui apparaît aussitôt sur les deux exemples:

$$(12) \qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$(13) \qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} - dx;$$

le premier système est vérifié par le couple

$$(14) \qquad x = e^u, \qquad y = e^{v + \frac{1}{e^u - 1}},$$

le second par le couple

$$(15) \qquad x = e^u, \qquad y = e^{v+e^u};$$

le couple (14) présente des singularités essentielles; le couple (15) est méromorphe mais l'intégrale générale correspondante s'écrit:

$$x = x_0 e^u, \qquad y = y_0 e^{v + x_0(e^u - 1)}$$

et renferme x_0 sous forme transcendente. Pour les systèmes (12) et (13) la correspondance entre x, y et x_0, y_0 est *biuniforme mais non birationnelle:* le nombre des couples de périodes est égal à 2.

Ces remarques font nettement comprendre pourquoi il sera indispensable, par la suite, de supposer non seulement que x, y, z sont des fonctions

uniformes et méromorphes de u, v mais encore qu'elles renferment ***rationnellement*** (x_0, y_0, z_0).

D'une façon précise, le théorème de WEIERSTRASS sera établi si nous établissons cette proposition [1]:

»*Soit* $u = I(x, y, z)$, $v = J(x, y, z)$ *deux intégrales de différentielles totales attachées à la surface algébrique* $S(x, y, z) = 0$ *et qui possèdent au plus trois couples de périodes. Si les fonctions inverses* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *renferment rationnellement les constantes initiales* (x_0, y_0, z_0), *ce sont des fonctions hyperelliptiques dégénérées;* autrement dit, ce sont des combinaisons rationnelles d'un des 5 systèmes:

$$X = e^{U}\frac{\sigma(V-a)}{\sigma(V)}, \qquad Y = \wp(V), \qquad Z = \wp'(V),$$

$$X = U + a\zeta(V), \qquad Y = \wp(V), \qquad Z = \wp'(V),$$

$$X = e^{U}, \qquad Y = e^{V}, \qquad Z = 0,$$

$$X = U, \qquad Y = e^{V}, \qquad Z = 0,$$

$$X = U, \qquad Y = V, \qquad Z = 0,$$

où U, V désignent deux combinaisons linéaires convenables de u, v.»

Ce théorème cesse d'être exact si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont *uniformes* et même *méromorphes*, mais sont des fonctions *transcendantes* (uniformes mais non rationnelles) de (x_0, y_0, z_0).

Pour démontrer ce théorème, je commencerai par établir que les intégrales $u = I$, $v = J$ qu'il nous faut considérer présentent au moins *une courbe polaire.*

---

[1] Dans ses mémorables travaux sur les fonctions algébriques de deux variables, qui ont donné un tel essor aux recherches de toute nature intéressant les surfaces algébriques, M. PICARD (*Mémoire couronné,* p. 99—116) a indiqué une démonstration de ce théorème. C'est même, à ma connaissance, la seule démonstration qui ait été tentée du théorème de WEIERSTRASS, (ou plus exactement, d'une proposition équivalente). Mais l'analyse de l'illustre géomètre Français présente des lacunes qui ne me semblent pouvoir être comblées sans une discussion analogue à celle qu'on trouvera développée aux pages 25—38; or c'est cette discussion qui constitue toute la difficulté de la démonstration que je propose.

Des courbes polaires des intégrales

$$I = \int P dx + Q dy, \qquad J = \int P_1 dx + Q_1 dy.$$

10. *Rappel de quelques définitions.* Soit $I = \int P dx + Q dy$ une intégrale de différentielle totale attachée à la surface algébrique:

$$S(x, y, z) = 0. \tag{16}$$

Par définition, P et Q sont rationnels en x, y, z, et quand, dans P, Q, on remplace z en x, y, l'expression $P dx + Q dy$ est une différentielle exacte. Les diverses déterminations de la quantité:

$$I = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy$$

qui correspondent à un point (x, y, z) de S ne diffèrent que par des constantes d'addition, qui sont les *périodes* de l'intégrale.

On appelle *courbe polaire* de l'intégrale toute courbe tracée sur S telle que I devienne infinie en un point arbitraire de cette courbe: une courbe polaire est nécessairement algébrique. Par définition, l'intégrale I admet une courbe polaire à l'infini si, après une transformation homographique arbitraire effectuée sur S, l'intégrale admet une courbe polaire que le retour aux premières variables rejette à l'infini.

D'après cela, si I possède une courbe polaire C, il est loisible de la supposer à distance finie: soit $R(x, y, z) = 0$ une surface algébrique dont l'intersection avec S contient la courbe C. La transformation $X = R(x, y, z)$ fait correspondre à S une surface $S_1(X, y, z) = 0$, et, si les axes Ox, Oy, Oz ont été choisis quelconques, la correspondance entre S et S_1 est *birationnelle*.[1] Moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S, on peut donc toujours faire en sorte que la courbe polaire considérée soit située dans le plan $x = 0$ (sans se réduire à une parallèle à Oz), et toute branche de l'intégrale

[1] Il suffit, en effet, que pour une valeur arbitraire (non exceptionnelle) X_0 de X, la courbe $X_0 = R(x, y, z)$ de S n'ait pas une infinité de cordes parallèles à Ox: si donc on ne choisit pas les axes $Oxyz$ d'une façon exceptionnelle, à un point y, z de la courbe $S_1(X_0, y, z) = 0$, autrement dit à un point (X, y, z) de la surface S_1, correspond une seule valeur de x.

I qui devient infini sur cette courbe sera développable, dans le voisinage de la courbe polaire, sous la forme:

$$(17)\quad I=\frac{A_0(y)}{X^m}+\frac{A_1(y)}{X^{m-1}}+\ldots+\frac{A_{m-1}(y)}{X}+\alpha\log X+A_m(y)+A_{m+1}(y)X+\ldots,$$

avec

$$x = X^l;$$

l, m sont deux entiers ($l>0$, $m\geq 0$), les A des fonctions *algébriques* de y; α *une constante numérique*. Pour $y=y_0$ [abstraction faite d'un nombre fini de valeurs exceptionnelles y_0], les A sont holomorphes, et la série (17) converge pour $|X|$ suffisamment petit.

La courbe polaire est dite *logarithmique* si $\alpha \neq 0$, *non-logarithmique* si $\alpha=0$; α est le *résidu* de l'intégrale relatif à la courbe polaire $X=0$; la période $2i\pi\alpha$ de I est dite *période polaire*. Enfin, la somme des résidus des diverses branches de I relatifs à toutes les courbes polaires (à distance finie ou infinie) *est nulle*.

Quand l'intégrale I n'admet de courbes polaires ni à distance finie, ni à l'infini, l'intégrale abélienne $\int P(x, y_0, z)dx$, attachée à la courbe $S(x, y_0, z)=0$, est une intégrale *de première espèce*, (du moment que la valeur y_0 n'est pas choisie d'une manière exceptionnelle). Il suit de là (comme il est bien connu) que cette intégrale a au moins deux périodes dont le rapport est imaginaire. Une remarque analogue s'applique à l'intégrale abélienne $\int Q(x_0, y, z)dy$. L'intégrale I a, dans ce cas, au moins deux périodes de rapport imaginaire.

11. *De l'existence d'une courbe polaire pour les intégrales I, J.* Ceci rappelé, soit $I=\int Pdx+Qdy$, $J=\int P_1dx+Q_1dy$ deux intégrales de différentielles totales attachées à S et *possédant au plus trois couples de périodes distincts.* Je dis qu'*une au moins des deux intégrales admet une courbe polaire.*[1]

Il est loisible (en combinant linéairement I et J) de faire en sorte qu'une au moins des périodes de I et une des périodes de J soient nulles.[2]

[1] La démonstration supposera toutefois que les deux intégrales I, J ne sont pas fonctions l'une de l'autre, autrement dit que PQ_1-Q_1P n'est pas identiquement nul: mais le cas $PQ_1-Q_1P\equiv 0$ ne nous intéresse pas ici.

[2] A moins toutefois que toutes les périodes d'une combinaison $\alpha I+\beta J$ ne soient nulles; mais $\alpha I+\beta J$ serait alors rationnelle en x, y, z et admettrait une courbe polaire.

Supposons maintenant que I n'admette pas de courbe polaire (à distance finie ou infinie). D'après une remarque précédente, I (qui a au plus deux périodes) a sûrement deux périodes de rapport imaginaire, soit $2\omega_1$, $2\omega_2$: posons

$$X = \wp(u, 2\omega_1, 2\omega_2), \qquad u = I = \int P dx + Q dy;$$

X est une fonction uniforme de (x, y, z), qui, pour y_0 pris au hasard, est une fonction algébrique de x, (puisque $\int P(x, y_0, z) dx$ est une intégrale abélienne de première espèce), et qui, pour x_0 pris au hasard, est une fonction algébrique de y; X est donc une fonction rationnelle de x, y, z, qu'il est loisible, par une transformation *birationnelle*[1] effectuée sur S, de faire coïncider avec x. Pour la même raison, soit $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ les périodes de J, et soit

$$Y = \wp(v, 2\omega_1', 2\omega_2') = \wp_1, \qquad v = \int P_1 dx + Q_1 dy;$$

Y est une fonction rationnelle[2] de x, y, z, qu'il est loisible de faire coïncider avec y. Une transformation birationnelle effectuée sur S ramène donc I et J à la forme:

$$I = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad J = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2' y - g_3'}},$$

système à quatre couples de périodes distincts, à savoir les périodes:

$$2\omega_1, \ 2\omega_2, \ 0, \ 0 \quad \text{pour } I,$$

$$0, \ 0, \ 2\omega_1', \ 2\omega_2' \quad \text{pour } J;$$

résultat absurde, puisque, par hypothèse I, J admettent au plus trois couples le périodes.

Une au moins des intégrales I, J, dont il nous faut étudier l'inversion, possède donc des courbes polaires (à distance finie ou infinie). C'est l'examen approfondi de ces courbes polaires qui va nous conduire au but que nous poursuivons. Mais avant d'entrer dans cette discussion, je traiterai au préalable l'inversion de I, J dans deux cas particuliers très simples.

---

[1] Voir la note 1 de la page 12.

[2] Cette fonction ne se réduit pas à une simple fonction de x, car autrement les intégrales $I(x, y, z)$, $J(x, y, z)$ seraient fonctions l'une de l'autre.

Examen d'un premier cas particulier.

12. Je traiterai en premier lieu le problème suivant:

Déterminer tous les cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par le système

$$(18)\qquad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)du + Q(x, y, z)dy \equiv I(x, y, z), \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J(x, y, z), \\ S(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

sont rationnelles en u et uniformes en v.

Ecrivons le système (18) sous la forme:

$$(19)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = A(x, y, z), \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = B(x, y, z),$$

$$(20)\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A_1(x, y, z), \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = B_1(x, y, z),$$

et cherchons à satisfaire d'abord aux équations (19) en y remplaçant x, y, z par des fonctions rationnelles de u d'un certain degré q. Pour une valeur convenable de q, les conditions ainsi trouvées sont, par hypothèse, compatibles, et l'intégrale générale de (19) se met sous la forme:

$$(21)\qquad x = R(u - a, b), \qquad y = R_1(u - a, b), \qquad z = R_2(u - a, b),$$

les fractions rationnelles R, R_1, R_2 de $(u - a)$ dépendant *algébriquement* d'une seconde [1] arbitraire b.

Il reste à déterminer a, b (fonctions inconnues de v) de façon que les deux équations (20) soient aussi vérifiées. Or des équations (21) on peut tirer:

$$(22)\qquad u - a(v) = G(x, y), \qquad b(v) = H(x, y)$$

G, H désignant des fonctions *algébriques* de x, y. Si on pose: $y_1 = H(x, y)$,

---

[1] On peut disposer de a, b de façon que, pour $u = 0$, x, y et z prennent les valeurs arbitraires x_0, y_0, z_0, liées par la condition $S(x_0, y_0, z_0) = 0$.

la seconde équation (22) donne: $v = \psi(y_1)$, d'où $dv = \psi'(y_1)dy_1$, $\psi'(y_1)$ étant nécessairement *algébrique* en y_1. Comme la fonction $y_1(v)$, par hypothèse n'admet qu'une nombre fini de branches, elle est (d'après un théorème classique) *algébrique en* v, *ou en* e^{gv}, *ou en* $\wp(x, g_2, g_3)$, $[g, g_2, g_3$ constantes numériques$]$, et inversement une des trois expressions v, e^{gv}, $\wp(v, g_2, g_3)$ est algébrique en y_1, c'est-à-dire en x, y. Si on veut encore,

1° ou bien l'intégrale $v = J(x, y, z)$ n'a pas de périodes; J est alors rationnelle en x, y, z, soit $J = R(x, y, z)$;

2° ou bien J n'a qu'une période,[1] soit $2\omega_1$, qu'il est loisible (en multipliant v par $\frac{i\pi}{\omega_1}$) de supposer égale à $2i\pi$, et l'expression e^J (qui est *uniforme* en x, y, z) est algébrique en x, y; e^J est donc rationnelle en x, y, z, soit $e^J = \rho(x, y, z)$;

3° ou bien enfin J est dénué de courbes polaires et n'a que deux[2] périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ (dont le rapport est imaginaire); la fonction $\wp(J, 2\omega_1, 2\omega_2)$, uniforme en x, y, z, est algébrique en x, y, donc *rationnelle en* x, y, z, soit $\wp = \rho(x, y, z)$.

---

[1] Il ne faut pas oublier que les périodes des intégrales I, J, attachées à la surface S, correspondent essentiellement à des cycles *fermés* sur S. Soit par exemple,

$$du = dx + \sqrt{y}\,dy, \qquad dv = \frac{dy}{y}, \qquad S \equiv y - z^2 = 0.$$

L'intégrale $v = J$, attachée à S, *a comme période* $4i\pi$ *et non* $2i\pi$, car il faut que y tourne deux fois autour du point $y = 0$ pour que z reprenne la même valeur. Les fonctions uniformes $x = u - \frac{2}{3}e^{\frac{3v}{2}}$, $y = e^v$ admettent le couple de périodes $2\omega = 0$ (pour u), $2\omega_1 = 4i\pi$ (pour v), (et non pas $2\omega_1 = 2i\pi$).

[2] Le système de périodes $2\omega_1, 2\omega_2$ est bien entendu supposé *primitif*. La remarque de la note 1 s'applique encore. Par exemple, soit:

$$du = dx + \sqrt{y - e_1}\,dy, \quad dv = \frac{dy}{\sqrt{2(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}}.$$

$$S \equiv z - \sqrt{y - e_1} - \sqrt{4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)} = 0,$$

$$(e_1 + e_2 + e_3 = 0);$$

si $2\omega_1, 2\omega_2$ sont les périodes de la fonction $\wp(v, e_1, e_2, e_3)$, les périodes de J sont $2\omega_1$ et $4\omega_2$ (et non pas $2\omega_1, 2\omega_2$).

J'ajoute qu'en posant $Y = \rho(x, y, z)$, on peut, moyennant une transformation *birationnelle*,[1] effectuée sur S, supposer que *ρ coïncide avec Y*; la différentielle dv est alors une des trois différentielles suivantes:

$$dv = dy, \qquad dv = \frac{dy}{y}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}};$$

dans le dernier cas, $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ s'exprime rationnellement en x, y, z.

Discutons ces trois hypothèses, en remarquant immédiatement que les intégrales $u = I$, $v = J$ ne sauraient admettre de couple de périodes de la forme $(2\omega, 0)$, puisque les fonctions x, y, z de u, v sont rationnelles en u.

13. *Premier sous-cas: $dv = dy$.* D'après la remarque précédente, u doit être sans période; c'est donc (comme v) une fonction rationnelle de (x, y, z). Inversement, les fonctions x, y, z de u, v, à la fois *uniformes* et *algébriques*, sont *rationnelles*. La surface S correspond birationnellement à un plan.

14. *Deuxième sous-cas: $dv = \frac{dy}{y}$.* En remplaçant u par $u - \alpha v$, (α désignant une constante convenable), on peut faire en sorte que I, J admettent le couple de périodes $(0, 2i\pi)$: les fonctions x, y, z de u, v sont alors uniformes en e^v. De plus, I n'a plus de périodes; car si I, J possédaient le couple de périodes $(2\omega, 2mi\pi)$, ils posséderaient aussi le couple $(2\omega, 0)$. *L'intégrale $u = I$ est donc (comme e^v) rationnelle en (x, y, z)*, et réciproquement les fonctions uniformes x, y, z de u, e^v sont *rationnelles en $u, e^v = \theta$.* La surface S correspond birationnellement à un plan.

15. *Troisième sous-cas: $dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$.* Je représente par $2\omega, 2\omega'$ deux périodes de $u = I$ qui correspondent aux périodes de $2\omega_1$, $2\omega_2$ de J, et je considère l'expression $\alpha\zeta(v) + \beta v$, où les constantes α, β sont choisies de façon que $(\alpha\eta_1 + \beta\omega_1)$ et $(\alpha\eta_2 + \beta\omega_2)$ soient égaux respectivement à ω et ω'. Je pose ensuite

$$u_1 = u - \alpha\zeta(v) - \beta v,$$

[1] Voir la note 1, p. 12.

c'est-à-dire:

$$du_1 = du + [\alpha\wp(v) - \beta]dv = Pdx + Qdy + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}[\alpha y - \beta].$$

Les deux intégrales $u_1 = I_1$, $v = J$ sont encore attachées à la surface S (puisque $\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}$ est rationnel en x, y, z), et elles admettent les deux couples de périodes:

$$0 \;,\; 0 \quad \text{pour} \quad u_1,$$

$$2\omega_1 \;,\; 2\omega_2 \quad \text{pour} \quad v.$$

Les fonctions x, y, z de u_1, v sont encore ***rationnelles*** en u_1, *uniformes* en v, et elles ne changent pas quand on augmente v de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$. Enfin, si les intégrales I_1, J admettent un troisième couple de périodes, soit $(2\Omega, 2m\omega_1 + 2n\omega_2)$, elles admettent aussi le couple $(2\Omega, 0)$, ce qui exige que 2Ω soit nul. *L'intégrale $u_1 = I_1$ est donc (comme $\wp(v)$) rationnelle en (x, y, z).* Inversement, les fonctions x, y, z de u, v, *uniformes et algébriques* en $u_1, \wp(v), \wp'(v)$, sont *rationnelles en $u_1, \wp(v), \wp'(v)$.* La surface S correspond birationnellement au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2Y - g_2$ de l'espace (X, Y, Z).

En substituant $u - \beta v$ à u, et en divisant ensuite u par α (si $\alpha \neq 0$), on fait $\beta = 0$ et $\alpha = 1$. On voit donc qu'après une substitution linéaire convenable effectuée sur u, *les fonctions x, y, z de u, v sont rationnelles en $\wp(v), \wp'(v)$ et en $U = u + \varepsilon\zeta(v)$, ($\varepsilon = 0$ ou 1)*, et cela de telle façon qu'inversement $\wp(v), \wp'(v)$ et U s'expriment rationnellement en (x, y, z).

16. *Conclusions.* La discussion précédente se résume ainsi:

Quand les fonctions $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ définies par un système (18) sont rationnelles en u et uniformes en v, une transformation birationnelle effectuée sur S et la substitution à u d'une combinaison linéaire en u, v, ramènent le système (18) à une des trois formes:

(I) $\quad du = dx, \qquad dv = dy, \qquad z = 0,$

(II) $\quad du = dx, \qquad \alpha dv = \dfrac{dy}{y}, \qquad z = 0,$

(III) $\quad du = dx + \dfrac{\varepsilon y\,dy}{z}, \qquad dv = \dfrac{dy}{z}, \qquad z^2 = 4y^3 - g_2y - g_3.$

(α, g_2, g_3 constantes numériques, $\varepsilon = 0$ ou 1).

Les fonctions x, y, z sont rationnelles en u, v dans le cas (I), en u, e^{v} dans le cas (II), en $\{u - \varepsilon\zeta(v)\}$, $\wp(v)$, $\wp'(v)$ dans le cas (III). Elles dépendent d'ailleurs *rationnellement* des constantes initiales (x_0, y_0, z_0); la chose est évidente dans les deux premiers cas; dans le troisième, il suffit de vérifier [1] que les fonctions

$$\text{(IV)} \qquad y = \wp(v), \qquad x = u - \varepsilon\zeta(v)$$

admettent un théorème d'addition. Or posons

$$x_1 = x(u + u_0, v + v_0), \qquad y_1 = y(v + v_0), \qquad x_0 = x(u_0, v_0), \qquad y_0 = y(v_0),$$

$$R(y) = 4y^3 - g_2 y - g_3;$$

on trouve:

$$y_1 = -(y + y_0) + \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0}\right]^2,$$

$$x_1 = (x + x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0}\right].$$

Enfin, la surface S correspond *birationnellement*, dans les cas (I), (II) à un plan et dans le cas (III) au cylindre $z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$.

Examen d'un second cas particulier.

17. Le second problème que je traiterai maintenant s'énonce ainsi:

Determiner tous les cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par le système

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy \equiv I, \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J, \\ S(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

sont rationnelles en e^u et méromorphes en v. L'intégrale J est supposée dénuée de courbes polaires.

[1] Cette vérification est inutile, si on se rappelle que les fonctions (IV) sont les quotients de trois séries $\theta(u, v)$ dégénérées [voir le n° 4].

Il est loisible d'admettre (et c'est ce que nous ferons) que $2i\pi$ est *la plus petite période* des fonctions $x(u, v_0)$, $y(u, v_0)$, $z(u, v_0)$. Autrement, on multiplierait u par un entier convenable.

Ecrivons le système (18) sous la forme (19), (20) [page 15], posons $t = e^u$, et cherchons à satisfaire aux deux premières équations:

$$(23) \qquad t\frac{\partial x}{\partial t} = A(x, y, z), \qquad t\frac{\partial y}{\partial t} = B(x, y, z)$$

en y remplaçant x, y, z par des fractions rationnelles en t d'un certain degré q. Pour une valeur convenable de q, les conditions ainsi formées sont compatibles et donnent pour l'intégrale générale de (23) les expressions:

$$(24) \qquad x = R(at, b), \qquad y = R_1(at, b), \qquad z = R_2(at, b),$$

les fonctions rationnelles R, R_1, R_2 de at dépendant *algébriquement* d'une seconde indéterminée b. Il reste à disposer des fonctions $a(v)$, $b(v)$ de façon à satisfaire aux équations (20). Or des égalités (24), on tire:

$$(25) \qquad a(v)t = G(x, y), \quad b(v) = H(x, y), \quad [G, H \text{ algébriques en } x, y].$$

D'après le raisonnement des pages 16, 17, la seconde égalité (25) montre que l'intégrale $J(x, y, z)$, qui, par hypothèse, n'a pas de courbe polaire, coïncide, moyennant une transformation *birationnelle* effectuée sur S, avec l'intégrale elliptique $\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$; le radical $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ s'exprime rationnellement en x, y, z.

18. Soit 2ω, $2\omega'$ deux périodes de $u = I$ qui correspondent aux deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ de J. Considérons la fonction elliptique de seconde espèce $\frac{\sigma(v - \alpha)}{\sigma(v)} e^{\beta v}$, et déterminons[1] [ce qui est toujours possible] α et β de façon que les multiplicateurs de cette fonction soient $e^{-2\omega}$, $e^{-2\omega'}$; sa dérivée logarithmique est:

$$\zeta(v - \alpha) - \zeta(v) + \beta \equiv \beta - \zeta(\alpha) - \frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(\alpha) + \wp'(v)}{\wp(\alpha) - \wp(v)}\right].$$

Posons:

$$du_1 = du + \{\zeta(v - \alpha) - \zeta(v) + \beta\} dv,$$

[1] Si $\omega = \omega' = 0$, α et β sont nuls, et la fonction de seconde espèce se réduit à l'unité.

c'est-à-dire:

$$t_1 = t\frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)}e^{\beta v}, \qquad (t_1 = e^{u_1}).$$

La différentielle:

$$du_1 = \int Pdx + Qdy + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}\left[\beta - \zeta(\alpha) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(a) + \sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}{y - \wp(a)}\right]$$

est encore attachée à la surface S, et les intégrales $u_1 = I_1$, $v = J$ admettent les couples de périodes:

$$\begin{array}{ccl} 0 \ , & 0 & \text{pour } I_1, \\ 2\omega_1 \ , & 2\omega_2 & \text{pour } J. \end{array}$$

Les fonctions x, y, z de u_1, v sont rationnelles[1] en $t_1 = e^{u_1}$, méromorphes en v, et ne changent pas quand on augmente v de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$; *elles sont donc rationnelles en* t_1, $\wp(v)$, $\wp'(v)$. De plus, tout couple de périodes de u_1, v est de la forme $(2\omega, 2m\omega_1 + 2n\omega_2)$, et, par suite, si on veut, de la forme $(2\omega, 0)$; ce qui exige que 2ω soit un multiple de $2i\pi$. Il suit de là que t_1 est (comme $\wp(v)$ et $\wp'(v)$) une fonction rationnelle de x, y, z; car t_1 est à la fois uniforme et algébrique en x, y, z.

19. Nous arrivons donc à la conclusion suivante:

L'intégrale $v = J$ *du système* (18) *étant dénuée de courbe polaire, les fonctions* x, y, z *de* u, v *définies par ce système, — si elles sont rationnelles en* e^u *et méromorphes en* v —, *sont des combinaisons rationnelles de* $\wp(v)$, $\wp'(v)$, *et* $U = e^{(ru+\beta v)} \times \dfrac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)}$, [$r$ désigne un entier, α, β des constantes numériques, ainsi que les invariants g_2, g_3 de $\wp(v)$]. Inversement $\wp(v)$, $\wp(v)$ et U s'expriment rationnellement en (x, y, z).

Si on veut encore, une transformation birationnelle effectuée sur S et la substitution à u d'une combinaison linéaire en u, v, ramènent le système (18) à la forme:

$$(18) \qquad \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{z}\left[\zeta(\alpha) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(a) + z}{\wp(a) - y}\right], \qquad dv = \dfrac{dy}{z}, \\ z^2 = 4y^3 - g_2y - g_3; \end{cases}$$

la première équation, pour $\alpha = 0$, se réduit à $du = \dfrac{dx}{x}$.

[1] Par hypothèse, $2i\pi$ est la plus petite période des fonctions $x(u, v_0)$, $y(u, v_0)$, $z(u, v_0)$; il en est de même évidemment quand on remplace u par $u_1 + F(v_0)$.

La surface S est une transformée birationnelle du cylindre:

$$z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

Enfin, il est aisé de voir que, dans le cas que nous venons de traiter, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ renferment *rationnellement* les constantes initiales (x_0, y_0, z_0). Il suffit de vérifier[1] que les fonctions

$$x = e^{u} \frac{\sigma(v - a)}{\sigma(v)}, \qquad y = \wp(v)$$

admettent un théorème d'addition.[2] Or appelons x_1, y_1 ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace u, v par $(u + u_0)$, $(v + v_0)$, et appelons de même x_0, y_0 les valeurs de x, y pour $u = u_0$, $v = v_0$. On trouve aussitôt [en posant $R(y) \equiv 4y^3 - g_2 y - g_3$]:

$$x_1 = \frac{x x_0}{2\sigma(a)} \left\{ \frac{\sqrt{R(y)}}{(y - y_0)(y - \wp(a))} - \frac{\sqrt{R(y_0)}}{(y - y_0)(y_0 - \wp(a))} - \frac{\wp'(a)}{[y - \wp(a)][y_0 - \wp(a)]} \right\},$$

$$y_1 = -y - y_0 + \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0} \right]^2.$$

---

[1] Voir la note 1 p. 19.

[2] On aurait traité aussi facilement le problème qui fait l'objet de ce chapitre sans supposer que l'intégrale $v = J$ soit dénuée de *courbes polaires*. Il aurait fallu considérer, en outre du cas étudié plus haut (p. 20), les deux cas [n^{os} 13, 14] où on a:

$$dv = dy, \quad \text{ou} \quad a dv = \frac{dy}{y}.$$

On trouve aussitôt qu'une transformation birationnelle effectuée sur S et une substitution linéaire effectuée sur u, v ramènent le système (18) [quand les fonctions x, y, z de u, v dont *méromorphes*] à une des deux formes:

$$u + a = \log x + \alpha y + \beta y^2 + \ldots + \lambda y^n, \qquad v + b = y,$$

$$u + a = \log x + \frac{\alpha}{y^j} + \frac{\gamma}{y^{j-1}} + \ldots + \frac{\delta}{y} + \varepsilon y + \ldots + \lambda y^m, \quad v + b = \log y,$$

$$a, b \text{ constantes arbitraires, } j, m, n \text{ entiers } \geq 0.$$

Mais si on veut de plus que $x(u, v)$, $y(u, v)$ admettent un théorème d'addition, il faut que l'expression de $u + a$ se réduise à $\log x$; x et y sont alors des fonctions *rationnelles* soit de e^u, v, soit de e^u, e^v.

Ces deux cas particuliers traités, je vais passer à la discussion du cas général. Pour alléger cette discussion, j'en détacherai deux lemmes presque intuitifs concernant les fonctions méromorphes.

Deux lemmes relatifs aux fonctions méromorphes.

20. *Lemme A.* Soit $x = \varphi(u, v)$ une fonction méromorphe[1] de u, v, telle que le changement de variable $v = R_1(u, v_1)$ [R_1 algébrique en u, v_1], la transforme en une fonction $\varphi_1(u, v_1)$ *algébrique en* u. Supposons de plus qu'il existe une seconde transformation analogue $v = R_2(u, v_2)$, telle que $x = \varphi_2(u, v_2)$ soit aussi algébrique en u: les deux transformations sont seulement assujetties à la restriction que de l'égalité: $R_1(u, v_1) = R_2(u, v_2)$ on puisse tirer u, soit $u = \rho(v_1, v_2)$, ρ ne se réduisant pas à une constante. Dans ces conditions, je dis que $x(u, v)$ *est une fonction rationnelle de* u, v.

Il me suffit évidemment de démontrer que la fonction $x = \psi(v_1, v_2)$ est algébrique, car je reviendrai à la fonction $x = \varphi(u, v)$ en remplaçant, dans ψ, les variables v_1 et v_2 par deux fonctions algébriques de u, v. Or dans la fonction $\varphi_2(u, v_2)$, algébrique en u, remplaçons u par $\rho(v_1, v_2)$; puisque ρ est algébrique, le résultat $x = \psi(v_1, v_2)$ est algébrique en v_1. En permutant le rôle de v_1, v_2, on verrait de même que ψ est algébrique en v_2.

C. Q. F. D.

En particulier, considérons la transformation

$$(29)\qquad v = \alpha(u+h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u+h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + \lambda(u+h)^{\frac{i+1}{m}} + w(u+h)^{\frac{i}{m}},$$

$$(m, n, i \text{ entiers}, \ m > 0,\ i \geqq 0,\ n \geqq i),$$

où h est une constante arbitraire dont peuvent dépendre $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; admettons que, *pour h quelconque*, cette transformation change $x = \varphi(u, v)$ en une fonction $x = \Phi(u, w)$ *algébrique en* u: il suffit de donner à h deux valeurs particulières arbitraires h_1, h_2, de poser $w = v_1$ pour $h = h_1$, $w = v_2$ pour $h = h_2$, et d'appliquer la proposition précédente pour voir que $x(u, v)$ est rationnel en u, v. Il n'y a d'exception que si l'égalité:

$$\alpha_1(u+h_1)^{\frac{n}{m}} + \ldots + v_1(u+h_1)^{\frac{i}{m}} = \alpha_2(u+h_2)^{\frac{n}{m}} + \ldots + v_2(u+h_2)^{\frac{i}{m}}$$

[1] Si $\varphi(u, v)$ est une fonction quelconque, le lemme subsiste, à condition de remplacer dans l'énoncé le mot *rationnelle* par le mot *algébrique*.

ne définit pas u en fonction de v_1, v_2; autrement dit, si la valeur

$$v_1 = v_2\left(\frac{u+h_2}{u+h_1}\right)^{\frac{i}{m}}$$

$$+\frac{a_2(u+h_2)^{\frac{n}{m}}+\ldots+\lambda_2(u+h_2)^{\frac{i+1}{m}}-a_1(u+h_1)^{\frac{n}{m}}-\ldots-\lambda_1(u+h_1)^{\frac{i+1}{m}}}{(u+h_1)^{\frac{i}{m}}}$$

ne dépend pas de u. Ce cas exceptionnel ne saurait évidemment se présenter que *si i est nul, m égal à 1 et α indépendant de h;* en particulier, si $n \leq m$, l'exception ne se présente que dans le cas où la transformation (29) se réduit à la suivante: [1]

$$(30) \qquad v = \alpha(u+h) + w, \qquad (\alpha \text{ numérique}).$$

Nous aboutissons donc à ce lemme:

Lemme A. *Si une fonction méromorphe $x = \varphi(u, v)$ devient, après une transformation* (29) *où h est arbitraire, une fonction $\Phi(u, w)$ algébrique en u, c'est une fonction rationnelle de u, v, sauf peut-être dans le cas où i est nul. Si, dans la transformation* (29), *n est au plus égal à m, $\varphi(u, v)$ est rationnelle en u, v, à moins que la transformation* (29) *ne se réduise à la transformation* (30).

21. **Lemme B.** Si une fonction $x = \varphi(u)$, uniforme dans le domaine d'un point $u = a$, s'exprime par une combinaison algébrique de plusieurs fonctions $\varphi_1(u)$, ..., $\varphi_h(u)$, algébroïdes [2] pour $u = a$, $\varphi(u)$ est holomorphe pour $u = a$ ou admet $u = a$ comme pôle.

[1] Si la transformation $v = au + v_1$ change $\varphi(u, v)$ en une fonction $\varphi_1(u, v_1)$ algébrique en u, il en est de même évidemment de la transformation $v = a(u+h) + v_2$, qui substitue à v_1 l'expression $(ah + v_2)$; la présence de h est, dans ce cas, purement parasite.

[2] On sait qu'une fonction $f(u)$ est dite *algébroïde* pour $u = a$ si elle est développable, dans le voisinage de $u = a$, suivant les puissances croissantes de $(u-a)^{\frac{1}{n}}$, (n entier > 0), les premières puissances pouvant être négatives; $f(u)$ est *fractionnaire ou méromorphe* pour $u = a$ si $u = a$ est un pôle de $f(u)$. On dit que $f(u)$ est algébroïde pour $u = \infty$ si la fonction $f_1(u_1) \equiv f\left(\frac{1}{u_1}\right)$ est algébroïde pour $u_1 = 0$.

En particulier, *si* $\varphi(u)$ *est méromorphe dans tout le plan et s'exprime algébriquement à l'aide de plusieurs fonctions* $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$, *algébroïdes pour* $u = \infty$, $\varphi(u)$ *est une fraction rationnelle.*

Ce lemme est évident; $u = a$ ne peut être qu'un point *algébrique* — donc un point régulier ou un pôle — de la fonction $\varphi(u)$ uniforme dans le voisinage de $u = a$.

Examen d'une courbe polaire non logarithmique.

22. Nous allons aborder maintenant l'étude générale du cas où *les fonctions inverses* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *des différentielles totales*

$$u = I(x, y, z), \qquad v = J(x, y, z)$$

renferment rationnellement les constantes x_0, y_0, z_0, en supposant seulement qu'une au moins des intégrales I, J admet (à distance finie ou infinie) *une courbe polaire.*

C'est la discussion des intégrales I, J dans le voisinage d'une courbe polaire qui constituera toute la difficulté de cette étude.[1] Nous pouvons, moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S, faire en sorte [voir le n° 10] que la courbe polaire considérée Γ soit située à distance finie dans le plan $x = 0$, sans se réduire à une droite parallèle à Oz. Plaçons-nous d'abord dans le cas où Γ est une *courbe polaire non-logarithmique* pour une détermination (I_1, J_1) du couple d'intégrales (I, J).

[1] Comme on peut augmenter u, v de constantes arbitraires, il est loisible (et c'est ce que nous ferons, pour simplifier l'écriture) de supposer, que $u = 0$, $v = 0$ sont des *valeurs quelconques;* autrement dit, nous admettrons qu'on a préalablement remplacé u, v par $u + a$, $v + b$, les constantes a, b étant arbitrairement choisies (et non exceptionnelles). Dans ces conditions, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ pour $v = 0$, ne se réduisent pas toutes trois à des constantes, et la même remarque s'applique à $u = 0$. De plus, on sait que $x(u + h, v + k)$ s'exprime rationnellement à l'aide de $U_1(u) = x(u, k)$, $U_2(u) = y(u, k)$, $U_3(u) = z(u, k)$ et de $V_1(v) = x(h, v)$, $V_2(v) = y(h, v)$, $V_3(v) = z(h, v)$; soit

$$x(u + h, y + k) = R(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3);$$

pour $h = k = 0$ et u, v arbitraires, les valeurs de $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ ne donnent pas à R la forme $\frac{0}{0}$, et la même remarque s'applique à y, z.

Les deux branches en question de I, J sont développables sous la forme:

$$(31)\quad u = I = \frac{A_0(y)}{X^m} + \frac{A_1(y)}{X^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}(y)}{X} + A_m(y) + A_{m+1}(y)X + \ldots,$$

$$(32)\quad v = J = \frac{B_0(y)}{X^n} + \frac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}(y)}{X} + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \ldots,$$

avec

$$x = X^l \quad (l \text{ entier } \geqq 1);$$

les A, B sont des fonctions algébriques de y, holomorphes pour une valeur *quelconque* (non exceptionnelle) y_0 de y, et les développements (31), (32), pour $y = y_0$, convergent quand $|x|$ est suffisamment petit; m et n sont deux entiers positifs dont un au moins n'est pas nul; il est loisible de supposer $m \geqq n$ et $m > 0$.

Ceci posé, éliminons X entre les équations (31) et (32). Posons: $u_1 = (u+h)^{\frac{1}{m}}$, ($h$ constante arbitraire); le développement de u_1 peut s'écrire:

$$u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1(y) + a_2(y)X + \ldots,$$

et en remplaçant X en fonction de u_1 dans l'égalité (32), il vient:

$$(33)\qquad v = \alpha(y)u_1^n + \beta(y)u_1^{n-1} + \ldots + \nu(y)u_1 + \varpi(y) + \frac{\rho(y)}{u_1} + \ldots,$$

la série (pour $y = y_0$) convergeant si $|u_1|$ est suffisamment grand.

Deux cas sont à distinguer suivant que dans le développement (33) *tous les coefficients* $\alpha, \beta, \ldots$ *jusqu'à* ϖ *inclusivement sont ou non indépendants de* y.

Premier cas.

23. Supposons que les coefficients $\alpha(y), \beta(y), \ldots, \varpi(y)$ ne soient pas tous des constantes; soit λ le premier de ces coefficients qui dépende effectivement de y, et soit $\lambda(y)u_1^k$ le terme correspondant de la série (33). Posons:

$$u = -h + u_1^m, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + w u_1^k, \quad (k \geqq 0).$$

Les fonctions x, y, z de u, v deviennent des fonctions méromorphes de u_1, w qui vérifient (pour les grandes valeurs de u_1) les relations:

$$(34) \quad u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1(y) + a_2(y)X + \ldots, \quad w = \lambda(y) + \frac{\mu(y)}{u_1} + \ldots, \quad [\lambda'(y) \neq 0].$$

Soit y_0 une valeur *arbitraire* de y (valeur pour laquelle les fonctions algébriques $a_0(y)$, $a_1(y)$, ..., $\lambda(y)$, $\mu(y)$, ... sont holomorphes et a_0 différent de zéro); pour $u_1 = \infty$ et $y = y_0$, w prend la valeur $w_0 = \lambda(y_0)$, *variable avec* y_0. Pour plus de clarté, remplaçons u_1 par $\frac{1}{u'}$; le système

$$u' = X\left[\frac{1}{a_0(y)} + b_1(y)X + b_2(y)X^2 + \ldots\right], \qquad w = \lambda(y) + \mu(y)u' + \ldots$$

définit un couple de fonctions $X(u', w)$, $y(u', w)$ qui pour $u' = 0$, $w = w_0$ sont *holomorphes* et prennent les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. Les fonctions méromorphes $x = X'$ et y de (u_1, w) sont donc *rationnelles* en u_1.

Ceci revient à dire que la transformation:

$$(29) \qquad v = \alpha(u+h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u+h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + w(u+h)^k$$

$$(m \geqq n \geqq k \geqq 0, \quad h \text{ constante arbitraire})$$

change les fonctions méromorphes x, y de u, v en deux fonctions de u, w qui sont *algébriques en* u. Il résulte alors du lemme A que x et y (par suite z) sont *rationnelles en* u, v, à moins que la transformation (29) ne se réduise à la forme: $v = \alpha(u+h) + w$, (α constante numérique). Il suffit alors de remplacer l'intégrale J par la combinaison $w = I - \alpha J$ pour que les fonctions x, y, z soient *rationnelles en* u. D'où cette conclusion:

Dans le cas qui nous occupe, les fonctions x, y, z sont **rationnelles** *en u, après qu'on a remplacé v par une combinaison linéaire convenable de u, v.*

Deuxième cas.

24. Supposons maintenant que dans le développement (33) tous les coëfficients α, β, ... jusqu'à ϖ inclusivement soient indépendants de y. Posons encore:

$$u = -h + u_1^m, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 + w.$$

Si je montre que les fonctions *méromorphes* x, y, z de u_1, w sont rationnelles en u, rien n'est changé à la conclusion précédente. Or les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ admettant un théorème d'addition, les fonctions

$$x = \varphi(u_1^m - h, \alpha u_1^n + \ldots + w) \equiv \varphi_1(u_1, w)$$

et

$$y = \psi(u_1^m - h, \alpha u_1^n + \ldots + w) \equiv \psi_1(u_1, w)$$

s'expriment algébriquement[1] à l'aide des quatre fonctions *méromorphes* à une variable:

$$U_1(u_1) = \varphi(u_1^m, \alpha u_1^n + \ldots + \nu u_1), \qquad U_2(u_1) = \psi(u_1^m, \alpha u_1^n + \ldots + \nu u_1),$$

$$V_1(w) = \varphi(h, w), \qquad V_2(w) = \psi(h, w).$$

Pour que φ_1 et ψ_1 soient rationnels en u_1, il faut et il suffit que U_1, U_2 le soient: c'est ce que je vais établir.

Remarquons d'abord qu'inversement U_1, U_2 peuvent s'exprimer algébriquement à l'aide de V_1, V_2 et de $x = \varphi_1$, $y = \psi_1$. Ceci posé, soit $\sigma(y)$ le premier des coefficients $\varpi, \rho, \ldots$ du développement (33) qui dépend effectivement de y, et soit $\frac{\sigma(y)}{u_1^k}$ le terme de (33) correspondant.[2] Faisons la substitution:

$$w = \frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}.$$

Les égalités (31), (32) équivalent alors aux suivantes:

$$u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1 + \ldots, \qquad w' = \sigma(y) + \frac{\tau(y)}{u_1} + \ldots, \quad [\sigma'(y) \neq 0],$$

et ce dernier système définit un couple de fonctions $X(u_1, w)$, $y(u_1, w)$ qui, pour $u_1 = \infty$, $w' = w'_0$ (w'_0 *arbitraire*), sont holomorphes et prennent les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. D'autre part, V_1, V_2 deviennent des fonctions $W_1(u_1, w') \equiv V_1\left(\frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}\right)$, $W_2(u_1, w') \equiv V_2\left(\frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}\right)$ qui admet-

[1] Voir la note 1, p. 25.

[2] Un tel terme existe toujours; autrement, v serait fonction de u_1, et $PQ_1 - QP_1$ identiquement nul.

tent $u_1 = \infty$ comme point régulier ou comme pôle. Les fonctions méromorphes $U_1(u_1)$, $U_2(u_1)$ apparaissent ainsi comme des combinaisons algébriques de quatre fonctions W_1, W_2, x, y de (u_1, w') qui (w' étant quelconque) sont algébroïdes pour $u_1 = \infty$: d'après le lemme (B), U_1 et U_2 sont rationnelles en u_1. C. Q. F. D.

La conclusion, dans le second cas, est la même que dans le premier. *Si donc il existe une courbe polaire non logarithmique, les fonctions x, y, z sont rationnelles en u, après qu'on a remplacé v par une combinaison linéaire convenable de u, v.*

Examen d'une courbe polaire logarithmique.

25. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèses où la courbe polaire $x = 0$ est logarithmique pour une au moins des deux branches I, J considérées. Les résidus correspondants α, β de I, J ne sont pas nuls tous deux, soit $\beta \neq 0$; en substituant $\beta I - \alpha J$ à I et $\frac{J}{\beta}$ à J, on peut supposer $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Dans ces conditions, le couple I, J se développe sous la forme suivante [voir le n° 10]

$$(35)\quad u = I(x, y, z) = \frac{A_0}{X^m} + \frac{A_1}{X^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{X} + A_m + A_{m+1}X + \dots,$$

$$(36)\quad v = J(x, y, z) = \frac{B_0}{X^n} + \frac{B_1}{X^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{X} + \log X + B_n + B_{n+1}X + \dots$$

Dans ces conditions, les fonctions méromorphes x, y, z de u, v ne changent pas quand on augmente v de $2i\pi$, et sont, par suite, des fonctions *uniformes* de $\theta = e^v$, fonctions dont les seules singularités essentielles possibles, dans le champ des θ, sont $\theta = 0$, $\theta = \infty$.

Je représenterai systématiquement, dans ce qui suit, par $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ les fonctions x, y de (u, v), par $\varphi_1(u, \theta)$, $\psi_1(u, \theta)$ les fonctions x, y de (u, θ); on a:

$$\varphi_1(u, \theta) \equiv \varphi(u, \log\theta), \qquad \psi_1(u, \theta) \equiv \psi(u, \log\theta).$$

Je représenterai[1] par $V_1(v)$, $V_2(v)$ les fonctions $\varphi(0, v)$, $\psi(0, v)$, et par $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ les fonctions *uniformes* $V_1(\log\theta)$, $V_2(\log\theta)$. D'après le théorème d'addition, $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $\varphi(u, 0)$, $\psi(u, 0)$ et de $V_1(v)$, $V_2(v)$; pour démontrer que x et y sont des fonctions rationnelles de $\theta = e^v$, il suffit de démontrer que T_1, T_2 *sont rationnelles en* θ. Mais le théorème d'addition définit encore *algébriquement*

$$\varphi_1(u + u_0, \overline{\theta\theta_0}), \quad \psi_1(u + u_0, \overline{\theta\theta_0})$$

à l'aide de $\varphi_1(u, \theta)$, $\psi_1(u, \theta)$, $\varphi_1(u_0, \theta_0)$, $\psi_1(u_0, \theta_0)$; en particulier, si on fait $u = u_0 = 0$, on voit que $T_1(\overline{\theta\theta_0})$, $T_2(\overline{\theta\theta_0})$ s'expriment *algébriquement* à l'aide de $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$, $T_1(\theta_0)$, $T_2(\theta_0)$; il en résulte notamment que $T_1\left(\frac{1}{\theta}\right)$, $T_2\left(\frac{1}{\theta}\right)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$. Si donc T_1, T_2 n'admettent pas la valeur $\theta = 0$ comme singularité essentielle, il en va de même pour la valeur $\theta = \infty$. Autrement dit, si les fonctions $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ sont *méromorphes*, elles sont nécessairement *rationnelles*. D'où cette conclusion:

Pour établir que les fonctions x, y de u, $\theta = e^v$ sont rationnelles en θ, il suffit de prouver que $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ sont méromorphes.

Ceci posé, distinguons deux cas suivant que l'entier m est positif ou nul.

Premier cas: $m > 0$.

26. Posons $u_1 = (u + h)^{\frac{1}{m}}$, tirons X de l'équation (35) et portons dans l'équation (36), en remarquant que

$$\log X = -\log u_1 + \frac{1}{m}\log A_0(y) + \frac{a_1(y)}{u_1} + \frac{a_2(y)}{u_1^2} + \dots$$

$$(A_0, a_1, a_2, \dots \text{ algébriques en } y).$$

---

[1] Voir la note 1, p. 25. A la valeur $v = 0$, correspond la valeur $\theta = 1$. Les fonctions $V_1(v)$, $V_2(v)$ ne sont pas toutes deux des constantes, et ne peuvent, par suite, se réduire simultanément à des fractions rationnelles.

Il vient

$$(37)\qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 - \log u_1 + \varpi + \frac{\rho}{u_1} + \ldots .$$

Je dis d'abord que *tous les coëfficients* $\alpha(y)$, $\beta(y)$, ..., $\nu(y)$ *sont des constantes.*

Supposons en effet qu'il en soit autrement; soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ qui dépend effectivement de y, et soit λu_1^k le terme correspondant du développement (37). Faisons le changement de variables:

$$u = u_1^m - h, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + w u_1^k \qquad (k \geq 1);$$

je vais montrer que les fonctions *méromorphes* x, y, z de u_1, w sont (pour w quelconque) *rationnelles en* u_1; le lemme A conduit dès lors à cette conclusion absurde [1] que les fonctions x, y, z de u, v sont *rationnelles.*

A cet effet, substituons à la variable w la variable v_1 définie par l'égalité:

$$v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + v_1 u_1^k - \log u_1,$$

ce qui entraîne

$$w = v_1 - \frac{\log u_1}{u_1^\lambda},$$

et posons [2]: $x = \Phi(u_1, v_1)$, $y = \Psi(u_1, v_1)$; les égalités (35) et (36) prennent la forme:

$$u_1 = \frac{b_1(y)}{X} + b_2(y) + b_3(y)X + \ldots, \qquad v_1 = \lambda(y) + \frac{\mu(y)}{u_1} + \ldots, \qquad \lambda'(y) \neq 0,$$

et si c désigne la valeur (*arbitraire*) $\lambda(y_0)$, les deux dernières équations définissent un couple $X(u_1, v)$, $y(u_1, v)$ qui pour $u_1 = \infty$, $v_1 = c$ est holomorphe et prend les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. Les fonctions Φ, Ψ sont

---

[1] Les fonctions x, y, z de u, v ne changent pas quand on augmente v de $2i\pi$, et ne peuvent être rationnelles en v sans être indépendantes de v.

[2] Φ et Ψ sont uniformes mais peuvent admettre $u_1 = \infty$, $u_1 = 0$, $v_1 = \infty$ comme points essentiels.

donc *holomorphes* pour $u_1 = \infty$, $v_1 = c$, et quand on donne à u_1 de grandes valeurs, à v_1 des valeurs voisines de c, Φ et Ψ diffèrent très peu de 0 et y_0.

Revenons maintenant à la variable w, et soit $x = \Phi_1(u_1, w)$, $y = \Psi_1(u_1, w)$; on a:

$$\Phi_1 = \Phi\left(u_1, w + \frac{\log u_1}{u_1^k}\right) = \Phi(u_1, w + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro[1] avec $\frac{1}{u_1}$. Donnons à w la valeur constante c; la fonction $\Phi_1(u_1, h) = \Phi(u_1, h + \varepsilon)$ diffère très peu de zéro quand u_1 tend arbitrairement vers l'infini; elle est donc holomorphe pour $u_1 = \infty$, et, comme elle est méromorphe, c'est une fonction rationnelle de u_1. La même conclusion s'applique à y, donc à z, résultat absurde.

C. Q. F. D.

27. Ce point établi, je vais montrer que, (moyennant une transformation linéaire effectuée sur u, v), x, y, z *sont, dans le cas qui nous occupe, rationnelles en* u *et* $\theta = e^v$.

Puisque $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ sont des constantes, posons:

$$(38) \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 + \log\tau \equiv H(u_1) + \log\tau, \qquad u = u_1^m - h;$$

$x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$ deviennent des fonctions uniformes de u_1, τ dont les seules singularités essentielles possibles sont $u_1 = \infty$, $\tau = 0$, $\tau = \infty$, et qui, en vertu du théorème d'addition, s'expriment algébriquement[2] à l'aide des quatre fonctions:

$$U_1 = \varphi[u_1^m - h, H(u_1)], \qquad U_2 = \psi[u_1^m - h, H(u_1)],$$
$$T_1(\tau) = \varphi(0, \log\tau), \qquad T_2(\tau) = \psi(0, \log\tau).$$

[1] Les fonctions $\Phi_1(u, w)$, $\Psi_1(u, w)$ sont uniformes; il est donc loisible, dans $\frac{\log u_1}{u_1^k}$, de prendre la détermination de $\log u_1$ telle que sa partie imaginaire soit comprise entre 0 et 2π.

[2] Ces expressions algébriques en U_1, U_2, T_1, T_2 ne sauraient être de la forme $\frac{0}{0}$, du moment que les valeurs $u = 0$, $v = 0$ sont *quelconques* (voir la note 1, p. 25). La même remarque s'applique à tous les raisonnements analogues.

Inversement, $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ (et de U_1, U_2). Les fonctions $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ sont donc *méromorphes* (et par suite *rationnelles*) si les fonctions $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ sont méromorphes; à ces dernières, substituons les fonctions $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$ obtenues en posant $u_1 = \frac{t}{\tau}$, fonctions qui ne sauraient présenter de singularités essentielles en dehors de $t = \infty$, $\tau = 0$, $\tau = \infty$.[1] Je dis que $\tau = 0$ n'est pas un point essentiel de ces fonctions, ou, si on veut, en remplaçant τ par $\frac{t}{u_1}$, que $u_1 = \infty$ *est un point régulier ou un pôle des fonctions* $x(u_1, t)$, $y(u_1, t)$. Pour nous en rendre compte, changeons $\log \tau$ en $\log t - \log u_1$ dans l'équation (38): on voit que $x(u_1, t)$, $y(u_1, t)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $T_1(t)$, $T_2(t)$, U'_1, U'_2, si U'_1, U'_2 désignent les fonctions déduites de U_1, U_2 en y remplaçant $H(u_1)$ par $H(u_1) - \log u_1$; à savoir:

$$U'_1 = \varphi\left[u_1^m - h, H(u_1) - \log u_1\right], \qquad U'_2 = \psi\left[u_1^m - h, H(u_1) - \log u_1\right].$$

Tout revient donc à démontrer que $u_1 = \infty$ *n'est pas un point essentiel de* $U'_1(u_1)$, $U'_2(u_1)$.

Admettons, pour un instant, ce résultat. Alors, $T_1(t)$, $T_2(t)$ sont nécessairement rationnels, et comme U_1, U_2 s'expriment algébriquement à l'aide de U'_1, U'_2, $T_1(u_1)$, $T_2(u_1)$, les fonctions méromorphes $U_1(u_1)$, $U_2(u_1)$ sont aussi rationnelles. Il suit de là que les fonctions $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ sont rationnelles en u_1, τ; par conséquent, $x(u, v)$, $y(u, v)$ deviennent des fonctions algébriques de u quand on y fait le changement de variables

$$v = \alpha(u+h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u+h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + \nu(u+h)^{\frac{1}{m}} + w;$$

mais, d'après le lemme A, ceci exige que x, y, z soient rationnels en u, v (résultat absurde), à moins que la relation entre v et w ne soit de la forme: $v = \alpha u + w$. En substituant à v la combinaison $v - \alpha u$, on voit que *les fonctions* x, y, z *de* (u, v) *sont rationnelles en* u *et en* $\theta = e^v$.

C. Q. F. D.

---

[1] Si les fonctions $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$, $z(t, \tau)$ sont méromorphes, il en est de même sûrement des fonctions obtenues en remplaçant t par $u_1\tau$.

28. Il nous reste donc seulement à démontrer que $U_1'(u_1)$, $U_2'(u_1)$ sont holomorphes ou rationnels pour $u_1 = \infty$. Or écrivons les relations entre X, y, u_1, t, déduites des équations (35), (36), (37); ces relations sont de la forme:

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} & u_1 = \frac{b_0(y)}{X} + b_1(y) + b_2(y)X + \ldots, \\ & t = e^{\omega}\left[1 + \frac{\rho}{u_1} + \ldots\right] \equiv \delta(y) + \frac{\eta(y)}{u_1} + \ldots \qquad (\delta \not\equiv 0), \end{aligned}\right.$$

soit $\varkappa(y)$ le premier des coefficients $\delta, \eta, \ldots$ qui dépende effectivement de y et soit $\frac{\varkappa(y)}{u_1^j}$ le terme correspondant du développement (39). Faisons un dernier changement de variables:

$$t = \delta + \frac{\eta}{u_1} + \ldots + \frac{t'}{u_1^j}, \qquad (\delta \neq 0);$$

les relations:

$$u_1 = \frac{b_0(y)}{X} + b_1(y) + b_2(y)X + \ldots, \qquad t' = \varkappa(y) + \frac{\lambda(y)}{u_1} + \ldots, \quad (\varkappa'(y) \not\equiv 0)$$

nous montrent, d'après un raisonnement déjà fait, que les fonctions x, y de (u_1, t') sont holomorphes pour $u_1 = \infty$; mais ces fonctions s'expriment algébriquement à l'aide de U_1', U_2', et des fonctions T_1', T_2' de u_1, t' obtenues en remplaçant dans T_1, T_2 la variable t par l'expression

$$t = \delta + \frac{\eta}{u_1} + \ldots + \frac{t'}{u_1^j};$$

T_1' et T_2' sont holomorphes (ou fractionnaires) pour $u_1 = \infty$; car l'argument t pour $u_1 = \infty$ (et t' quelconque) s'y réduit[1] à $\delta \neq 0$. Inversement, d'ailleurs, U_1' et U_2' s'expriment algébriquement à l'aide des quatre fonctions $x(u_1, t')$, $y(u_1, t')$, T_1', T_2', toutes quatre algébroïdes pour $u_1 = \infty$; *le point $u_1 = \infty$ n'est donc pas un point essentiel de $U_1'(u_1')$, $U_2'(u_1)$.* La discussion du cas $m > 0$ est achevée.

---

[1] Si $j = 0$, autrement dit si $\delta'(y) \not\equiv 0$, t coïncide avec t' et T_1', T_2' ne dépendent que de t.

Deuxième cas: $m = 0$.

29. Supposons d'abord *que n soit nul en même temps que m*, (autrement dit que I, J ne deviennent infinies que *logarithmiquement* sur la courbe polaire). Ecrivons les deux égalités:

(40) $$u = A_0(y) + A_1(y)X + A_2(y)X^2 + \dots$$

(41) $$v = \log X + B_0(y) + B_1(y)X + \dots$$

Posons $\theta = e^v$, et montrons que x, y, z *sont des fonctions méromorphes de u, θ, par suite* [n° 25] *des fonctions* **rationnelles** *de θ*. L'équation (41) devient:

(42) $$\theta = X[c_0(y) + c_1(y)X + c_2(y)X^2 + \dots], \qquad c_0 \equiv e^{B_0(y)} \not\equiv 0;$$

en portant dans (40) la valeur de X tirée de (42), on trouve:

$$u = \alpha(y) + \beta(y)\theta + \dots + \lambda(y)\theta^j + \dots.$$

Soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \dots$ qui dépende effectivement de y. La transformation:

$$u = \alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j$$

conduit aux relations suivantes entre u_1, θ, X, y:

$$u_1 = \lambda(y) + \mu(y)\theta + \nu(y)\theta^2 + \dots, \qquad \theta = X[c_0 + c_1X + \dots], \qquad [\lambda'(y) \not\equiv 0],$$

et d'après un raisonnement déjà employé, ces équations sont vérifiées par un couple: $X(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$, holomorphe pour $u_1 = u_1^0$, $\theta = 0$. Les fonctions $x(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$, sont donc holomorphes pour $\theta = 0$; mais d'autre part, elles s'expriment algébriquement[1] à l'aide des quatre fonctions:

$$U_1 = \varphi(\alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j, 0), \qquad U_2 = \psi(\alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j, 0),$$
$$T_1 = \varphi(0, \log\theta), \qquad T_2 = \psi(0, \log\theta),$$

et inversement T_1, T_2 s'expriment algébriquement à l'aide des fonctions U_1, U_2, $x(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$ qui *toutes les quatre*[2] *sont holomorphes ou frac-*

[1] Voir la note 1, p. 25.

[2] La chose est évidente pour U_1, U_2 puisque les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ sont méromorphes.

tionnaires pour $\theta = 0$. Les fonctions uniformes $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ ne sauraient donc admettre $\theta = 0$ comme point essentiel, et sont des fonctions méromorphes (par suite rationnelles) de θ. Il en est donc de même des fonctions x, y, z de u, θ. C. Q. F. D.

30. Je vais établir maintenant que le cas précédent est le seul possible si m est nul, autrement dit que n *est nécessairement nul avec* m. Admettons en effet qu'il en soit autrement et voyons que l'hypothèse est absurde.

Soit donc $m = 0$, $n > 0$. Nous distinguerons ce cas en deux sous-cas suivant que $A_0(y)$ est ou non une constante.

Premier sous-cas: $m = 0$, $n > 0$, $A'_0(y) \not\equiv 0$.

Ecrivons les deux égalités

$$u = A_0(y) + A_1(y)X + A_2(y)X^2 + \ldots, \quad [A'_0(y) \not\equiv 0], \tag{43}$$

$$v = \frac{B_0(y)}{X^n} + \frac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}(y)}{X} + \log X + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \ldots, \quad (n > 0); \tag{44}$$

soit y_0 une valeur quelconque (non exceptionnelle) de y, et u_0 la valeur correspondante de A_0; si nous donnons à u, dans (43), la valeur (*arbitraire*) u_0, nous pouvons en tirer y sous la forme:

$$y = y_0 + gX + hX^2 + \ldots,$$

et en portant dans (44) il vient:

$$\left\{\begin{aligned} v &= \frac{B_0(y_0)}{X^n} + \frac{C_1}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{X} + \log X + C_n + C_{n+1}X + \ldots, \\ v &= \frac{B_0(y_0)}{X^n}(1 + \varepsilon), \end{aligned}\right. \tag{45}$$

quand X tend vers zéro *arbitrairement*, v tend vers l'infini arbitrairement[1]

[1] Posons $w = \dfrac{v}{B_0(y_0)} = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, $X = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\log X = \log r + i\varphi$, ($\varphi$ restant compris expressément entre 0 et 3π); dans ces conditions, ε tend vers zéro

d'après l'égalité (45); donc si, pour $u = u_0$, v tend arbitrairement vers l'infini, la fonction uniforme $x = X'(u_0, v)$ tend vers zéro, y tend vers y_0. Les fonctions méromorphes x, y, z de u, v seraient donc rationnelles en v, ce qui est absurde. C. Q. F. D.

Second sous-cas: $m = 0$, $n > 0$, $A_0'(y) \equiv 0$.

31. Il est loisible d'admettre que la valeur constante A_0 est nulle (en augmentant u d'une constante) et d'écrire:

$$(46)\quad \begin{cases} u = X^q\{A_q(y) + XA_{q+1}(y) + \ldots\}, \qquad q > 0, \\ v = \dfrac{B_0(y)}{X^n} + \dfrac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \ldots + \dfrac{B_{n-1}(y)}{X} + \log X + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \ldots \end{cases}$$

Si nous remplaçons u par u_1^q, et si nous tirons X de la première équation (46), il vient [en remarquant que $\log u_1 = \log X + a_0(y) + a_1(y)X + \ldots$]:

$$(47)\qquad v = \frac{\alpha}{u_1^n} + \frac{\beta}{u_1^{n-1}} + \ldots + \frac{\nu}{u_1} + \log u_1 + \varpi + \rho u_1 + \ldots.$$

Soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \ldots, \varpi, \ldots$ qui dépend effectivement de y, et soit $\dfrac{\lambda}{u_1^k}$ le terme correspondant du développement (47), ($k > 0$ ou < 0 ou $= 0$). Posons:

$$(48)\qquad v = \log u_1 + \frac{\alpha}{u_1^n} + \frac{\beta}{u_1^{n-1}} + \ldots + \frac{w}{u_1^k}, \quad (k > 0 \text{ ou } = 0 \text{ ou } < 0);$$

---

avec X; d'une façon précise, η désignant une quantité positive prise d'avance aussi petite qu'on veut, on a: $|\varepsilon| < \eta$, dès que $|X|$ est inférieur à une certaine quantité μ, et par suite:

$$w = \frac{1}{r^n}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)\lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha), \text{ avec } 1 - \eta \leqq \lambda \leqq 1 + \eta, \; -\eta \leqq \sin\alpha \leqq \eta;$$

si donc x varie de μ à 0 et φ de 0 à 3π, on voit que w coïncide avec tous les points extérieurs à un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à $\dfrac{1+\eta}{\mu^n}$; v coïncide avec tous les points dont le module dépasse $|B_0(y_0)|\dfrac{(1+\eta)}{\mu^n}$.

on peut écrire

$$v = \frac{a}{u_1^n}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro (pour $w = w_0$) quand u_1 tend vers l'infini sur une direction quelconque, et (d'après la note 1 de la page 36), quand u_1 tend vers zéro arbitrairement, v tend arbitrairement vers l'infini.

D'autre part, X, y, u_1, w vérifient deux relations de la forme:

$$u_1 = X[C_0(y) + C_1(y)X + C_2(y)X^2 + \ldots], \qquad (C_0 = \sqrt[q]{A_q}, \text{ etc})$$

$$w = \lambda(y) + u_1\mu(y) + u_1^2\nu(y) + \ldots, \qquad \lambda'(y) \not\equiv 0,$$

et, d'après un raisonnement constamment employé, ces relations montrent que les fonctions $x = X^l$ et y de u_1, w sont holomorphes pour $u_1 = 0$, $w = w_0$.

Mais les fonctions x, y de u_1, w s'expriment algébriquement à l'aide des quatre fonctions: $U_1 = \varphi(u_1^q, 0)$, $U_2 = \psi(u_1^q, 0)$, et V_1', V_2', si V_1', V_2' désignent les fonctions $V_1 = \varphi(0, v)$, $V_2 = \psi(0, v)$, où on a remplacé v par l'expression $v = \log u_1 + \frac{a}{u_1^n} + \ldots + \frac{w}{u_1^k}$; réciproquement V_1', V_2' s'expriment algébriquement à l'aide des fonctions U_1, U_2, $x(u_1, w)$, $y(u_1, w)$ qui sont toutes les quatre, holomorphes ou fractionnaires pour $u_1 = 0$; V_1' et V_2' sont donc aussi holomorphes ou fractionnaires pour $u_1 = 0$. Or, quand u_1 tend vers zéro, la variable $v = \frac{a}{u_1^n}(1 + \varepsilon)$ tend vers l'infini *arbitrairement;* les fonctions *méromorphes* $V_1(v)$, $V_2(v)$ sont donc bien déterminées quand v croît indéfiniment; ce sont, par suite, des fractions rationnelles de v; résultat absurde. C. Q. F. D.

Conséquences de la double discussion précédente. Théorème définitif.

32. Les conclusions des n$^{\text{os}}$ 23, 24, 27, 29, 30 et 31 se résument ainsi:

Après une transformation linéaire convenable effectuée sur u, v,

1° *ou bien les fonctions* x, y, z *de* u, v *sont rationnelles en* u;

2° *ou bien les fonctions* x, y, z *sont rationnelles en* e^u, *et les intégrales* I, J *ne peuvent devenir infinies que logarithmiquement.*

Le cas 1° a été étudié aux n^{os} 12—16.

Dans le cas 2°, I et J admettent le couple de périodes polaires $(2i\pi, 0)$. Si J ne présente pas de courbes polaires, on rentre dans l'hypothèse qui fait l'objet des n^{os} 17—19. Si J présente une courbe polaire, cette courbe est nécessairement logarithmique, et si le couple de résidus correspondants est α, β, $(\beta \neq 0)$, il suffit de remplacer u par $u - \frac{\alpha}{\beta}v$ et v par $\frac{v}{\beta}$ pour que I et J admettent les deux couples de périodes polaires $(2i\pi, 0)$ et $(0, 2i\pi)$. Dans ces conditions, *x, y, z sont rationnelles en $t = e^u$, $\theta = e^v$.*

Inversement, t et θ sont *algébriques* en x, y, z. Je dis qu'on peut toujours faire en sorte que *t et θ soient rationnelles en x, y, z.* Tout d'abord, les résidus de I (et de J) sont réels et commensurables, et en multipliant I (ou J) par un certain entier, on peut les supposer entiers, premiers entre eux: la plus petite période de I (et aussi de J) est alors $2i\pi$. A la période $2i\pi$ de I correspond une période $2mi\pi$ de J; en remplaçant J par $J_1 = J - mI$, on annule m; seulement, la plus petite période de J_1 peut n'être plus $2i\pi$, mais $2i\pi k$, (k entier); l'entier k entre alors en facteur dans tous les résidus de J_1, soit $J_2 = \frac{J_1}{k}$; à la période $2i\pi$ de J_2 correspond une période $2i\pi l$ de I; je remplace I par $I_1 = I - lJ_2$, et les intégrales I_1, J_2 admettent les couples primitifs de périodes:

$$\begin{pmatrix} 2i\pi, & 0 \\ 0, & 2i\pi \end{pmatrix};$$

e^{J_1} et e^{J_2} sont rationnels en x, y, z. Autrement dit, *après une substitution linéaire convenable effectuée sur u, v, les quantités e^u, e^v sont rationnelles en x, y, z, et inversement les fonctions uniformes x, y, z de e^u, e^v sont rationnelles en e^u, e^v.*

Dans le dernier cas que nous venons d'élucider, la surface $S(x, y, z) = 0$ correspond *birationnellement* à un plan.

33. **Théorème définitif.** Le théorème que nous avions en vue se trouve dès lors complètement démontré. Nous l'énoncerons ainsi:

Considérons deux intégrales de différentielles totales, qui ne soient point fonctions l'une de l'autre, attachées à une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, *et dont une au moins admet une courbe polaire; soit:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy \equiv I(x, y, z), \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J(x, y, z). \end{cases}$$

Si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par l'inversion du système (Σ) renferment rationnellement les constantes initiales x_0, y_0, z_0 (liées par la condition $S(x_0, y_0, z_0) = 0$), ces fonctions, moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur u, v, sont des combinaisons rationnelles d'un des systèmes de fonctions qui suivent:

$$(\mathrm{T}) \quad \begin{cases} X = u, & Y = v, & Z = 0, \\ X = u, & Y = e^v, & Z = 0, \\ X = e^u, & Y = e^v, & Z = 0, \\ X = u - \varepsilon\zeta(v), & Y = \wp(v), & Z = \wp'(v), \\ X = e^u \dfrac{\sigma(v-\alpha)}{\sigma(v)}, & Y = \wp(v), & Z = \wp'(v), \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} \varepsilon = 0 \text{ ou } 1, \\ \alpha, g_2, g_3 \text{ constantes nu-} \\ \text{mériques.} \end{matrix} \right.$$

Comme les intégrales I, J présentent sûrement une courbe polaire [voir le n° 11] quand le nombre des périodes est inférieur à 4, on voit que le théorème peut s'énoncer encore ainsi:

Quand les fonctions x, y, z de u, v définies par l'inversion de deux intégrales (distinctes) de différentielles totales attachées à S renferment rationnellement les constantes initiales x_0, y_0, z_0, ce sont des fonctions hyperelliptiques (aux mêmes périodes) dégénérées[1] *ou non.*

C'est le théorème auquel nous avons ramené celui de Weierstrass [n° 7].

De plus, X, Y, Z *s'expriment rationnellement en fonction de x, y, z.* La surface S correspond birationnellement à un plan dans les trois premiers cas [où $Z = 0$], et au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3$ dans les deux derniers.

[1] Les systèmes de fonctions qui figurent dans le tableau (T) sont des quotients de fonctions θ (à deux variables) dégénérées [voir le n° 4].

Remarquons que les coordonnées X, Y, Z de ce cylindre se laissent mettre *de trois manières distinctes* sous la forme de fonctions hyperelliptiques dégénérées, à savoir:

$$Y = \wp(v), \qquad Z = \wp'(v)$$

avec

$$X = u, \quad \text{ou} \quad X = u - \zeta(v), \quad \text{ou} \quad X = e^u \frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)};$$

à chacune de ces représentations correspond un groupe *permutable* à deux paramètres de transformations birationnelles de la surface en elle-même, groupe obtenu en augmentant u, v de constantes arbitraires.

Enfin, donnons une dernière forme aux conclusions auxquelles nous venons de parvenir:

Quand les fonctions x, y, z de u, v définies par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales quelconques attachées à S renferment rationnellement les constantes x_0, y_0, z_0 et admettent au plus trois couples de périodes distincts, le système (Σ), moyennant une transformation birationnelle effectuée sur la surface S et une substitution linéaire effectuée sur u, v, se ramène à une des formes:

$$(\sigma)\quad \begin{cases} dU = dX, & dV = dY, \quad Z = 0, \\ dU = dX, & dV = \dfrac{dY}{Y}, \quad Z = 0, \\ dU = \dfrac{dX}{X}, & dV = \dfrac{dY}{Y}, \quad Z = 0, \\ dU = dX + \varepsilon \dfrac{YdY}{Z}, & dV = \dfrac{dY}{Z}, \quad Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3, \\ dU = \dfrac{dX}{X} + \dfrac{dY}{Z}\left[\zeta(\alpha) + \dfrac{\wp'(a) + Z}{2[\wp(a) - Y]}\right], & dV = \dfrac{dY}{Z}, \quad Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3. \\ \multicolumn{2}{c}{(\varepsilon = 0 \text{ ou } 1;\ g_2,\ g_3,\ \alpha \text{ constantes numériques}).} \end{cases}$$

Quand α tend vers zéro, le dernier système (σ) tend vers le suivant:

$$(49)\qquad dU = \frac{dX}{X}, \qquad dV = \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - g_2 Y - g_3}}.$$

34. *Comparaisons avec les fonctions inverses des intégrales hyperelliptiques.*

Les fonctions hyperelliptiques de genre 2, soit $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$, se laissent définir par le système:

$$(\tau) \qquad \left\{ \begin{aligned} du &= \frac{\xi_1 d\xi_1}{\sqrt{H(\xi_1)}} + \frac{\xi_2 d\xi_2}{\sqrt{H(\xi_2)}}, \\ dv &= \frac{d\xi_1}{\sqrt{H(\xi_1)}} + \frac{d\xi_2}{\sqrt{H(\xi_2)}} \end{aligned} \right.$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\xi) \equiv a_5\xi^5 + a_4\xi^4 + \ldots + a_1\xi + a_0, \\ \xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1\xi_2, \qquad \zeta = \sqrt{H(\xi_1)} + \sqrt{H(\xi_2)}. \end{array} \right.$$

Le système (τ) dégénère quand le coefficient a_5 de H s'annule ou quand H a des racines multiples. D'après le théorème précédent, une transformation birationnelle effectuée sur x, y, z et une transformation linéaire effectuée sur u, v ramènent alors (τ) à une des formes (σ). Démontrons rapidement la réciproque: c'est-à-dire que *tout système* (σ) *est réductible à un système* (τ) *dégénéré.*

Tout d'abord, il suffit de faire $H \equiv 1$, puis $H(\xi) \equiv \xi^2$, puis $H(\xi) \equiv \xi(\xi - 1)$, pour obtenir trois systèmes (τ) qui équivalent respectivement aux trois premiers systèmes (σ).

Quant au quatrième, il ne saurait correspondre qu'à un système (τ) formé d'intégrales elliptiques de *première* et de *seconde* espèce. Considérons donc le système:

$$(\tau_1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} du = \dfrac{\xi_1 d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{\xi_2 d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, & R(\xi) = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3, \\ dv = \dfrac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, & \xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \xi_1\xi_2, \quad \zeta = \sqrt{R(\xi_1)} + \sqrt{R(\xi_2)}. \end{array} \right.$$

Il est clair que $v(x, y, z)$ admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$;[1] mais allons voir dans un instant que ces périodes sont *primitives.* Posons:

$$\xi_1 = \wp(v_1), \qquad \xi_2 = \wp(v_2), \qquad V = \wp(v) = \wp(v_1 + v_2),$$

[1] Puisque le point (ξ, η, ζ) décrit un cycle fermé quand ξ_1 et $\sqrt{R(\xi_1)}$ reprennent les mêmes valeurs, ξ_2 et $\sqrt{R(\xi_2)}$ ne variant pas.

d'où:

$$Y = -(\xi_1 + \xi_2) + \frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right\}^2$$

$$= \rho(\xi, \eta, \zeta), \quad (\rho \text{ rationnel});$$

$\sqrt{R(Y)} = \wp'(v_1 + v_2)$ s'exprime de même rationnellement en ξ, η, ζ. On a ensuite:

$$u = -[\zeta(v_1) + \zeta(v_2)] + \text{const.} = -\zeta(v) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right] + \text{const.}$$

La transformation rationnelle:

$$X = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right] = \rho_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad Y = -\xi + X^2$$

ramène donc (τ_1) au système:

$$(\sigma_1) \quad du = dX + \frac{YdY}{\sqrt{R(Y)}}, \qquad dv = \frac{dY}{\sqrt{R(Y)}}, \quad \text{avec} \quad S(X, Y, \zeta) = 0.$$

toutes les périodes de v dérivent sûrement des périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, puisque Y et $\sqrt{R(Y)}$ reprennent les mêmes valeurs quand le point (ξ, η, ζ) décrit un cycle fermé. Il suit de là que ξ, η, ζ sont uniformes, donc rationnels, en $X, Y, \sqrt{R(Y)}$. Une transformation *birationnelle* ramène ainsi (τ_1) à (σ_1) et la surface[1] S' au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3$, si S' désigne la surface que définissent dans l'espace (ξ, η, ζ) les égalités:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1 \xi_2, \qquad \zeta = \sqrt{4\xi_1^3 - g_2\xi_1 - g_3} + \sqrt{4\xi_2^3 - g_2\xi_2 - g_3}.$$

Remarquons qu'en remplaçant u par $\frac{u}{\alpha}$ et X par $\frac{X}{\alpha}$, on ramène (τ_1) à la forme:

$$(\sigma') \qquad du = dX + \frac{\alpha Y dY}{Z}, \qquad dv = \frac{dY}{Z}, \qquad Z^2 = R(Y),$$

système qui comprend en particulier (pour $\alpha = 0$) le quatrième système (σ) où $\varepsilon = 0$. Mais pour $\alpha = 0$ la transformation de passage de (σ') à τ_1 devient illusoire. Le quatrième système (σ) où ε est nul ne correspond donc à aucun système (τ_1), mais il dégénère d'un transformé birationnel de τ_1.

[1] Ce résultat a déjà été établi par M. Picard, Mém. couronné *Sur les fonctions algébriques de deux variables* [p. 101—104].

35. Passons au dernier système (σ) qui ne peut correspondre qu'à un système (τ) formé d'intégrales elliptiques de *première* et de *troisième* espèce. Considérons donc le système:

$$(\tau_2)\quad \left\{\begin{aligned} du &= \frac{\wp'(\lambda)d\xi_1}{(\xi_1-\wp\lambda)\sqrt{R(\xi_1)}}+\frac{\wp'(\lambda)d\xi_2}{(\xi_2-\wp\lambda)\sqrt{R(\xi_2)}}, \qquad R(\xi)\equiv 4\xi^3-g_2\xi-g_3,\\ dv &= \frac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}}+\frac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, \quad \xi=\xi_1+\xi_2, \quad \eta=\xi_1\xi_2, \quad \zeta=\sqrt{R(\xi_1)}+\sqrt{R(\xi_2)}.\end{aligned}\right.$$

Posons, comme tout-à-l'heure,

$$\xi_1=\wp(v_1), \qquad \xi_2=\wp(v_2), \qquad Y=\wp(v)=\wp(v_1+v_2), \qquad \sqrt{R(Y)}=\wp'(v);$$

Y et $\sqrt{R(Y)}$ sont encore rationnels en ξ, η, ζ. On a ensuite:

$$\begin{aligned} e^u &= \frac{\sigma(v_1-\lambda)\,\sigma(v_2-\lambda)}{\sigma(v_1+\lambda)\,\sigma(v_2+\lambda)}e^{2\zeta(\lambda)(v_1+v_2)}\\ &= e^{2\zeta(\lambda)v}\frac{\sigma(v)}{\sigma(v+2\lambda)}\,\frac{\sigma(v_1-\lambda)\sigma(v_2-\lambda)\sigma(v_1+v_2+2\lambda)}{\sigma(v_1+\lambda)\sigma(v_2+\lambda)\sigma(v_1+v_2)}\equiv e^{2\zeta(\lambda)v}\frac{\sigma(v)}{\sigma(v+2\lambda)}\chi(v_1, v_2),\end{aligned}$$

χ désignant une fonction elliptique (symétrique) de v_1, v_2, aux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$, c'est-à-dire une fonction rationnelle de (ξ, η, ζ), soit $\chi=\rho_1(\xi, \eta, \zeta)$. La transformation rationnelle: $X=\rho_1(\xi, \eta, \zeta)$, $Y=\rho(\xi, \eta, \zeta)$ ramène donc (τ_2) au système:

$$du=\frac{dX}{X}+\{2\zeta(\lambda)+\zeta(v)-\zeta(v+2\lambda)\}dv, \qquad dv=\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

ou, si on veut, en posant $\alpha=-2\lambda$ et en remplaçant u par $u_1-2v\zeta(\lambda)$, à la forme

$$\sigma'' \qquad du_1=\frac{dX}{X}+\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}}\left|\zeta(\alpha)+\frac{\wp'(\alpha)+\sqrt{R(Y)}}{2[\wp(\alpha)-Y]}\right|, \qquad dv=\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

c'est-à-dire au cinquième système (σ). Le raisonnement fait au numéro précédent montre que $2\omega_1, 2\omega_2$ sont des périodes primitives de l'intégrale $v(\xi, \eta, \zeta)$, et que, par suite, ξ, η, ζ sont rationnels en $X, Y, \sqrt{R(Y)}$. Le système (τ_2) est ainsi ramené *birationnellement* au dernier système (σ) le plus général, à cela près que pour $\alpha=0+$ période, (c'est-à-dire pour $\lambda=\frac{1}{2}$ période), la transformation de passage entre (τ_2) et (σ'') devient

illusoire. Le système (49) n'est donc équivalent à aucun système (τ_2), mais il dégénère d'un transformé birationnel de (τ_2).

La transformation de passage de (σ'') à (τ_2) nous fait connaître une nouvelle correspondance birationnelle entre le cylindre $Z^2 = R(Y)$ et la surface S'.

36. *Discussion d'une méthode de démonstration proposée par M. Picard.*

M. Picard a indiqué [1] du théorème de Weierstrass une démonstration qui repose sur les principes intuitifs suivants:

Considérons trois fonctions uniformes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales $u = I$, $v = J$ attachées à la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$; soit

$$(50)\qquad du = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy, \qquad dv = P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy.$$

Introduisons deux autres intégrales de différentielles totales attachées à la surface $\Sigma(\xi, \eta, \zeta) = 0$, soit

$$(51)\qquad \begin{cases} I_1 = \int H(\xi, \eta, \zeta)d\xi + K(\xi, \eta, \zeta)d\eta, \\ J_1 = \int H_1(\xi, \eta, \zeta)d\xi + K_1(\xi, \eta, \zeta)d\eta, \end{cases}$$

telles que chacun de leurs couples de périodes soit égal à un couple de périodes des deux premières. Les fonctions x, y, z de ξ, η, ζ obtenues en remplaçant u et v par I_1 et J_1 sont évidemment des fonctions *uniformes* du point (ξ, η, ζ) de Σ; quand, de plus, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont *méromorphes*, les singularités *essentielles* des fonctions x, y, z de (ξ, η, ζ) (s'il en existe) sont nécessairement distribuées suivant les courbes *polaires* de I_1, J_1. Enfin, quand les fonctions ξ, η, ζ de u, v, obtenues en posant $u = I_1$, $v = J_1$, sont elles-mêmes *uniformes* et quand les couples de périodes sont les mêmes pour (I, J) et pour (I_1, J_1), la correspondance entre (x, y, z) et (ξ, η, ζ) est *biuniforme*.

Ceci posé, plaçons-nous dans l'hypothèse où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par le système (50), non seulement sont *méromorphes*, mais renferment *rationnellement* les constantes d'intégration (x_0, y_0, z_0). M. Picard se propose d'établir qu'on peut choisir pour système (51) un système *hyperelliptique*, tel que la correspondance entre (x, y, z) et (ξ, η, ζ) soit non seulement **biuniforme** mais **birationnelle**. La démonstration (voir le n° 8)

[1] Voir la note I, pag. 11.

n'a besoin d'être faite que dans le cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ ont au plus trois couples de périodes distincts.

37. L'illustre géomètre distingue deux cas principaux, suivant qu'il existe ou non des périodes polaires. Pour plus de clarté, discutons le premier cas dans l'hypothèse particulièrement simple où les couples de périodes se réduisent à deux, tous deux logarithmiques, soit les couples $\begin{pmatrix} 2i\pi, & 0 \\ 0, & 2i\pi \end{pmatrix}$, correspondant respectivement à deux courbes polaires C_1 et C_2.

M. Picard introduit alors le système (σ) dégénéré, [loc. cit. p. 113, 114]:

$$(52)\quad \left| \begin{array}{l} du = \dfrac{a d\xi_1}{(\xi_1 - a^2)\sqrt{\xi_1}} + \dfrac{a d\xi_2}{(\xi_2 - a^2)\sqrt{\xi_2}}, \qquad \xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1\xi_2, \\ dv = \dfrac{b d\xi_1}{(\xi_1 - b^2)\sqrt{\xi_1}} + \dfrac{b d\xi_2}{(\xi_2 - b^2)\sqrt{\xi_2}}, \qquad \zeta = \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2}. \end{array} \right.$$

Les fonction suniformes de x, y, z de ξ, η, ζ ne sauraient admettre de singularités essentielles en dehors des quatre courbes polaires $\xi_1 = a^2$, $\xi_1 = b^2$, $\xi_2 = a^2$, $\xi_2 = b^2$. M. Picard *admet* [1] que le point (x, y, z) tend vers un point *déterminé* de la courbe polaire C_1, quand ξ_1 tend vers a^2, $\sqrt{\xi_1}$ *ayant un certain signe*, (ξ_2 et $\sqrt{\xi_2}$ étant invariables et quelconques). En s'appuyant sur le fait que (x_0, y_0, z_0) figurent rationnellement dans $x(u, v)$, $y(u, v)$ $z(u, v)$, il montre ensuite qu'il en va de même pour l'autre signe de $\sqrt{\xi_1}$, et il en conclut que les fonctions x, y, z de ξ, η, ζ sont dénuées de singularités essentielles et par suite rationnelles.

En réalité, ce qui est quasi-évident c'est que le point (x, y, z) est très voisin d'une courbe polaire de S dès que ξ_1 est voisin de a^2, mais *il n'en résulte nullement que (x, y, z) tende vers un point déterminé.* Prenons, par exemple, le système:

$$(53)\qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} + dx\left[\frac{1}{x^2} - 1\right],$$

[1] M. Picard se borne à dire (à la notation près) [loc. cit. p. 107 et 114] que, si ξ_1 tend vers a^2 (le radical $\sqrt{\xi_1}$ ayant un signe convenable), la période polaire est pour u égale à $2\pi i$. »Donc quand ξ_1 tend vers a^2, $\sqrt{\xi_1}$ ayant un certain signe, quels que soient d'ailleurs ξ_2 et $\sqrt{\xi_2}$, le point (x, y, z) tendra vers un point de la courbe logarithmique C_1.»

qui définit les fonctions *méromorphes:* $x = e^u$, $y = e^{v+e^u+e^{-u}}$; les relations entre x, y et ξ_1, ξ_2 sont ici:

$$x = c\,\frac{(\sqrt{\xi_1} - a)(\sqrt{\xi_2} - a)}{(\sqrt{\xi_1} + a)(\sqrt{\xi_2} + a)}, \qquad y = c'\,\frac{(\sqrt{\xi_1} - b)(\sqrt{\xi_2} - b)}{(\sqrt{\xi_1} + b)(\sqrt{\xi_2} + b)}\,e^{x+\frac{1}{x}}$$

$(c, c'$ constantes arbitraires);

x tend vers 0 ou ∞ suivant que $\sqrt{\xi_1}$ tend vers $+a$ ou $-a$, mais, *dans l'un et l'autre cas,* $y(\xi_1, \xi_2)$ *est complètement indéterminée.*

Il est donc indispensable de démontrer que (x, y, z) *tend vsrs un point déterminé* quand $\sqrt{\xi_1}$ tend vers une des valeurs $a, -a$, et *cette démonstration ne peut être faite sans invoquer l'hypothèse que* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *renferment rationnellement* (x_0, y_0, z_0).[1]

La même objection s'applique au raisonnement [loc. cit. p. 106, 108] qui concerne le cas où un seul des trois couples de périodes est supposé polaire.

48. *Quand il n'existe pas de périodes polaires,* M. Picard s'appuie seulement sur l'hypothèse que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont *méromorphes* et il arrive à cette conclusion [p. 110—114] que ce sont alors des fonctions hyperelliptiques dégénérées. Or l'exemple:

$$(54) \qquad du = -\frac{dx}{x^2}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} + \frac{2dx}{x^3}$$

qui engendre les fonctions méromorphes

$$x = \frac{1}{u}, \qquad y = \wp v + u^2,$$

suffit à mettre cette conclusion en défaut.

---

[1] La transformation $X = \frac{(\sqrt{\xi_1} - a)(\sqrt{\xi_2} - a)}{(\sqrt{\xi_1} + a)(\sqrt{\xi_2} + a)}$, $Y = \frac{(\sqrt{\xi_1} - b)(\sqrt{\xi_2} - b)}{(\sqrt{\xi_1} + b)(\sqrt{\xi_2} + b)}$ ramène le système (52) à la forme: $du = \frac{dX}{X}$, $dv = \frac{dY}{Y}$. Le raisonnement de M. Picard revient à *admettre* que (un couple de résidus de I, J étant $+1$ et 0) la valeur $X = 0$ est un point non essentiel pour les fonctions uniformes x, y, z de X, Y, et à *démontrer* qu'il en va de même pour $X = \infty$. Or la discussion qui fait l'objet des nos 25—31 n'a d'autre but que d'établir le fait admis ici.

Tout d'abord, la discussion de la courbe polaire non logarithmique (telle qu'elle est exposée aux pages 112—113) prête à la même objection que je viens de mettre en évidence pour une courbe logarithmique. Mais de plus cette discussion repose essentiellement sur le lemme suivant qu'énonce tout d'abord M. Picard (p. 110 et 112): »Quand les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont uniformes (sans toutefois être algébriques), toute courbe polaire non logarithmique laisse finie une combinaison linéaire de u, v.» Or dans l'exemple (54), où $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont *méromorphes*, aucune combinaison linéaire de u, v ne reste finie pour $x = 0$. Pour démontrer ce lemme, il est nécessaire de s'appuyer sur le fait que les constantes (x_0, y_0, z_0) figurent *rationnellement* dans $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, et cette démonstration me paraît exiger une discussion entièrement identique à celle des n^os 22—24.

En définitive, — et sans insister sur d'autres objections qui compliqueraient encore le raisonnement — la méthode de M. Picard, si intéressante qu'elle soit en elle-même, soulève (en outre de difficultés nouvelles) les mêmes difficultés qui ont exigé plus haut la discussion des n^os 22—31, la seule partie un peu délicate de notre démonstration.

Sur le cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont uniformes sans renfermer rationnellement les constantes (x_0, y_0, z_0).

39. Il est impossible, après les considérations précédentes, de ne pas se poser ce problème:

Quand les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de deux intégrales de différentielles totales sont uniformes, quelle est la nature de ces fonctions?

Ce difficile problème se rattache évidemment à l'étude des équations différentielles à intégrale générale uniforme. Je me bornerai à énoncer ici les résultats auxquels conduit la méthode que j'ai appliquée aux équations du second ordre.[1]

Par hypothèse, les constantes x_0, y_0, z_0 figurent sous forme transcendante dans $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Mais je montre (et c'est là toute la difficulté

[1] Voir le Bulletin de la soc. math. de France (tome 28, p. 201—211) et les Acta mathematica (tome 25, p. 1—80).

de la question) qu'on *peut toujours choisir les deux constantes arbitraires de façon qu'une d'elles entre algébriquement dans* x, y, z. Il est dès lors aisé d'élucider la nature des transcendantes x, y, z de (u, v) et même de traiter ce problème plus général:

Quand les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, engendrées par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales, n'ont qu'un nombre fini de branches et dépendent algébriquement d'une des constantes d'intégration (convenablement choisies), quelle est la nature de ces fonctions?

La réponse s'énonce ainsi: *Une transformation algébrique effectuée sur x, y et une substitution linéaire effectuée sur u, v, ramènent les deux différentielles totales à une des formes:* [1]

$$\text{(I)} \qquad dv = dy,$$

ou

$$\text{(II)} \qquad dv = \frac{dy}{y},$$

ou

$$\text{(III)} \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

avec:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(IV)} \qquad du = \frac{dx}{x} + H(y)dy, \\ &\textit{ou} \\ &\text{(V)} \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}} + H(y)dy \end{aligned}\right\} (H \text{ algébrique}).$$

Les fonctions x, y de (u, v) correspondantes sont:

$$y = v, \quad \text{ou} \quad y = e^v, \quad \text{ou} \quad y = \wp(v, g_2, g_3)$$

avec:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(VI)} \qquad x = e^{u + K(v)} \\ &\text{ou} \\ &\text{(VII)} \qquad x = \wp_1(u + K(v)), \quad \wp_1(u) = \wp(u, \gamma_2, \gamma_3), \end{aligned}\right\} K(v) = -\int H[y(v)] \frac{dy}{dv} dv,$$

[1] Je suppose bien entendu qu'on écarte le cas (déjà traité) où les deux constantes, convenablement choisies, figurent algébriquement dans x, y.

Il faut que $e^{K(v)}$ (dans le cas VI), et $\wp_1[K(v)]$ (dans le cas VII) soient des fonctions de v *à un nombre fini de valeurs*. Ceci revient à dire que l'intégrale abélienne $\int H(y)dy$, [en dehors de la (ou des deux) périodes qui correspondent à la (ou aux deux) périodes de v] ne doit admettre que des périodes de la forme $\frac{2i\pi}{l}$ (dans le cas VI) et $\frac{2m\omega_1' + 2n\omega_2'}{l}$ (dans le cas VII): l, m, n sont des entiers, et $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ les périodes de $\wp_1$.

Dans le cas (VII), les fonctions x, y de (u, v) sont 4 fois périodiques et présentent des singularités essentielles à distance finie, du moment que $\int H(y)dy$ n'est pas de première espèce.[1] Les quatre couples de périodes ne satisfont pas en général à la condition de Riemann.

Dans le cas (VI), les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent n'admettre comme singularités essentielles que $u = \infty$ et $v = \infty$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que v vérifie une des équations I ou II (mais non l'équation III); il faut ensuite (et il suffit) que $\int H(y)dy$ ne devienne infini que logarithmiquement en dehors du point $y = \infty$ dans le cas I, et des points $y = 0$, $y = \infty$ dans le cas II. Quand ces conditions ne sont pas remplies, $x(u, v)$ présente des points singuliers essentiels à distance finie dans le champ des v.

Quelques applications du théorème de Weierstrass.

40. Je voudrais signaler rapidement quelques applications du théorème de Weierstrass.

Une première application est relative aux transformations birationnelles des surfaces algébriques.

Au sujet de ces transformations, M. Picard[2] a établi ce théorème qui a une importance considérable dans la théorie des surfaces algébriques:

[1] Quand $\int H(y)dy$ est de première espèce, on rentre dans le cas où les constantes figurent algébriquement dans x, y.

[2] Loc. cit. p. 65—99; voir aussi mes *Leçons de Stockholm*, p. 255—288, et les récentes recherches de MM. Castelnuovo et Enriques (Math. Annalen, 1899, et Comptes-Rendus de l'Académie des Sc. de Paris, 5 novembre 1900).

»Quand une surface algébrique S admet un faisceau continu de transformations birationnelles, ou bien elle renferme une famille de courbes de genre 0 ou 1, *ou bien elle possède deux intégrales de différentielles totales*

$$u = \int P dx + Q dy, \qquad v = \int P_1 dx + Q_1 dy,$$

telles que les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *soient uniformes et dépendent rationnellement des constantes initiales* (x_0, y_0, z_0).»

Occupons-nous seulement de *ce dernier cas:* le théorème de Weierstrass énoncé au n° 33, nous montre que la surface S est alors une surface *hyperelliptique, dégénérée ou non.*

41. Une autre application du théorème de Weierstrass se rencontre dans l'étude analytique *des équations différentielles.* J'ai montré notamment [1] qu'il joue un rôle essentiel dans la théorie des *équations du second ordre dont l'intégrale générale renferme algébriquement les deux constantes.*

Limitons-nous, pour le faire comprendre, à un beau résultat établi par M. Picard.

Soit $S\left(x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}\right) = 0$ une équation (algébrique) du second ordre, où la variable indépendante u ne figure pas explicitement. Quand l'intégrale génerale $x(u)$ de cette équation dépend *rationnellement* des constantes initiales x_0, x'_0, x''_0 [liées par la relation $S(x_0, x'_0, x''_0) = 0$], M. Picard a montré que deux cas sont possibles:

1° ou bien $x(u)$ est une fonction rationnelle soit de u, soit de e^{gu}, soit de $\wp(u, g_2, g_3)$, $\wp'(u, g_2, g_3)$, [g, g_2, g_3 constantes numériques];

2° ou bien, si on pose: $y = x'$, $z = x''$, la surface $S(x, y, z) = 0$ possède deux intégrales de différentielles totales telles qu'en égalant la première à $u + a$, la seconde à une constante b, la fonction $x(u + a, b)$ ainsi définie soit précisément l'intégrale générale de l'équation donnée.

Le théorème du n° 33 exprime dès lors que, dans le cas 2°, *la fonction $x(u)$ s'obtient en remplaçant, dans une certaine fonction hyperelliptique* (*dégénérée ou non*), *un des arguments par $u + a$ et le second par une constante b*; le cas 1° rentre, en particulier, dans ce mode de génération.

[1] *Leçons de Stockholm*, p. 351—394.

[1] Loc. cit. p. 129—142.

Plus généralement, considérons un système différentiel: $x'_u = H(x, y)$, $y'_u = K(x, y)$, où H et K sont *algébriques en x, y et indépendants de u: quand l'intégrale générale $x(u)$, $y(u)$ de ce système dépend algébriquement des deux constantes, j'ai montré*[1] *que x et y sont des combinaisons algébriques des deux fonctions obtenues en remplaçant dans deux fonctions hyperelliptiques dégénérées ou non (aux mêmes périodes) un des arguments par $(u + a)$ et l'autre par b.*

42. *Complément au théorème de* Weierstrass. Ces applications suffisent à faire comprendre l'importance du théorème de Weierstrass en dehors même de la théorie des fonctions abéliennes. Je me servirai seulement du dernier résultat énoncé pour compléter, sur un point, le théorème même de Weierstrass. Dans l'énoncé de ce théorème (n° 2), nous avons supposé que les deux fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ étaient **distinctes**. *Qu'advient-il quand il en est autrement?*

Soit donc $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ deux fonctions de u, v *dont le jacobien est nul*, et qui admettent *un théorème d'addition*. Je vais montrer que *φ et ψ sont des combinaisons algébriques des deux fonctions obtenues en remplaçant dans un couple de fonctions hyperelliptiques (aux mêmes périodes), un des arguments par $\alpha u + \beta v$, et l'autre par zéro:* les fonctions hyperelliptiques peuvent d'ailleurs être *dégénérées.*

Posons, comme au n° 5, $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$, $y = \psi(u + u_0, v + v_0)$, et $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Par hypothèse, on a: $y = F(x)$; et d'autre part, d'après le théorème d'addition, x et y s'expriment *algébriquement* à l'aide de x_0, y_0, soit:

$$x = A(x_0, y_0, u, v) \equiv A(x_0, F(x_0), u, v), \quad [A \text{ algébrique en } x_0, y_0]. \tag{55}$$

De cette équation, on tire aussitôt:[2]

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u_0}}{\frac{\partial x}{\partial v_0}} = \frac{\left[\frac{\partial A}{\partial x_0} + \frac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)\right]\frac{\partial x_0}{\partial u_0}}{\left[\frac{\partial A}{\partial x_0} + \frac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)\right]\frac{\partial x_0}{\partial v_0}} = \frac{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial v_0}},$$

[1] *Leçons de Stockholm*, p. 351—360.

[2] Il est loisible d'admettre qu'une des expressions $\frac{\partial A}{\partial x_0} + \frac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)$, $\frac{\partial B}{\partial x_0} + \frac{\partial B}{\partial y_0} F'(x_0)$, n'est pas identiquement nul, (soit la première); sinon, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ seraient nuls, et x, y seraient des constantes.

le rapport $\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}}$ est donc indépendent de u, v; autrement dit, $\varphi(u, v)$ vérifie l'équation: $\beta\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ $(\alpha, \beta$ numériques); *$\varphi(u, v)$ est donc une simple fonction de $\alpha u + \beta v$*; il en est de même par suite de $\psi(u, v) = F(\varphi)$. Il est loisible, en remplaçant u par $\alpha u + \beta v$, de supposer $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Ceci posé, reprenons les égalités:

$$x = \varphi(u + u_0) = A(x_0, y_0, u), \qquad y = \psi(u + u_0) = B(x_0, y_0, u),$$

et éliminons x_0, y_0 entre les équations: $x = A$, $y = B$, $x'_u = \frac{\partial A}{\partial u}$, $y'_u = \frac{\partial B}{\partial u}$; il vient:

$$(56) \qquad \frac{dx}{du} = H(x, y, u), \quad \frac{dy}{du} = K(x, y, u) \quad (H, K \text{ algébriques en } x, y),$$

Les fonctions $x = \varphi(u + u_0)$, $y = \psi(u + u_0)$ vérifient, en particulier, ce système; il existe donc au moins un couple de fonctions $\chi(x)$, $\tau(y)$ tel que les solutions du système différentiel:

$$du = \chi(x)dx = \tau(y)dy$$

appartiennent au système (56). Si les fonctions $\chi(x)$, $\tau(y)$ qui jouissent de cette propriété dépendent au moins d'une constante arbitraire, u ne figure pas dans H, K; si non, χ et τ se déduisent *algébriquement* du système (56) et sont, par suite, algébriques respectivement en x, y. Dans le premier cas, le théorème qui termine le n° 41 s'applique au système (56); dans le second cas, $x(u)$ est une fonction algébrique de $\wp(u, g_2, g_3)$ ou de e^{gu} ou de u, et de même y est une fonction algébrique de $\wp_1(u, \gamma_2, \gamma_3)$, ou de $e^{\gamma u}$ ou de u. Dans l'un et l'autre cas, *x et y sont des combinaisons algébriques de deux fonctions obtenues en remplaçant, dans un couple (dégénéré ou non) de fonctions hyperelliptiques, un des arguments par u et l'autre par* 0. C. Q. F. D.

Extension aux fonctions de n variables.

43. Le théorème de Weierstrass se démontre pour les fonctions de n variables par une méthode absolument identique à celle que nous

avons développée plus haut. Toute la difficulté revient à démontrer ce théorème:

Si n intégrales distinctes[1] *de différentielles totales, soit*

$$u_j = \int P_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})dx_1 + Q_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})dx_2 + \ldots$$
$$+ T_j(x_1, \ldots, x_{n+1})dx_n,$$

attachées à la surface algébrique [à $(n+1)$ dimensions] $S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, *engendrent par leur inversion des fonctions uniformes* $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_{n+1}(u_1, \ldots, u_n)$, *qui renferment rationnellement les constantes* $x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0$, *ces fonctions forment un système (dégénéré ou non) de fonctions abéliennes aux mêmes périodes.*

Le théorème est démontré pour $n = 1$ et $n = 2$. On admet qu'il est vrai pour $n - 1$ et on l'établit pour n. A cet effet, on s'appuie sur un lemme entièrement analogue au lemme A du n° 20, et la discussion d'une multiplicité polaire (logarithmique ou non), soit $x_1 = 0$, des intégrales u_j, conduite comme aux n^{os} 22—32, montre que, moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur les u, les fonctions $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont toutes rationnelles soit en u_1, soit en e^{u_1}; dès lors, en raisonnant comme aux n^{os} 12—19, on est aussitôt ramené au cas de $(n-1)$ variables.

Paris, le 15 février 1902.

---

[1] J'entends par là que les n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ sont *distinctes*, autrement dit que le déterminant $\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & \ldots & T_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_n & Q_n & \ldots & T_n \end{vmatrix}$ n'est pas identiquement nul.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

PAR

R. LIOUVILLE
À PARIS.

Abel a consacré quelques pages (Oeuvres, tome 2, n° 5), à l'étude des cas dans lesquels on sait intégrer l'équation suivante,

$$(y+s)\frac{dy}{dx}+p+qy+ry^2=0, \tag{1}$$

où p, q, r, s désignent des fonctions de x.

Ce type d'équations différentielles, le plus simple de tous ceux du premier ordre, après celui de Riccati, présente, pour cette raison, un véritable intérêt et, depuis les travaux d'Abel, il a été, à plusieurs reprises et sous des formes diverses, l'objet d'assez nombreuses recherches.

On peut, en ce qui le concerne, se placer à deux points de vue bien différents et presque opposés, selon que l'on s'attache à reconnaitre s'il existe une intégrale, dépendant de y d'une façon indiquée, par exemple algébrique, ou bien à trouver les caractères essentiels de la relation établie, d'après la nature même de l'équation proposée, entre l'inconnue y et la constante arbitraire qui s'y trouve impliquée, abstraction faite d'ailleurs du choix adopté pour la variable x.

Voici comment on peut concevoir ce qu'il y a d'essentiel dans une relation de cette espèce: il est clair que, si la formule

$$y=f(x, c), \tag{1}$$

définit, quel que soit c, une solution de l'équation (1), il est permis de substituer à ce paramètre une fonction $\varphi(c)$, quelconque, ne renfermant pas x; après cette substitution, l'inconnue, y, conserve certaines propriétés

inaltérées, parce que c'est en fait une fonction de deux variables; ces propriétés doivent être regardées comme des caractères propres au type d'équations différentielles qu'on étudie; ils sont visiblement liés à la nature de ses invariants, mais, pour découvrir cette liaison si cachée, les moyens dont on dispose ne possèdent jusqu'à présent aucune généralité. Tout se réduit donc encore à la discussion de quelques cas particuliers, les plus nombreux et variés que l'on sache construire, afin de préparer des vues plus étendues sur la question.

C'est ainsi que, dans le Mémoire cité, Abel déduit d'hypothèses diverses, relatives au multiplicateur, des cas d'intégration, qui semblent même d'abord former une suite indéfinie. J'aurai l'occasion de donner un peu plus de précision à ces résultats.

D'autres, dépendant d'une analyse toute différente, ont été signalés dans des travaux plus récents ou le seront dans cet article.

Je m'attacherai surtout à faire ressortir ce qui est spécial au type d'équations différentielles dont il s'agit.

Enfin, j'aurai quelques remarques à présenter au sujet d'une de ces équations, dont l'intégrale n'est pas connue et ne peut être algébrique, bien que l'on en sache trouver une propriété simple et entièrement explicite.

§ 1. *Invariants et forme canonique.*

Au sujet de l'équation générale (1), Abel démontre d'abord qu'elle peut être réduite à la suivante

$$\frac{zdz}{dx} + p + qz = 0, \tag{2}$$

ou à celle-ci

$$(p + qz)\frac{dz}{dx} + z = 0, \tag{2'}$$

p et q étant des fonctions de la seule variable x. Dans ce qui va suivre, nous adopterons une forme un peu différente. Si l'on établit entre l'inconnue définie par l'équation (1), et une autre inconnue, z, cette relation

$$y + s = \frac{1}{z}, \tag{3}$$

on reconnait sans peine que la fonction z est déterminée par une équation de cette espèce,

$$\frac{dz}{dx} + a_1 z^3 + 3a_2 z^2 + 3a_3 z + a_4 = 0, \tag{4}$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_4$ ne dépendent que de x; c'est à cette forme que nous nous arrêterons d'ordinaire, mais il va de soi que cette manière de représenter les équations différentielles dont il s'agit n'est d'aucune importance.

Le type (4) se conserve 1° quand on change la variable d'une façon arbitraire, la nouvelle, x_1, étant liée à l'ancienne par la relation

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x);$$

2° lorsqu'on remplace l'inconnue, z, par une autre, z_1, qui lui est liée par la formule,

$$z = z_1\varphi + \psi \tag{2}$$

φ et ψ étant des fonctions quelconques de x. J'ai montré déjà (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 6 septembre 1886), que, pendant ces transformations, l'expression

$$s_3 = a_2 a_1' - a_1 a_2' + a_1^2 a_4 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3 \tag{6}$$

est un invariant relatif, *de poids* 3, c'est à dire se reproduit, multipliée par $\left(\frac{\varphi}{f}\right)^3$ et ne contient pas ψ; en outre, si s_{2m-1} représente un invariant, de poids $2m - 1$, il en existe un autre, donné par l'expression

$$s_{2m+1} = a_1 s_{2m-1}' - (2m - 1)[a_1' + 3(a_2^2 - a_1 a_3)]s_{2m-1}. \tag{7}$$

Celui-ci est de poids $2m + 1$ et il est clair que les relations (6) et (7) permettent de construire des invariants absolus, en nombre aussi grand que l'on veut et de définir ainsi les caractères essentiels de chaque équation analogue à (4), par une relation entre deux de ces invariants, (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 12 septembre 1887).

En reprenant ces recherches pour l'équation (4) et les étendant à d'autres types moins particuliers, M^r Appell adoptait le même point de vue dans son Mémoire *Sur les invariants de quelques équations différentielles*,

(Journal de Mathématiques, tome 5, 1889). Il donnait alors le moyen de réduire l'équation proposée à la forme canonique,

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J(X), \tag{8}$$

dont le seul coefficient variable, J, est un invariant absolu.

Toutefois ce n'est point ce que j'ai appelé un *invariant proprement dit*, je veux dire qu'il ne se déduit pas de $a_1, a_2, \ldots, a_4$ par de simples opérations algébriques et différentielles; il exige au contraire une quadrature. Par suite, quand les coefficients de l'équation proposée, (4), sont des fonctions algébriques de x, sa représentante, (8), ne jouit pas, en général, de cette propriété. C'est pour éviter cet inconvénient que nous emploierons une autre équation canonique; voici comment on y parvient.

Soit $t = s_5^3 s_3^{-5}$, un invariant absolu, qui sera pris pour la nouvelle variable et soit z_1, une inconnue liée à z par la relation

$$z = \frac{s_3^2 z_1}{a_1 s_5} - \frac{a_2}{a_1}; \tag{9}$$

Un calcul des plus simples donne, pour l'équation différentielle transformée de (4), la suivante,

$$\frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{T}\left(z_1^3 + \frac{1-T}{3t} z_1 + \frac{1}{t}\right) = 0, \tag{10}$$

dans laquelle,

$$T = \frac{3 s_3 s_7 - 5 s_5^2}{s_5^2}, \tag{11}$$

est un invariant absolu. L'équation (10) est canonique, puisque ses coefficients sont des invariants absolus et il est clair qu'entre T et t il existe une relation, caractéristique pour chaque équation différentielle du type (4). A ce théorème, qui apparait d'abord sur l'équation (10), équivaut celui que M[r] Appell a démontré dans son Mémoire déjà cité.

Il y a des cas où la forme (10) ne peut être adoptée; il se présentent si $t = 0$, $t = \infty$ ou $T = 0$. Dans la dernière hypothèse,

$$3 s_3 s_7 = 5 s_5^2 \tag{12}$$

et, d'après l'identité (7), ceci signifie que

$$(13) \qquad \frac{3s_5'}{s_5} = \frac{5s_3'}{s_3},$$

c'est à dire $t =$ Constante; quant aux premières hypothèses ($t = 0$, $t = \infty$), elles sont des cas particuliers de la précédente. J'ai montré ailleurs (C. R de l'Ac. des Sc., 6 sept. 1886), comment alors l'équation (4) doit être traitée; la propriété essentielle de son intégrale s'exprime, si l'on veut, de cette manière curieuse.

Si l'on introduit une inconnue nouvelle, Y, ainsi définie,

$$(14) \qquad z = \frac{dY}{dx}\varphi(x),$$

après un choix convenable de φ, il y a entre Y et x, une équation de cette espèce

$$(15) \qquad c_1 f_1(x, Y) + c_2 f_2(x, Y) + c_3 f_3(x, Y) = 0;$$

c_1, c_2, c_3 sont des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans f_1, f_2, f_3 et, par suite, figurent toutes trois, au premier degré seulement, dans l'intégrale, (loc. cit., 6 sept. 1886).

J'indiquerai, à la fin de ce Mémoire, § 4, toute une série de cas présentant une grande analogie avec celui qui vient d'être indiqué.

§ 2. *Cas d'intégration.*

Les exemples traités par Abel sont tous obtenus par une étude du multiplicateur. On suppose que l'équation différentielle,

$$(16) \qquad zz' + p + qz = 0,$$

admette un multiplicateur, μ, dont le logarithme soit une fonction entière de z, les coefficients de cette dernière pouvant d'ailleurs renfermer x. Les conditions auxquelles cette fonction se trouve ainsi assujettie, quel que soit son degré, sont calculées sans peine et l'on semble posséder par ce moyen une série indéfinie de cas d'intégration. En fait, c'est pour le second degré seulement que la forme explicite de l'équation (16) a été in-

diquée par Abel. En prenant $q = 1$, chose permise si la variable indépendante est choisie comme il convient et posant $z = \frac{1}{y}$, on trouve que l'équation (16) équivaut alors à la suivante,

$$y' + \frac{y^3}{x} + 3y^2 = 0. \tag{17}$$

Ses invariants t et T s'expriment ainsi,

$$t = \frac{(1 - 3x^2 - 18x^4)^3}{x^2(x^2 - 2)^5}, \qquad P = \frac{4(x^3 - 2)(270x^6 - 45x^4 - 24x^2 + 1)}{(1 - 3x^2 - 18x^4)^2} - 5 \tag{18}$$

et sont liés par une relation qui caractérise l'équation (17); la courbe, dont t et T sont les coordonnées cartésiennes, sera dite *attachée* à l'équation différentielle proposée; on voit qu'elle est unicursale et du degré 10.

Quand $\log \mu$ est un polynôme cubique en z, soit

$$\alpha + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3, \tag{19}$$

$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_3$, sont définies par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_3}{dx} = 0, \qquad \frac{d\alpha_2}{dx} + 3\alpha_3 = 0, \qquad \frac{d\alpha_1}{dx} + 2\alpha_2 - 3p\alpha_3 = 0, \\ \qquad\qquad \frac{d\alpha}{dx} + \alpha_1 - 2p\alpha_2 = 0, \end{array} \right. \tag{20}$$

où j'ai fait $q = -1$. On en déduit

$$p' + 6kxp^2 + 3kp^3 = 0, \tag{21}$$

la constante k étant arbitraire et l'équation (16) est ainsi donnée d'une façon explicite, si l'on sait obtenir p.

J'ai donné ailleurs le moyen d'y parvenir (C. R. de l'Ac. des Sc., 12 sept. 1887). Soit en effet, $Y' = p$: Y est déterminée par l'équation suivante

$$\frac{d^2x}{dY^2} - 6k\frac{x\,dx}{dY} - 3k = 0, \tag{22}$$

dérivée d'une équation de Riccati fort simple,

$$\frac{dx}{dY} - 3kx^2 - 3kY - 3h = 0. \tag{23}$$

Celle-ci se ramène à l'équation linéaire

$$\frac{d^2u}{dY^2} + qku(kY + h) = 0, \tag{24}$$

dont les solutions s'expriment, comme il est bien connu, par des intégrales définies.

L'équation d'Abel peut alors être représentée ainsi qu'il suit

$$\frac{dy}{dY} - \frac{1}{\left(\frac{du}{dY}\right)} \cdot y^3 + \frac{1}{3ku^2}\left[\left(\frac{du}{dY}\right)^2 - u\frac{d^2u}{dY^2}\right]\frac{1}{\left(\frac{du}{dY}\right)} \cdot y^2 = 0, \tag{25}$$

avec la relation (24) pour déterminer u et la courbe qui lui est *attachée* est manifestement transcendante.

Quant à l'équation auxiliaire (21), ses invariants t et T sont des fonctions rationnelles de k^2x^3; il est facile de les calculer et la courbe attachée est unicursale et du degré 8.

Si l'on voulait poursuivre ces recherches, il faudrait d'abord imaginer que $\log \mu$ est un polynôme du 4° degré en z; on trouverait alors, pour définir p, une équation différentielle, du second ordre, non linéaire et bien plus compliquée que l'équation (16). On ne peut donc obtenir explicitement aucune des équations du type (16), auxquelles appartient un multiplicateur de la nature indiquée. Les cas suivants sont plus complexes encore, en sorte que les équations différentielles (17) et (25) doivent être regardées comme représentant toutes celles qu'il est possible d'étudier dans la série indiquée.

Les autres hypothèses, faites par Abel au sujet du multiplicateur, lui donnent encore deux cas d'intégration; ils correspondent à ces équations,

$$y' - \frac{4y^2}{3} - \frac{4y^3(x^2+1)^2}{9x^3} = 0, \qquad y' - \frac{4y^2}{3} - \frac{4y^3}{9x^3}\left[(x^2+1)^2 - cx^4\right], \tag{26}$$

dans lesquelles c désigne une constante arbitraire. Leurs invariants s'expriment par des fonctions rationnelles de x et le degré de la courbe attachée, toujours algébrique et unicursale, est assez élevé.

J'ajoute un cas analogue à celui de l'équation (21). Considérons l'équation différentielle

$$y' + (3mx^2 + 4m^2x + m_1)y^3 + 3xy^2 = 0, \tag{27}$$

dans laquelle m et m_1 sont des constantes à volonté. Si l'on introduit une inconnue nouvelle, Y, en posant

$$\frac{dY}{dx} = y,$$

on change l'équation précédente en une autre, du second ordre, qui peut ainsi s'écrire

$$(28) \qquad \frac{d^2x}{dY^2} - 3x\frac{dx}{dY} - (3mx^2 + 4m^2x + m_1) = 0;$$

or elle est visiblement identique à celle-ci,

$$(29) \qquad \frac{d}{dY}\left[\frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx\right] + 2m\left[\frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx\right] - m_1 = 0,$$

dont l'intégration s'aperçoit d'abord: elle est donnée par la formule,

$$(30) \qquad \frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx = \frac{m_1 + e^{-mY}}{2m};$$

la transformation

$$x = -\frac{2}{3}\frac{d\log u}{dY}, \qquad e^{-mY} = v$$

change l'équation précédente en une autre, linéaire et du second ordre,

$$(11) \qquad v^2\frac{d^2u}{dv^2} + 3v\frac{du}{dv} + \frac{3u}{2m^3}(v + m_1) = 0,$$

d'étude facile, qui définit des transcendantes spéciales.

A l'équation différentielle (27) est attachée une courbe unicursale, du degré 25.

Dans son Mémoire déjà rappelé, Mr Appell a signalé un nouveau mode d'intégration; le procédé employé par Mr Appell consistait à permuter la variable et l'inconnue dans une équation différentielle du type (1′) et à la ramener ensuite à la forme (4), adoptée dans ce travail, à l'aide de la substitution (3). Quand la permutation indiquée est faite dans une équation du type (21), par exemple, l'intégration est immédiate et c'est ainsi que se trouve résolue l'équation différentielle,

$$(32) \qquad \frac{dy}{dx} - y^3 - \frac{3y^2}{x^2} = 0,$$

à laquelle est attachée une courbe unicursale du 10e degré.

Enfin, dans deux communications à l'Académie des Sciences, Halphen a étudié l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1) - 4x}{x(8y-1)} \tag{33}$$

et montré comment elle s'intègre, soit à l'aide des fonctions elliptiques, soit même sous forme algébrique. Les rapports de cette équation avec la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques et l'élégante discussion d'Halphen lui donnent un intérêt tout particulier. Ce sont ces rapports même qui fournissent les éléments nécessaires à son étude. Il est facile de lui donner la forme (4), en posant

$$4x - 3y(y+1) = \frac{1}{z}, \tag{34}$$

ce qui implique

$$\frac{dz}{dy} - 3y(y+1)(8y-1)z^3 - 2(7y+1)z^2 = 0. \tag{35}$$

La courbe attachée est unicursale, du degré 25.

Une importante propriété de l'équation d'Halphen consiste en ceci, c'est qu'elle se change en elle-même par une infinité de substitutions rationnelles.

A ce point de vue, on en peut rapprocher une équation que j'ai signalée ailleurs et qui mérite, semble-t-il, une étude plus complète; le paragraphe suivant lui est consacré.

§ 3. *Examen d'une équation particulière, admettant une transformation rationnelle en elle-même, mais aucune intégrale algébrique.*

L'équation dont je veux parler est la suivante, où n_1, n_2, sont des paramètres arbitraires,

$$\frac{dy}{dx} + 2y^3(n_1^2x^3 - n_2^2x) + 3n_2y^2 = 0. \tag{36}$$

Si l'on introduit une inconnue nouvelle, Y, d'après l'équation $\frac{dY}{dx} = y$, elle devient celle-ci,

$$\frac{d^2x}{dY^2} - 3n_2\frac{dx}{dY} - 2(n_1^2x^3 - n_2^2x) = 0, \tag{37}$$

du second ordre et d'une catégorie pour laquelle a été indiquée une transformation spéciale, (*Sur les invariants de certaines équations différentielles*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 59 cahier, 1890). Soit en effet, x_1, une variable nouvelle ainsi définie,

$$\frac{dx}{dY} + n_1x^2 - n_2x = 2n_1x_1^2; \tag{38}$$

on trouve d'abord

$$\frac{dx_1}{dY} = (n_1x + n_2)x_1, \tag{39}$$

et, comme conséquence,

$$\frac{d^2x_1}{dY^2} - 3n_2\frac{dx_1}{dY} - 2(n_1^2x_1^3 - n_2^2x_1) = 0. \tag{40}$$

Ayant donc pris $\frac{dx_1}{dY} = \frac{1}{y_1}$, on en conclura

$$\frac{dy_1}{dx_1} + 2y_1^3(n_1^2x_1^3 - n_2^2x_1) + 3n_2y_1^2 = 0, \tag{41}$$

ce qui est, sauf les notations, l'équation proposée elle-même. On en déduit ce théorème:

L'équation

$$\frac{dy}{dx} + 2y^3(n_1^2x^3 - n_2^2x) + 3n_2y^2 = 0$$

se change en elle-même par la transformation,

$$\frac{1}{y} + n_1x^2 - n_2x = 2n_1x_1^2, \qquad \frac{1}{x_1y_1} = n_1x + n_2, \tag{42}$$

qui détermine, pour x et y, des fonctions rationnelles de $x_1, y_1, \ldots$.

Cette propriété engage à rechercher si l'équation (36), dont la solution n'est pas jusqu'à présent connue, admet une intégrale algébrique. C'est ce point que je vais maintenant étudier.

Il est clair d'abord qu'une telle intégrale, si elle existe, peut être regardée comme rationnelle en x et y. J'omets les preuves de cette proposition, car elles dépendent de principes qui sont bien connus.

Soit donc

$$\frac{R}{S} = \text{constante}, \tag{43}$$

cette intégrale, R et S étant des polynômes entiers en x et y. L'équation différentielle, à laquelle elle satisfait, possède une homogénéité particulière: lorsqu'on y remplace y par ky, x par $k^{-1}x$, n_1 par $n_1 k$, sans toucher à n_2, elle demeure inaltérée. Il est alors manifeste que R et S peuvent être choisis de manière à présenter la même homogénéité. J'écrirai, pour abréger,

$$2n_1^2 = -\mu$$

et, d'après ce qui précède, R et S peuvent être développés selon les puissances entières et positives de μ, de cette manière

$$R = R_0 + R_1\mu + \ldots, \qquad S = S_0 + S_1\mu + \ldots; \tag{44}$$

$R_0, \ldots, S_1, \ldots$ sont encore des polynômes entiers en x et y. Pour déterminer les premiers termes de ces développements, je remplace μ par zéro dans l'équation (36), qui devient ainsi la suivante

$$\frac{dy}{dx} - 2n_2^2 xy^3 + 3n_2 y^2 = 0. \tag{45}$$

Celle-ci s'intègre sans peine; il suffit de poser

$$n_2 xy = z \tag{46}$$

et l'on trouve ainsi

$$\frac{x(2z-1)^2}{z(z-1)} = \text{constante } C. \tag{47}$$

Par suite $\frac{R_0}{S_0}$ dépend uniquement de l'expression

$$\frac{x(2z-1)^2}{z(z-1)},$$

homogène et de degré égal à 1; ce doit en être une simple puissance,

puisque $\frac{R_0}{S_0}$ doit être, nous l'avons vu, rationnelle en x et z et homogène. Ainsi

$$(48) \qquad \frac{R_0}{S_0} = \frac{x^N(2z-1)^{2N}}{z^N(z-1)^N},$$

N étant un nombre entier, qu'on peut toujours supposer positif. Mais R_0, S_0, sont des polynômes entiers en x et y, de sorte que

$$(49) \qquad R_0 = x^N(2z-1)^{2N}, \qquad S_0 = z^N(z-1).$$

Comme $R=0$ doit donner une solution particulière de l'équation (36),

$$(36') \qquad \frac{dy}{dx} - y^3(\mu x^3 + 2n_2^2 x) + 3n_2 y^2 = 0,$$

une identité semblable à celle-ci,

$$(50) \qquad \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}[y^3(\mu x^3 + 2n_2^2 x) - 3n_2 y^2] = \lambda R,$$

est vérifiée, λ et R représentant des polynômes entiers en μ. Le premier membre de cette équation est, à l'égard de μ, de degré plus élevé que le second, d'une unité et l'on en conclut que le développement

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mu + \ldots$$

se réduit à ses deux premiers termes, c'est à dire à $\lambda_0 + \lambda_1\mu$; de plus, R est homogène et du degré N; les deux membres de l'équation (50) sont aussi homogènes et du degré $N+1$; il en résulte que λ lui-même est homogène et du premier degré. Comme d'ailleurs

$$(51) \qquad \frac{\partial R_0}{\partial x} + \frac{\partial R_0}{\partial x}[2n_2^2 xy^3 - 3n_2 y^2] = \lambda_0 R_0, \quad \text{avec} \quad R_0 = x^N(2z-1)^{2N},$$

on en déduit

$$(52) \qquad \lambda_0 = \frac{N(2z-1)^2}{x}.$$

Un calcul semblable, fait au moyen de S_0, ne fait que confirmer cette expression.

Quant à l'équation différentielle proposée, en y introduisant z à la place de y, elle devient

$$(53) \qquad \frac{xdz}{dx} - z^3\left[2 + \frac{\mu x^2}{n_2^2}\right] + 3z^2 - z = 0.$$

D'après cela, voici l'équation satisfaite par un terme S_n quelconque, du développement de S,

$$(54) \qquad \frac{\partial S_n}{\partial x} + \frac{z(z-1)(2z-1)}{x}\frac{\partial S_n}{\partial z} + \frac{z^3 x}{n_2^2}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial z} = \lambda_0 S_n + \lambda_1 S_{n-1}.$$

De plus, à cause de l'homogénéité,

$$(55) \qquad S_n = x^{2n}.\sigma_n, \qquad \lambda_1 = A_1 x$$

et A_1, σ_n ne dépendent plus que de z. Ainsi donc

$$(56) \quad z(z-1)(2z-1)\frac{\partial\sigma_n}{\partial z} - [N(2z-1)^2 - 2n]\sigma_n - A_1\sigma_{n-1} + \frac{z^3}{n_2^2}\frac{\partial\sigma_{n-1}}{\partial z} = 0.$$

Si S_{n-1} est le dernier terme de S, σ_n est nulle et il reste

$$(57) \qquad \frac{\partial\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1}\partial z} - \frac{n_2^2 A_1}{z^3} \quad 0.$$

Or σ_{n-1} est une fonction entière de z et, comme $\frac{z^3\partial\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1}\partial z}$, d'après l'égalité précédente, est encore un polynôme, il ne peut y avoir, dans σ_{n-1}, aucun autre facteur que z lui-même. Soit donc $\sigma_{n-1} = \alpha_{n-1}z^{n'}$, α_{n-1} étant une certaine constante et n', un nombre entier positif; nous en devrons conclure

$$(58) \qquad A_1 = \frac{n'z^2}{n_2^2}.$$

Voici maintenant l'équation différentielle satisfaite par R_1,

$$(59) \qquad \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{z(z-1)(2z-1)}{x}\frac{\partial R_1}{dz} + \frac{xz^3}{n_2^2}\frac{\partial R_0}{\partial z} = \lambda_0 R_1 + \lambda_1 R_0.$$

Le degré d'homogénéité de R_1 étant $-(N+2)$, je puis le représenter ainsi,

$$(60) \qquad R_1 = \rho_1 x^{N+2},$$

ρ_1 ne dépendant que de z. Cette dernière fonction satisfait à l'équation suivante

$$(61) \qquad z(z-1)(2z-1)\frac{\partial \rho_1}{\partial z} - \rho_1[N(2z-1)^2 - (N+2)] = A_1(2z-1)^{2N} - \frac{4Nz^3}{n_2^2}(2z-1)^{2N-1},$$

dont tous les termes sont divisibles par $2z-1$, excepté le produit $(N+2)\rho_1$, au premier membre.

Il faut donc admettre que ρ_1 est divisible par une certaine puissance de $2z-1$; soit

$$\rho_1 = \rho_{1.1}(2z-1)^{\alpha_1},$$

α_1 désignant un nombre entier positif. L'équation (61) devient ainsi

$$(62) \quad z(z-1)(2z-1)^{\alpha_1+1}\frac{\partial \rho_{1.1}}{\partial z} + (2z-1)^{\alpha_1}\rho_{1.1}[2\alpha_1 z(z-1) - N(2z-1)^2 + N + 2] = (2z-1)^{2N-1}\left[(2z-1)A_1 - \frac{4Nz^3}{n_2^2}\right].$$

Cela étant, si α_1 était supérieur à $2N-1$, tout serait, dans l'identité divisible par $(2z-1)^{2N-1}$ et, la division faite, $2z-1$ resterait en facteur dans tous les termes du premier membre; il n'en pourrait être ainsi pour le second. Si α_1 était inférieur à $2N-1$, après division des deux membres par $(2z-1)^{\alpha_1}$, il faudrait conclure que

$$\rho_{1.1}[2\alpha_1 z(z-1) - N(2z-1)^2 + N + 2]$$

est encore divisible par $2z-1$, ce qui est impossible, puisque $2z-1$ ne divise plus $\rho_{1.1}$ et, pour $\alpha_1 < 2N-1$, ne peut non plus diviser le trinôme entre parenthèses. La conséquence est

$$\alpha_1 = 2N-1,$$

ce qui change l'équation (62) en celle-ci,

$$(63) \qquad z(z-1)(2z-1)\frac{\partial \rho_{1.1}}{\partial z} - 2\rho_{1.1}(z^2 - z - 1) = (2z-1)A_1 - \frac{4Nz^3}{n_2^2}.$$

On en déduit

$$(64) \qquad \rho_{1.1} = \frac{H(2z-1)^3}{z^2(z-1)^2},$$

avec

$$(65)\qquad H = \int \frac{z(z-1)A_1\,dz}{(2z-1)^5} - \frac{4N}{n_2^2}\int \frac{z^4(z-1)\,dz}{(2z-1)^6}.$$

Soit, pour un instant

$$z = z' + \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$(66)\qquad H = \int \frac{z'^2 - \frac{1}{4}}{2^5 z'^5} A_1\,dz' - \frac{N}{n_2^2}\int \frac{\left(z'^2 - \frac{1}{4}\right)\left(z'^2 + \frac{1}{2}\right)^3}{2^4 . z'^6}\,dz'.$$

La première des deux intégrales qui entrent dans cette formule s'exprime encore ainsi, A_1', A_1'', ... désignant les dérivées successives de A_1,

$$\frac{1}{2^5}\left[\frac{A_1'}{48z'^3} + \frac{A_1}{16z'^4} + \int \left(A_1 - \frac{A_1''}{48}\right)\frac{dz'}{z'^3}\right].$$

Or

$$(67)\quad \int \left(A_1 - \frac{A_1''}{48}\right)\frac{dz'}{z'^3} = \left(\frac{A_1''}{48} - A_1\right)\frac{1}{2z'^2} + \left(A_1' - \frac{A_1'''}{48}\right)\frac{1}{2z'} + \frac{1}{2}\int \left(A_1'' - \frac{A_1^{\mathrm{iv}}}{48}\right)\frac{dz'}{z'}.$$

Le logarithme, s'il y en avait un dans H, proviendrait du dernier terme de l'équation précédent, où il aurait pour coefficient

$$(68)\qquad \frac{1}{2^6}\left(A_1'' - \frac{A_1^{\mathrm{iv}}}{48}\right)_{(z'=0)}$$

et de la seconde intégrale que contient H, où il entrerait multiplié par $\frac{N}{16n_2^2}$. Aucun logarithme ne pouvant subsister, tous calculs faits, dans H, il faut que

$$(69)\qquad \left(A_1'' - \frac{A_1^{\mathrm{iv}}}{48}\right)_{(z'=0)} = \frac{4N}{n_2^2}.$$

Mais, A_1 étant donné par la formule (58), $A_1^{\mathrm{iv}} = 0$, $A_1'' = \frac{2n'}{n_2^2}$, en sorte que $n' = 2N$, c'est à dire

$$(70)\qquad A_1 = \frac{2Nz^2}{n_2^2}.$$

Ceci permet de simplifier l'équation (65), qui devient

$$(71)\qquad H = -\frac{2N}{n_2^2}\int^{\bullet}_{\bullet}\frac{z^3(z-1)\,dz}{(2z-1)^6} = -\frac{N}{2^5 n_2^2}\int^{\bullet}_{\bullet}\frac{\left(z'^2-\frac{1}{4}\right)\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2 dz'}{z'^6}.$$

L'intégration en est immédiate et introduit une constante arbitraire; l'expression de H, qui en résulte, multipliée par

$$2^5 \cdot \frac{z'^5}{\left(z'^2-\frac{1}{4}\right)^2},$$

doit donner le polynôme entier, $\rho_{1.1}$. Or on reconnait sans peine que le produit de z'^5 par l'intégrale

$$\int^{\bullet}_{\bullet}\frac{\left(z'^2-\frac{1}{4}\right)\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2 dz'}{z'^6}$$

est un polynôme que ne divise pas $z'^2-\frac{1}{4}$, ce qui implique contradiction.

L'équation différentielle proposée n'admet donc aucune intégrale algébrique. La courbe qui lui est attachée est une des moins compliquées qui se soient rencontrées jusqu'ici.

Lorsqu'on y prend T et $\tau = \frac{1}{t}$ pour les coordonnées cartésiennes, c'est une cubique unicursale, définie, si l'on veut, par les équations

$$(72)\qquad \tau = -\frac{9n_2^2}{7^3}\cdot\frac{u^2}{(u+n_2^2)^3},\qquad T = \frac{31u^2+8n_2^2u-8n_2^4}{7(u+n_2^2)^2},$$

ou par celle qui en résulte, après l'élimination de u. Cette dernière est facile à construire d'après les propriétés mises en évidence par les relations (72).

L'équation $\frac{dy}{dx} + 2y^3(n_1^2x^3 - n_2^2x) + 3n_2y^2 = 0$ offre cet intérêt, c'est qu'on en connait une propriété simple, celle de n'être point altérée par les substitutions rationnelles (42); cependant son intégrale ne peut être algébrique, en sorte qu'elle définit une transcendante, vraisemblablement nouvelle.

Ses seuls points critiques correspondent aux valeurs infinies de x et aux valeurs, x_0, de cette même variable, qui rendent l'une des solutions, y, infinie. Auprès des dernières, deux solutions présentent cette singularité; leurs produits par $(x-x_0)^{\frac{1}{2}}$ sont des séries, d'abord convergentes, développées selon les puissances entières et positives de $x-x_0$.

Les formules (42), où l'on regarde x_1 et y_1 comme les variables primitives, montrent que tous les points critiques à distance finie correspondent, soit à $x_1=0$, soit à $x=-\frac{n_2}{n_1}$. Leur distribution dans le plan, pour chaque solution particulière, est ainsi rattachée par des formules commodes aux valeurs que reçoit, en un point ordinaire, une autre solution, liée à la première d'une façon connue.

On peut rapprocher du cas précédent celui d'une équation du second ordre, qui se change aussi en elle-même par des substitutions qu'on sait calculer.

Voici d'une façon précise, la proposition dont il s'agit, que je me borne à énoncer.

»L'équation différentielle

$$y''-\alpha y^3-\frac{y}{6}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}-\frac{7\alpha'^2}{\alpha^2}\right)=0,$$

quelle que soit la fonction de x désignée par α, se reproduit, si l'on remplace y par une nouvelle inconnue

$$y_1,$$

ainsi définie,

$$y'+\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}y^2+\frac{\alpha' y}{6\alpha}=y_1^2\alpha^{\frac{1}{2}}.«$$

Il est manifeste que la méthode employée dans ce paragraphe est susceptible de s'appliquer, sans modifications essentielles, à des exemples très variés.

Je l'ai employée notamment pour étudier ce qui correspond à l'une des relations les plus simples qu'on puisse établir entre T et τ, (exception faite de $T=0$, déjà traitée), je veux dire le cas défini par l'égalité

$$(73)\qquad T=a\tau$$

a désignant une constante. L'équation différentielle est alors celle-ci

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{a}\left[\frac{y^3}{x^3} + \frac{1-ax}{3x}y + \frac{1}{x}\right] = 0. \tag{74}$$

En y substituant $\frac{y}{\mu}$ et $\frac{x}{\mu}$, au lieu de x et y, on voit d'abord qu'elle peut s'écrire

$$9ax^3\frac{dy}{dx} - [3y^3 + (\mu - 3ax)xy + 3\mu^2 x] = 0; \tag{75}$$

le paramètre μ joue ici le même rôle que dans l'équation (36′) et permet une analyse toute semblable. Malgré la simplicité apparente de la relation (73), j'ai pu me convaincre ainsi qu'il n'existe pour l'équation (74) aucune intégrale algébrique. J'omets, pour abréger, les preuves de cette proposition.

Quant à la recherche des transformations telles que (42), elle est analogue à celle des intégrales algébriques, mais constitue en général un problème plus compliqué, que je ne veux point aborder dans ce travail.

§ 4. *Nouvelles intégrations. — Liens qui existent, entre les équations différentielles proposées et certains systèmes linéaires.*

L'un des cas remarqués d'abord dans l'étude de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0, \tag{76}$$

est, on l'a vu, celui qui correspond à l'hypothèse $t =$ constante, ou bien, ce qui est la même chose, $T = 0$. L'intégration résulte alors des relations que présente l'équation proposée avec un système d'équations linéaires qui lui est associé, (§ 1, in fine).

Les cas, auxquels est consacré ce paragraphe, doivent être rapprochés de celui-là, mais leur complication est beaucoup plus grande. Voici comment on y parvient:

Soit z une fonction de deux variables, x et y et, d'une façon générale

$$z^{(i,k)} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

l'une quelconque de ses dérivées partielles. Je considère trois équations linéaires, aux dérivées partielles du troisième ordre,

$$(77)\quad \begin{cases} z^{(1.2)} + p_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} p_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \\ z^{(2.1)} + p'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} p'_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \\ z^{(3.0)} + p''_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} p''_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \end{cases}$$

ayant 7 solutions communes distinctes, tous les coefficients $p_{k.i}, \ldots, p'_{k.i}, \ldots, p''_{3.0}, \ldots,$ dépendant uniquement de la variable x. Si j'établis entre cette variable et y une relation quelconque, z, $z^{(1.0)}$, $z^{(0.1)}, \ldots,$ deviennent des fonctions de x, entre lesquelles sont établies en particulier les équations suivantes,

$$(78)\quad \begin{cases} dz^{(1.0)} - z^{(2.0)}dx - z^{(1.1)}dy = 0, \qquad dz^{(0.1)} - z^{(1.1)}dx - z^{(0.2)}dy = 0, \\ d^2z^{(1.0)} - z^{(2.0)}d^2x - z^{(1.1)}d^2y + S_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} S_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \\ d^2z^{(0.1)} - z^{(1.1)}d^2x - z^{(0.2)}d^2y + R_{3.0}z^{(0.3)} + \sum\limits_{(i+k\leqq 2)} R_{k.i}z^{(i.k)} = 0, \end{cases}$$

après qu'on a posé, pour abréger,

$$(79)\quad \begin{cases} R_{3.0} = -dy^2 + 2p_{3.0}dxdy + p'_{3.0}dx^2, \qquad R_{k.i} = 2p_{k.i}dxdy + p'_{k.i}dx^2, \\ S_{3.0} = p_{3.0}dy^2 + 2p'_{3.0}dxdy + p''_{3.0}dx^2, \\ S_{k.i} = p_{k.i}dy^2 + 2p'_{k.i}dxdy + p''_{k.i}dx^2; \end{cases}$$

tant que la liaison entre x et y reste arbitraire, il n'existe, entre z, $z^{(1.0)}$, $z^{(0.1)}$ et leurs différentielles des deux premiers ordres, aucune relation qui ne contienne aussi $z^{(0.3)}$; mais le contraire est vrai pour un choix convenable de la liaison supposée entre x et y; α_1, α_2, β_1, β_2, représentant des multiplicateurs, déterminés de cette manière,

$$(80)\quad \begin{cases} \alpha_1(S_{0.2} - d^2x) + \alpha_2 R_{0.2} - \beta_1 dx = 0, \\ \alpha_1(S_{1.1} - d^2y) + \alpha_2(R_{1.1} - d^2x) - \beta_1 dy - \beta_2 dx = 0, \\ \alpha_1 S_{2.0} + \alpha_2(R_{2.0} - d^2y) - \beta_2 dy = 0, \qquad \alpha_1 S_{3.0} + \alpha_2 R_{3.0} = 0, \end{cases}$$

il est satisfait à cette équation,

$$(81)\quad \alpha_1 d^2 z^{(1.0)} + \alpha_2 d^2 z^{(0.1)} + \beta dz^{(1.0)} + \beta_2 dz^{(0.1)} + \sum_{(i+k \leqq 1)} (\alpha_2 R_{k.i} + \alpha_1 S_{k.i}) z^{(i.k)} = 0,$$

qui est bien de l'espèce demandée. Comme d'ailleurs les équations (80) sont homogènes et linéaires, il en résulte

$$(82)\quad \begin{aligned} &(R_{3.0}dy + S_{3.0}dx)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) + (R_{3.0}S_{0.2} - R_{0.2}S_{3.0})dy^2 \\ &\quad + (R_{3.0}S_{1.1} - R_{1.1}S_{3.0})dx\,dy + (R_{3.0}S_{2.0} - R_{2.0}S_{3.0})dx^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui est, pour y, une équation différentielle, du second ordre. On voit, d'après (79), qu'elle exprime $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ par une fraction rationnelle, dont le numérateur est un polynôme, du 6° degré, homogène, en dx, dy et le dénominateur, un polynôme du 3° degré.

L'équation (82) se réduit évidemment au premier ordre, si l'on écrit $\frac{dy}{dx} = \mathrm{v}$. Cette substitution faite, s'il arrive que le dénominateur divise exactement le numérateur, tous deux étant regardés comme des fonctions entières de v, cette inconnue se trouve définie par une équation du type (76). Nous allons voir comment sa signification même en fait connaître un mode d'intégration.

Et, d'abord, le système (77) s'intègre sans peine. Soient $P_{k.i}$, $P'_{k.i}$, ..., des quantités définies par les relations

$$(83)\quad \left\{ \begin{aligned} &P'_{k.i} + p_{3.0}P_{k.i} + p_{k-1.i} - p_{0.2}p'_{k.i} - p'_{1.1}p_{k.i} = 0, \\ &p_{3.0}P'_{k.i} - p'_{3.0}P_{k.i} + \frac{\partial p_{k.i}}{\partial x} + p_{k.i-1} - p'_{k-1.i} - p_{0.2}p''_{k.i} \\ &\qquad + (p'_{0.2} - p_{1.1})p'_{k.i} + (p'_{1.1} - p_{2.0})p_{k.i} = 0; \end{aligned} \right.$$

les trois équations aux dérivées partielles dont il s'agit, ayant 7 solutions communes, équivalent au système suivant d'équations différentielles totales linéaires,

$$\left\{ \begin{aligned} &dz^{(0.3)} + \Big[P'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leqq 2)} P'_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dx + \Big[P_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leqq 2)} P_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dy = 0, \\ &dz^{(2.0)} + \Big[p''_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leqq 2)} p''_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dx + \Big[p'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leqq 2)} p'_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dy = 0, \\ &dz^{(1.1)} + \Big[p'_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leqq 2)} p'_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dx + \Big[p_{3.0}z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leqq 2)} p_{k.i}z^{(i.k)}\Big]dy = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(84)\quad \begin{cases} dz^{(0.2)} + \left[z^{(0.3)}p_{3.0} + \sum_{(i+k\leqq 2)} p_{k.i}z^{(i.k)}\right]dx - z^{(0.3)}dy = 0, \\ dz^{(1.0)} - z^{(2.0)}dx - z^{(1.1)}dy = 0, \\ dz^{(0.1)} - z^{(1.1)}dx - z^{(0.2)}dy = 0, \\ dz - z^{(1.0)}dx - z^{(0.1)}dy = 0. \end{cases}$$

Imaginons que ces équations soient ajoutées, après multiplication par des facteurs, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$, où n'entre pas y. Ceux-ci peuvent être choisis de manière à vérifier l'identité,

$$(85)\quad \frac{\partial \log}{\partial y}\left[\lambda_1 z^{(0.3)} + \lambda_2 z^{(2.0)} + \lambda_3 z^{(1.1)} + \lambda_4 z^{(0.2)} + \lambda_5 z^{(1.0)} + \lambda_6 z^{(0.1)} + \lambda_7 z\right] + m = 0,$$

dans laquelle m est une constante. Il s'ensuit, à cause de (84), les identités,

$$(86)\quad \begin{cases} \lambda_1(P_{3.0} + m) + \lambda_2 p'_{3.0} + \lambda_3 p_{3.0} - \lambda_4 = 0, \ldots, \\ \lambda_1 P_{1.0} + \lambda_2 p'_{1.0} + \lambda_3 p_{1.0} + m\lambda_6 - \lambda_7 = 0, \\ \lambda_1 P_0 + \lambda_2 p'_0 + \lambda_3 p_0 + m\lambda_7 = 0, \end{cases}$$

qui font connaître, non pas les quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$, mais leurs rapports à l'une d'elles. Celle-ci même est déterminée, si l'on veut que la condition

$$(87)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1 z^{(0.3)} + \lambda_2 z^{(2.0)} + \lambda_3 z^{(1.1)} + \lambda_4 z^{(0.2)} + \lambda_5 z^{(1.0)} + \lambda_6 z^{(0.1)} + \lambda_7 z\right] = 0,$$

soit remplie; de cette dernière il résulte en effet

$$(88)\quad \frac{d\lambda_1}{dx} = \lambda_1 P'_{3.0} + \lambda_2 p''_{3.0} + \lambda_3 p'_{3.0} + \lambda_4 p_{3.0}, \ldots, \frac{d\lambda_7}{dx} = \lambda_1 P'_0 + \lambda_2 p''_0 + \lambda_3 p'_0 + \lambda_4 p_0.$$

Or le système proposé, (77), ayant sept solutions distinctes, il est clair qu'il peut être satisfait à la fois aux équations (85) et (87), en sorte que les relations, entre $P_{k.i}, \ldots, p''_{k.i}$, et leurs dérivées, déduites de cet ensemble, sont précisément celles qui assurent l'intégrabilité de ce système.

Soient

$$m^4 + m^3 P_{3.0} + m^2 P_{2.0} + mP_{1.0} + P_0 = M'',$$

$$m^3 p'_{3.0} + m^2 p'_{2.0} + mp'_{1.0} + p'_0 = M',$$

$$m^3 p_{3.0} + m^2 p_{2.0} + mp_{1.0} + p_0 = M;$$

les équations (86) ont pour conséquence celle-ci,

$$(89)\qquad \begin{vmatrix} M'' , & M' , & M \\ P_{0.2} , & p'_{0.2}+m , & p_{0.2} \\ mP_{1.1}+P_{0.1} , & mp'_{1.1}+p'_{0.1} , & m^2+mp_{1.1}+p_{0.1} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est algebrique en m et du septième degré. Le coefficient de la puissance la plus élevée de m est l'unité; tous les autres doivent être aussi des constantes, d'ailleurs arbitraires, ce qui donne sept équations; sept autres s'obtiennent d'une façon semblable, en substituant, dans les relations (86), différentiées, les expressions (88) de $\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\lambda_7}{\partial x}$. Les nouvelles constantes qui s'introduisent ont les mêmes valeurs que les précédentes et l'on a par ce moyen toutes les conditions d'intégrabilité du système (77), sous une forme qui présente des avantages particuliers.

La conclusion de cette analyse est que l'inconnue z s'exprime par une formule de cette espèce,

$$(90)\qquad z = \sum_{(1\leq i\leq 7)} c_i\zeta_i(x)e^{m_i y},$$

$m_1, m_2, \ldots$ étant les racines de l'équation (89), les ζ_i des fonctions qu'on sait construire, et les c_i des constantes arbitraires; $z^{(1.0)}, \ldots, z^{(0.3)}$, sont données par des formules analogues, qui s'en déduisent. Je suppose maintenant que les équations (77) ne soient pas données, mais seulement l'équation différentielle (82), qui leur est associée. Celle-ci ne changerait pas, si z était multipliée par une fonction donnée quelconque, c'est un point que met en lumière sa définition même. Je puis donc faire que le déterminant, δ, des solutions du système (84) soit une constante et, comme

$$(91)\qquad d\log\delta + (P'_{3.0}+p_{2.0}+p'_{1.1}+p''_{0.2})dx + (P_{3.0}+p_{1.1}+p'_{0.2})dy = 0,$$

c'est établir les deux équations

$$(92)\qquad P'_{3.0}+p_{2.0}+p'_{1.1}+p''_{0.2} = 0, \qquad P_{3.0}+p_{1.1}+p'_{0.2} = 0;$$

elles remplacent, avec l'hypothèse d'après laquelle $d\delta$ s'évanouit, l'une des sept premiers conditions d'int'grabilité. Mais cells-ci, jointes aux deux relations précédentes, permettent de calculer $P_{3.0}$, $P'_{3.0}$, $P''_{3.0}$ et $p_{k.i}$, $p'_{k.i}$, $p''_{k.i}$, pour $i+k$ inférieur ou égal à z, étant donnés les coefficients qui figurent

dans l'équation (82), si par exemple p_0, p'_0, p''_0, sont déjà nuls, ce que je vais supposer.

Il est ainsi associé, à l'équation (82), un système linéaire (77), dont la détermination est complète. Il reste à vérifier les dernières conditions d'intégrabilité, dont le nombre est réduit à six par les hypothèses faites sur p_0, p'_0, p''_0.

Cela fait, je dis que l'équation (82) peut être intégrée sans peine. Elle implique en effet la relation (81), dans laquelle $z^{(1.0)}$, $z^{(0.1)}$ et z sont maintenant connues et représentées par des formules analogues à (90). Celle-ci constitue donc, entre x, y et ses deux premières dérivées, une équation contenant, d'une façon linéaire et homogène, sept constantes arbitraires. Elle comprend toutes les solutions de l'équation différentielle proposée et l'on peut d'abord, à l'aide de cette dernière, en éliminer $\frac{d^2y}{dx^2}$; elle reste ainsi rationnelle à l'égard de $\frac{dy}{dx}$; mais l'équation dont l'agissait est celle, du premier ordre, qui se déduit de (82) par la substitution $\frac{dy}{dx} = \mathrm{v}$. L'intégrale de celle-ci résulte des considérations précédentes. Il suffit en effet de différentier cinq fois l'équation (81) et d'en faire disparaitre les dérivées de y, d'ordre supérieur à l'unité, à l'aide de l'équation différentielle elle-même, (82). On a ainsi construit un système de six équations linéaires et homogènes entre les sept quantités $c_i e^{m_i y}$; leurs coefficients sont des fonctions de x et de v, rationnelles pour cette dernière variable et, comme l'expression

$$\left[c_i c_k^{-1} e^{(m_i - m_k)y}\right]^{m_{i'} - m_k} \left[c_{i'} c_k^{-1} e^{(m_{i'} - m_k)y}\right]^{m_k - m_i}$$

est une simple constante, il suffit d'y remplacer les facteurs $c_i e^{m_i y}$, dont les rapports seuls y figurent, par les valeurs proportionnelles, qui fait connaitre le système indiqué, pour obtenir l'intégrale cherchée. Le cas où l'une des racines m est égale à zéro ne fait pas exception et n'exige même en général aucune modification essentielle des calculs précédents.

Si les différences de trois racines m_i sont des nombres rationnels, l'intégrale obtenue est algébrique à l'égard de l'inconnue v, mais son degré est d'ordinaire fort élevé.

J'ajoute qu'il est facile de former effectivement des équations différentielles de l'espèce qui vient d'être étudiée, car il est visiblement possible

de former des systèmes, tels que (77), ayant 7 solutions communes distinctes et nous avons montré comment s'en déduit l'équation (82).

Quant à celles du type proposé,

$$(93) \qquad \frac{dv}{dx} + a_1 v^3 + 3a_2 v^2 + 3a_3 v + a_4 = 0,$$

nous les avons vues apparaître quand l'expression $R_{3.0}dy + S_{3.0}dx$ divise exactement celle-ci,

$$(94) \qquad (R_{3.0}S_{0.2} - R_{0.2}S_{3.0})dy^2 + (R_{3.0}S_{1.1} - R_{1.1}S_{3.0})dxdy + (R_{3.0}S_{2.0} - R_{2.0}S_{3.0})dx^2;$$

Mais il reste à voir comment, l'équation (93) étant donnée, on y peut rattacher une équation (82), remplissant s'il est possible les conditions déjà mentionnées.

$a_1, a_2, \ldots, a_4$ étant des fonctions connues de x, tous les coefficients $p_{k.i}, p'_{k.i}, p''_{k.i}$, dans lesquels $i + k$ est égal à 2, sont exprimés, par suite de la divisibilité supposée, au moyen de $p_{3.0}, p'_{3.0}, p''_{3.0}$. Ces derniers coefficients, en même temps, qu'une relation invariante entre $a_1, a_2, \ldots, a_4$, résultent des conditions d'intégrabilité auxquelles le système (77) est assujetti et l'équation (82) est ainsi déterminée d'une façon complète. On peut donc toujours vérifier si une équation différentielle donnée, du type (93), correspond à un système (77) intégrable et construire, lorsqu'il en est ainsi, l'expression

$$(95) \qquad R_{3.0}dy + S_{3.0}dx,$$

sorte de multiplicateur qui permet de lui donner la forme (82) et, comme conséquence, de l'intégrer.

Des considérations semblables s'appliquent, sans difficultés nouvelles, à toute une série de cas, dont le précédent est le plus simple; mais les calculs qu'ils exigent sont trop longs pour présenter une utilité véritable; leur existence est, pour la théorie des équations différentielles du type (4), le seul point qu'il importe de connaître.

S[t] Mandé, le 30 décembre 1901.

SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE SÉRIE DE TAYLOR

PAR

HELGE VON KOCH

à STOCKHOLM.

La question de trouver une expression générale pour le prolongement analytique d'une série de TAYLOR en dehors de son cercle de convergence, abordée en 1896 par M. BOREL à l'aide de sa méthode de sommation exponentielle, a fait dans les dernières années des progrès considérables[1], grâce surtout aux recherches de M. MITTAG-LEFFLER[2].

Le théorème fondamental démontré par M. MITTAG-LEFFLER, qui est le résultat le plus complet obtenu jusqu' à présent sur ce sujet, peut s'énoncer de la manière suivante.

Soit

$$\mathfrak{P}(z\,|\,a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

une série de TAYLOR convergente dans le voisinage de $z=a$; on peut former avec les coefficients c — et cela de plusieurs manières différentes — une série de polynômes $S(z)$ qui à l'intérieur de l'étoile principale A appartenant aux coefficients c[3] converge et représente la branche uniforme

[1] On trouve un exposé des principaux travaux se rapportant à ce sujet dans les livres suivants:

BOREL, *Leçons sur les séries divergentes;* Paris, Gauthier-Villars, 1901;

HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique;* Paris, C. Naud, 1901.

[2] *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène:* Acta Mathem.; t. 23, p. 43; t. 24, p. 183 et 205.

[3] Pour la définition de *l'étoile*, voir le mém. cité de M. MITTAG-LEFFLER (voir notamment Acta Math. t. 23, p. 47 ou t. 24, p. 183 et t. 24, p. 200).

Un point z est, par définition, situé à *l'intérieur* de A si le prolongement analytique de $\mathfrak{P}(z\,|\,a)$ obtenu en suivant le chemin rectiligne entre les points a et z est *holomorphe* tout le long de ce chemin.

$f(z)$ de fonction analytique définie par l'élément $\mathfrak{P}(z|a)$ et par son prolongement analytique à l'intérieur de A.

L'étoile principale étant un continuum *limité* (sauf dans le cas particulier où la série $\mathfrak{P}(z|a)$ converge pour toute valeur de l'argument) et les expressions $S(z)$ de M. Mittag-Leffler cessant, en général, de converger ou de représenter $f(z)$ sur la limite de A, on doit se proposer, pour les points appartenant à cette limite, une question analogue à celle qu'a proposé Abel (Journal de Crelle, t. 2; Oeuvres complètes, Edition Sylow-Lie, t. 1, p. 618), concernant la valeur que prend $f(z)$ en un point appartenant au cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(z|a)$.

La question que nous avons en vue peut se formuler de la manière suivante:

Quelle valeur prend la branche $f(z)$ en un point appartenant à la limite de l'étoile principale?

L'objet du présent travail est de résoudre cette question pour une partie L de cette limite qui sera définie au § 3.

Le résultat final auquel nous arrivons au § 3 peut s'énoncer ainsi:

On peut former avec les coefficients c une expression qui converge et représente $f(z)$ non seulement à l'intérieur de l'étoile principale, mais aussi en tout point de L où $f(x)$ est holomorphe.

Pour éclaircir dès maintenant cet énoncé par un exemple, considérons le cas où $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan; dans ce cas L n'est autre que la limite complète de A, et notre expression fournit la valeur de $f(z)$ *dans toute l'étendue du plan* (les pôles étant seuls exclus).

Dans le dernier paragraphe, nous montrons comment les expressions obtenues s'appliquent à la recherche des points singuliers situés dans le domaine considéré.

§ 1. *Démonstration d'une formule fondamentale.*

1. La méthode que nous allons employer repose sur la propriété suivante de la fonction exponentielle: si x et s sont des nombres réels et positifs on a

$$\lim_{s=\infty} x^s e^{-x^s} = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases}$$

selon que x est *différent* de *un* ou *égal* à *un;* plus généralement, si σ et τ désignent des polynômes en s prenant des valeurs positives dès que s est suffisamment grand, la fonction

$$E(x, s) = x^{\sigma} e^{-x^{\tau}}$$

jouit de la propriété

$$\lim_{s=\infty} E(x, s) = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases} \tag{2}$$

selon que

$$x \begin{matrix} \neq 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

et pour les dérivées de cette fonction par rapport à x on a aussi

$$\lim_{s=\infty} \frac{d^k}{dx^k} E(x, s) = 0 \qquad (k=1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

pourvu que

$$x \neq 1;$$

quant aux valeurs que prennent ces dérivées pour $x = 1$ nous n'en aurons besoin que dans un cas particulier qui sera étudié plus tard.

A côté de ces propriétés, nous aurons besoin de la remarque suivante: si s est réel et positif et que z désigne une variable complexe, on a

$$\lim_{s=\infty} z^s e^{-z^s} = 0$$

et plus généralement

$$\lim_{s=\infty} E(z, s) = 0$$

tant que

$$|z| < 1.$$

Dans tout ce qui va suivre, la lettre s désignera un nombre *entier* et *positif*. Si u est une fonction de s, le symbole

$$\lim u$$

désignera toujours la limite vers laquelle tend u quand s augmente indéfiniment en parcourant la suite des nombres entiers et positifs. Enfin,

σ et τ désigneront deux polynômes donnés en s assujettis à la seule condition d'être égaux à des nombres positifs entiers quand s est positif et entier.

2. Considérons une série de TAYLOR

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{4}$$

convergente dans le voisinage de l'origine; il existe toujours un nombre positif R tel que la fonction $f(z)$ définie dans le cercle $|z| = R$ par prolongement analytique de la série proposée, jouisse des deux propriétés suivantes:

1° $f(z)$ est *méromorphe* à l'intérieur du domaine

$$|z| < R; \tag{5}$$

2° tous les points singuliers de $f(z)$ dans ce domaine sont situés sur la partie positive de l'axe réel.

Dans certains cas, la valeur maximum qu'on peut donner à R coïncide avec la valeur du rayon de convergence de la série donnée; c'est ainsi, par exemple, de la fonction $\log(1 - z)$ qui cesse d'être uniforme dans le voisinage de $z = 1$. Dans d'autres cas, au contraire, R peut avoir des valeurs plus grandes; par exemple, si la fonction définie par la série (4) n'a d'autres singularités que des pôles situés sur la partie positive de l'axe réel, le nombre R peut être pris aussi grand que l'on veut.

Quoiqu'il en soit, il résulte des hypothèses faites que si $f(z)$ a des points singuliers à l'intérieur du cercle (5) et qu'on désigne ces points par

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

on a

$$0 < a_k < R \qquad (k = 1, 2, \dots, m)$$

et $f(z)$ peut, dans le voisinage de $z = a_k$, être représenté par une expression de la forme suivante:

$$f(z) = G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) + \mathfrak{P}_k(z - a_k),$$

$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ désignant un polynôme en $\frac{1}{x - a_k}$ et $\mathfrak{P}_k(z - a_k)$ étant une série de TAYLOR en $z - a_k$, convergente dans le voisinage de $z = a_k$.

3. Soit maintenant x un point régulier de $f(z)$ situé sur l'axe réel entre 0 et R; désignons par R_1 un nombre plus petit que R mais plus grand que x et les a_k:

$$0 \leq x < R_1 < R; \qquad 0 < a_k < R_1 < R;$$

décrivons de l'origine comme centre avec le rayon R_1 un cercle C_1 et considérons l'intégrale suivante, prise dans le sens positif le long de C_1:

$$I = \int\limits_{C_1} \frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right) dz$$

E désignant la fonction définie plus haut.

Comme on a, pour tout point z de C_1:

$$\left| E\left(\frac{x}{z}, s\right) \right| < e \cdot \left(\frac{x}{R_1}\right)^{\sigma}$$

et que

$$\lim \sigma = + \infty$$

il en résulte que

$$\lim I = 0.$$

D'autre part, comme la fonction sous le signe d'intégration est uniforme et n'admet à l'intérieur de C_1 qu'un nombre fini de points singuliers, savoir les points

$$0, x, a \qquad 1, 2$$

le théorème de CAUCHY est applicable et l'on peut écrire, en abrégé:

$$\int\limits_{C_1} = \int\limits_{(0)} + \int\limits_{(x)} + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(a_k)}$$

$(0), (x), (a_k)$ désignant des petits cercles décrits respectivement des points $0, x, a_k$ comme centres et tels que, à l'intérieur de chacun d'eux, le centre soit le seul point singulier de la fonction

$$\frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right). \tag{6}$$

Le résidu de cette fonction pour $z = x$ étant égal à $e^{-1} f(x)$ on a

$$\int\limits_{(x)} = 2\pi i \cdot e^{-1} f(x).$$

Pour calculer le résidu correspondant à un pôle quelconque $z = a_k$, désignons pour abréger ce pôle par a et remarquons q'on peut écrire, dans un certain voisinage de $z = a_k$:

$$\frac{f(z)}{z-x} = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \mathfrak{P}(z-a)$$

α étant l'ordre du pôle considéré, les A étant indépendants de z et $\mathfrak{P}$ étant holomorphe pour $z = a$. Le résidu cherché est donc égal à

$$A_1 E\left(\frac{x}{a}, s\right) + A_2 \frac{d}{da} E\left(\frac{x}{a}, s\right) + \ldots + A_\alpha \frac{1}{\underline{|\alpha - 1}} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} E\left(\frac{x}{a}, s\right)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\int\limits_{(a)} = 2\pi i \,.\, \sum_{\nu=1}^{\alpha} A_\nu \frac{1}{\underline{|\nu - 1}} \frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}} E\left(\frac{x}{a}, s\right).$$

Or comme $\frac{x}{a}$ peut être, selon les cas, soit inférieur à 1, soit supérieur à 1 mais n'est égal à 1 pour aucun des pôles a, il résulte de ce qui a été dit plus haut concernant la fonction E et ses dérivées, que l'expression obtenue tend vers *zéro* quand s croît indéfiniment. Nous avons donc:

$$\lim_{s=\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{(a_k)} = 0.$$

Il reste à considérer l'intégrale $\int\limits_{(0)}$. En convenant de désigner généralement par $[F(z)]z^{-1}$ le coefficient de z^{-1} dans le développement d'une fonction F en série de Laurent dans le voisinage de $z = 0$, nous avons

$$\int\limits_{(0)} = 2\pi i \left[\frac{f(z)}{z-x} E\left(\frac{x}{z}, s\right)\right]_{z^{-1}}.$$

Combinant les résultats obtenus nous obtenons donc enfin

$$e^{-1} f(x) = -\lim_{s=\infty} \left[\frac{f(z)}{z-x} E\left(\frac{x}{z}, s\right)\right]_{z^{-1}}$$

Pour calculer cette expression, remarquons que l'on a, dans le voisinage de $z=0$:

$$\frac{f(z)}{z-x} = -\left(\frac{c_0}{x} + \frac{c_0 + c_1 x}{x^2} z + \ldots + \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_\nu x^\nu}{x^{\nu+1}} z^\nu + \ldots\right)$$

$$E\left(\frac{x}{z}, s\right) = \left(\frac{x}{z}\right)^\sigma - \frac{1}{|1}\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma+\tau} + \frac{1}{|2}\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma+2\tau} - \ldots$$

Le coefficient de z^{-1} dans le développement dont il s'agit est donc égal à

(7) $$-\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\nu}(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}).$$

4. Il est facile de voir que, quel que soit s, cette série converge pour toute valeur de x et représente une fonction *entière* de cette variable. En effet, désignons par ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série (4). Pour toute valeur (réelle ou complexe) de x remplissant la condition

(8) $$|x| \leqq \rho$$

l'expression

(9) $$c_0 + c_1 x + \ldots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}$$

est, en valeur absolue, moindre qu'une certaine constante g ce qui montre que la série (7) converge *uniformément* dans le domaine (8). D'ailleurs on a, d'après un théorème bien connu

$$|c_\nu| < g\rho^{-\nu}$$

g désignant la valeur maximum de $|f(x)|$ pour tous des points du domaine (8). Par là il résulte facilement que, pour toute valeur de x du domaine suivant

(10) $$|x| \geqq \rho$$

l'expression (9) est inférieure en valeur absolue à l'expression

$$(\sigma + \nu\tau) \cdot g \cdot \left|\frac{x}{\rho}\right|^{\sigma+\nu\tau}$$

ce qui prouve que la série (7) converge uniformément dans le domaine

$$K > |x| > \rho$$

K étant aussi grand qu'on le veut.

Par conséquent, la série étant uniformément convergente à l'intérieur de tout domaine fini, représente nécessairement, comme nous l'avons dit, une fonction entière de x.

Le résultat auquel nous sommes ainsi conduits peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème I. *Soit*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{4}$$

une série de Taylor *convergente dans le voisinage de $z = 0$; soient σ et τ deux polynômes en s prenant des valeurs entières et positives toutes les fois que s est égal à un entier positif et formons la fonction entière*

$$F(x, s) = e \, . \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}). \tag{11}$$

Pour toute valeur réelle et positive x telle que la fonction $f(z)$, définie par prolongement analytique de la série (4) à l'intérieur du cercle

$$|z| \leq x, \tag{12}$$

n'admet en dedans ou sur la limite de ce cercle d'autres singularités que des pôles réels, positifs et inférieurs à x on aura

$$f(x) = \lim_{s=\infty} F(x, s). \tag{13}$$

5. Parmi les diverses valeurs qu'on peut choisir pour σ et τ, les plus simples sont

$$\sigma = s \text{ et } \tau = s; \tag{14}$$

pour ces valeurs la formule obtenue prend la forme suivante:

$$f(x) = e \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{s+\nu s-1} x^{s+\nu s-1}). \tag{15}$$

Mais nous verrons plus tard[1] qu'il y a avantage à remplacer les valeurs (14) par les suivantes

$$(16) \qquad \sigma = s^2, \; \tau = s$$

ce qui fournit la formule

$$(17) \qquad f(x) = e \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1})$$

valable, comme les précédentes, pour les valeurs positives de x définies dans le théorème I.

Pour abréger, nous désignerons la série figurant au second membre de (17) par le nom de fonction *associée* de la série de TAYLOR (4) et nous emploierons la notation

$$Ass. \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = e \,.\, \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 z + \ldots + c_{ss+\nu s-1} z^{ss+\nu s-1}).$$

6. La fonction associée jouit de quelques propriétés simples qu'on vérifie immédiatement et dont nous aurons besoin dans la suite. Nous nous bornerons à les énoncer:

Si $f(z)$ est une série de TAYLOR donnée et K une constante quelconque on a

$$Ass. \, Kf(z) = K \, Ass. \, f(z);$$

si $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ sont des séries de TAYLOR données et $K_1, K_2, \ldots, K_m$ des constantes quelconques on a

$$Ass. \, \big(K_1 f_1(z) + \ldots + K_m f_m(z)\big) = \sum_{\nu=1}^{m} K_\nu \, Ass. \, f_\nu(z).$$

Pour

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

on a

$$Ass. \, \frac{1}{1-z} = \frac{1 - e z^{s^2} e^{-z^s}}{1-z};$$

[1] Voir la note à la fin du n:o 16.

si k est un entier positif on a

$$Ass.\ \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{|\underline{k}}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1-e\,z^{k+s^2}e^{-z^s}}{1-z};$$

plus généralement, si a est une constante on a

$$Ass.\ \frac{1}{a-z} = \frac{1-e\left(\frac{z}{a}\right)^{s^2}e^{-\left(\frac{z}{a}\right)^s}}{a-z}$$

$$Ass.\ \frac{1}{(a-z)^{k+1}} = \frac{1}{|\underline{k}}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1-e\left(\frac{z}{a}\right)^{k+s^2}e^{-\left(\frac{z}{a}\right)^s}}{a-z}.$$

§ 2. *Remarques diverses.*

7. Il est facile de transformer les expressions obtenues en des séries de polynômes. Nous nous bornerons à le montrer pour le cas de l'expression (17).

Remarquons à cet effet que l'on a, d'après ce qui a été dit plus haut concernant l'expression (9)

$$\left|c_0 + c_1 x + \ldots c_{ss+\nu s-1}x^{ss+\nu s-1}\right| < g + g(s^2+\nu s)\left(\frac{x}{\rho}\right)^{ss+\nu s}$$

x désignant un nombre positif quelconque et g et ρ ayant la même signification que plus haut. Par là s'obtient facilement, m désignant un entier positif quelconque,

$$\sum_{\nu=m}^{\infty}\frac{1}{|\underline{\nu}}\left|c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1}x^{ss+\nu s-1}\right|$$

$$(18) \qquad < \frac{ge}{m} + \frac{gs}{m-1}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{ss+ms}\cdot e^{\left(\frac{x}{\rho}\right)^s}\cdot\left(1+\frac{s}{m}\right).$$

Or, m étant d'un ordre de grandeur supérieur à celui de $m^m e^{-m}$, on voit que, si l'on prend $m > s^s$, le second membre de (18) tend certainement vers zéro quand s augmente indéfiniment. Il en résulte que si l'on pose

$$(19) \qquad F(x\,,s) = e\,.\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}}(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1}x^{ss+\nu s-1})$$

$$(20) \qquad P(x\,,s) = e\,.\sum_{\nu=0}^{s^2}\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}}(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1}x^{ss+\nu s-1}).$$

on aura, quel que soit x:

$$\lim_{s=\infty} F(x\,,s) = \lim_{s=\infty} P(x\,,s).$$

Nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'on forme le polynôme $P(x\,,s)$ défini par la formule* (20) *la fonction $f(x)$ est représentée par l'expression*

$$(21) \qquad f(x) = \lim_{s=\infty} P(x\,,s)$$

pour toute valeur réelle et positive x telle que $f(z)$ soit méromorphe en dedans et sur la limite du cercle

$$|z| = x$$

et que cette fonction n'admet dans ce cercle que des pôles réels situés entre o *et x.*

Comme on peut écrire

$$\lim_{s=\infty} P(x\,,s) = P(x\,,1) + \sum_{\nu=2}^{\infty}\big(P(x\,,\nu) - P(x\,,\nu-1)\big)$$

on obtient par là un développement de $f(x)$ en série de polynômes, valable pour les valeurs réelles et positives de x qui viennent d'être définies.

8. Nous nous sommes borné, dans ce qui précède, à considérer des valeurs réelles et *positives* de la variable x. Pour trouver des formules valables aussi pour des valeurs *négatives*, on n'a qu'à remplacer, dans les formules (13), (15), (17), (21), le nombre s par $2s$, s étant toujours

un nombre entier et positif. Pour le voir, il suffit de remarquer que la fonction $E(x, s)$ introduite plus haut satisfait aux conditions

$$\lim_{s=\infty} E(x\,,\ 2s) = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases}$$

selon que le nombre *réel* (positif ou négatif) x est différent de 1 ou égal à 1 et que l'on a

$$\lim_{s=\infty} \frac{d^k}{dx^k} E(x\,,\ 2s) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

pourvu que le nombre réel x soit distinct de 1.

Les développements ainsi obtenus convergent et représentent $f(x)$ en tout point réel x tel que $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de $z = x$ et n'admet, à l'intérieur ou sur la limite du cercle

$$|z| = |x|$$

d'autres singularités que des pôles réels.

Plus généralement, on parvient par un raisonnement analogue à l'énoncé suivant:

Théorème III. Si dans les formules (13), (15), (17), (21) on remplace s par ns, n désignant un entier positif quelconque, ces formules seront valables pour toute valeur de x de la forme

$$x = re^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

k étant un nombre quelconque de la suite

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ n - 1$$

et r étant un nombre positif et réel satisfaisant à la condition suivante: $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de $z = x$ et n'admet à l'intérieur ou sur la limite du cercle

$$|z| = |r|$$

d'autres singularités que des pôles

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\,,\ a_m$$

tels que

$$|a_\nu| < |x|, \qquad a_\nu^n = |a_\nu|^n.$$

Supposons, par exemple, que la série proposée (4) représente une fonction $f(z)$ méromorphe dans tout le plan et que tous les pôles a_ν de cette fonction satisfassent à la condition

$$a_\nu^n = |a_\nu|^n$$

n étant un entier positif donné.

Les coupures définissant dans ce cas l'étoile principale de M. Mittag-Leffler sont des demi-droites issues des pôles les plus voisins de l'origine et faisant avec l'axe réel des angles respectivement egaux à

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2 . \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Les expressions de M. Mittag-Leffler fournissent la valeur de $f(z)$ dans tout le plan, *sauf* sur les coupures.

L'expression au contraire que l'on obtient en remplaçant s par ns dans la formule (21), représente (en dehors du cercle de convergence de la série (4)) la fonction $f(z)$ *seulement* sur les coupures dont il s'agit.

§ 3. *Prolongement analytique à l'intérieur de l'étoile méromorphe.*

9. Soit

$$\mathfrak{P}(z|a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots \tag{22}$$

une série de Taylor convergente dans le voisinage de $z = a$. Rappelons comment on définit, d'après M. Mittag-Leffler, *l'étoile principale* correspondant aux constantes c.

Considérons une ligne droite l_θ issue du point $z = a$ et faisant un angle θ avec l'axe réel; formons le prolongement analytique de la série $\mathfrak{P}(z|a)$ en suivant cette droite. Il pourra se faire qu'on arrive à un point au delà duquel le prolongement analytique est impossible; si un tel point existe nous le désignerons par P_θ et nous désignerons par l'_θ la demi-droite obtenue en prolongeant indéfiniment l_θ au delà du point P_θ.

Enfin, θ variant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, nous ferons correspondre à chaque valeur de θ une *coupure* savoir la demi-droite l'_θ qui vient d'être définie (dans le cas où P_θ est infiniment éloigné de $z = a$, il n'y aura pas de coupure correspondante).

Ce qui reste du plan après qu'on a fait toutes ces coupures est l'étoile principale introduite par M. Mittag-Leffler.

C'est un domaine simplement connexe A, à l'intérieur duquel la série $\mathfrak{P}(z|a)$ et son prolongement analytique définissent une branche uniforme d'une fonction analytique.

Dans ce qui suit nous désignerons cette branche par $f(z)$.

Les points P_θ sont appelés par M. Mittag-Leffler des *sommets* de l'étoile A. Le *sommet* correspondant à une valeur déterminé θ n'est donc autre chose que le premier point singulier de la branche $f(z)$ qu'on rencontre en parcourant la demi-droite l_θ.

Les expressions découvertes par M. Mittag-Leffler fournissent, comme on sait, la valeur de $f(z)$ dans tout le plan sauf sur les coupures l'_θ. Ce qui reste à faire, c'est de chercher la valeur de $f(z)$ quand la variable z, en suivant un chemin intérieur à l'étoile A, se rapproche d'un point appartenant à une coupure.

Considérons un sommet quelconque P_θ; si ce sommet n'est qu'un *pôle* de $f(z)$ il pourra arriver qu'en partant de P_θ et parcourant la coupure l'_θ, on ne rencontre jamais d'autres singularités de $f(z)$ que des *pôles;* dans ce cas nous désignerons la coupure l'_θ par l''_θ. Dans le cas contraire, on rencontre, en parcourant l'_θ, un premier point singulier de $f(z)$ qui ne soit pas un pôle. Nous désignerons le segment entre ce point et le point P_θ par l''_θ.

L'ensemble des segments l''_θ qu'on obtient ainsi en faisant varier θ de 0 jusqu'à 2π, sera désigné par L.

Nous nous proposons de former des expressions qui représentent $f(z)$ non seulement à l'intérieur de A mais aussi pour les points appartenant à L.

Si à l'ensemble des points intérieurs à l'étoile A on joint l'ensemble L, on obtient une étoile nouvelle M qui pourra s'appeler *l'étoile méromorphe* appartenant aux constantes c puisque c'est l'étoile la plus étendue

à l'intérieur de laquelle $f(z)$ est méromorphe[1]. Pour en distinguer l'étoile A, on pourrait appeler celle-ci *l'étoile holomorphe* appartenant aux constantes c.

En adoptant cette terminologie, le problème que nous nous proposons à résoudre peut se formuler ainsi:

Former une expression de $f(z)$ valable en tout point régulier z à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

10. Pour ramener ce problème au cas étudié au § 1, nous allons nous servir de la méthode de représentation conforme employée par M. Mittag-Leffler dans la troisième note (Acta mathematica, t. 24, p. 205). Cette méthode dépend d'une fonction dite »fonction génératrice» qui peut être définie d'une infinité de manières différentes. Pour notre but, la fonction génératrice la plus commode paraît être celle introduite et employée par M. Fredholm[2]. Cette fonction est définie par l'égalité

$$\varphi(u, \beta) = \frac{\log(1 - \beta u)}{\log(1 - \beta)} \tag{23}$$

où β est un nombre réel assujetti aux conditions

$$0 \leqq \beta < 1, \tag{24}$$

et jouit des propriétés suivantes:

Quand u décrit la circonférence

$$|u| = 1 \tag{25}$$

dans le sens positif, φ décrit dans le même sens un contour fermé S_β comprenant dans son intérieur le segment $0 — 1$ de l'axe réel; aux valeurs

$$u = 0, \quad u = 1$$

[1] Un point z est à considérer comme intérieur à l'étoile M si on peut décrire autour du segment rectiligne joignant les points a et z un contour fermé T tel que $f(z)$ soit *méromorphe* à l'intérieur de T.

[2] Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förh. 1901, p. 203. Voir aussi une note de M. Mittag-Leffler: *Sur une formule de M. Fredholm*, Comptes rendus (Paris), le 25 Mars 1901.

correspondent respectivement les valeurs

$$\varphi = 0 , \varphi = 1$$

et à une valeur réelle u entre 0 et 1 correspond une valeur de φ entre 0 et 1; pour $\beta = 0$ le contour S se réduit à une circonférence décrite de l'origine comme centre avec un rayon égal à un; enfin, quand β tend vers la valeur *un*, le contour S_β devient de plus en plus mince et se confond, à la limite, avec le segment $0 - 1$.

Ceci rappelé, désignons par x un point à l'intérieur de l'étoile méromorphe M dans le voisinage duquel $f(z)$ est holomorphe. Posons

$$\frac{z - a}{x - a} = \varphi(u , \beta); \tag{26}$$

la fonction z de u définie par cette formule réalise la représentation conforme du cercle (25) sur un contour S'_β semblable à S_β et jouissant des propriétés suivantes: aux valeurs

$$u = 0 , u = 1$$

correspondent les valeurs

$$z = a , z = x ;$$

quand u décrit le segment $0 - 1$, z décrit le segment $a - x$; pour $\beta = 0$ S'_β se réduit à la circonférence

$$|z - a| = |x - a|$$

et quand β tend vers l'unité, S'_β s'aplatit et se raccourcit indéfiniment et se confond, à la limite, avec le segment $a - x$.

Or $f(z)$ étant méromorphe tout le long du segment $a - x$ et holomorphe aux extrémités $z = a$ et $z = x$, on en conclut qu'il existe un nombre positif $B < 1$ tel que, pour toute valeur de β satisfaisant aux conditions

$$B \leqq \beta < 1 , \tag{27}$$

$f(z)$ soit méromorphe à l'intérieur du contour S'_β et sur ce contour et que, en outre, tous les pôles de $f(z)$ appartenant à ce domaine soient situés sur le segment rectiligne joignant les points a et x.

Donc, par le changement de variable (26) (où β est assujetti aux conditions (27)), $f(z)$ se transforme en une fonction $f_1(u)$ méromorphe à l'intérieur et sur la limite du cercle

$$|u| = 1$$

et n'admettant dans ce domaine que des pôles réels situés entre $u = 0$ et $u = 1$.

11. Les résultats obtenus au § 1 sont donc applicables à cette fonction $f_1(u)$.

D'après la formule de M. Fredholm (loc. cit. p. 205), le développement de $f_1(u)$ en série de Taylor dans le voisinage de $u = 0$ peut s'écrire sous la forme symbolique très simple

$$f_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n u^n}{\lfloor n} \frac{x-a}{H} \frac{d}{da} \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + 1 \right) \cdot\cdot \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + n - 1 \right) f(a)$$

où l'on a posé

$$H = -\log(1-\beta);$$

les coefficients

$$\frac{1}{\lfloor \nu} \frac{d^\nu}{da^\nu} f(a) = c_\nu$$

qui y figurent sont identiques aux coefficients définissant la série donnée (22)[1].

Comme z se réduit à x pour $u = 1$ on a

$$f(x) = f_1(1)$$

[1] En posant

$$\lambda(\lambda+1)\cdot\cdot(\lambda+n-1) = \lambda^n + E_1^{(n)}\lambda^{n-1} + \cdot\cdot + E_{n-1}^{(n)}\lambda$$

le produit symbolique

$$\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + 1 \right) \cdots \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + n - 1 \right) f(a)$$

peut être remplacé par le polynôme

$$E_{n-1}^{(n)} c_1 \frac{x-a}{H} + \cdot\cdot + E_1^{(n)} \lfloor n-1 \cdot c_{n-1} \left(\frac{x-a}{H} \right)^{n-1} + \lfloor n \cdot c_n \cdot \left(\frac{x-a}{H} \right)^n$$

et il suffit donc à appliquer à $f_1(1)$ les développements des paragraphes précédents pour avoir l'expression cherchée de $f(x)$ dans toute l'étoile méromorphe.

En posant pour abréger:

$$
(28)\qquad \begin{cases} C_0(x, \beta) = f(a), \\ C_n(x, \beta) = \dfrac{\beta^n}{\lfloor n} \dfrac{x-a}{H} \dfrac{d}{da}\left(\dfrac{x-a}{H}\dfrac{d}{da} + 1\right) \cdot\cdot \left(\dfrac{x-a}{H}\dfrac{d}{da} + n - 1\right) f(a) \end{cases}
$$

on a, en employant la notation introduite au n:o 6,

$$
Ass.\ f_1(u) = e \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (C_0 + C_1 u + \cdot\cdot + C_{ss+\nu s-1} u^{ss+\nu s-1}).
$$

Mettant $u = 1$ et appliquant le théorème I nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème IV. *Si l'on choisit un nombre positif β d'après les conditions* (27) *et qu'on forme la fonction suivante:*

$$
(29)\qquad F(x, \beta, s) = e \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (C_0 + C_1 + \cdot\cdot + C_{ss+\nu s-1})
$$

où les C sont des polynômes en x définis par les formules (28), *on aura*

$$
(30)\qquad f(x) = \lim_{s=\infty} F(x, \beta, s)
$$

x étant un point régulier de $f(z)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

Le point x étant fixé, le nombre β doit être supérieur à un certain nombre B qui dépend, en général, de x; si l'on fixe la valeur de β, la formule (30) n'est valable que dans un certain domaine M' intérieur à M. Mais nous savons d'après ce qui précède que, quand β croît indéfiniment vers la valeur un, le domaine M' s'étend de plus en plus et se confond, à la limite, avec M. Il en résulte que l'expression

$$
\lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} F(x, \beta, s)
$$

converge et représente la valeur de $f(x)$ en tout point régulier x à l'intérieur de l'étoile méromorphe.

12. On peut simplifier la formule ainsi obtenue:

$$f(x) = \lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} F(x, \beta, s) \tag{31}$$

de la manière suivante.

Soit x en point régulier fixe de $f(z)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe et soit E un nombre positif aussi petit qu'on le veut; d'après ce que nous avons vu, on peut faire correspondre à tout nombre β remplissant (27) un nombre positif s' tel que l'on ait

$$|f(x) - F(x, \beta, s)| < \frac{E}{2} \tag{32}$$

dès que:

$$s > s'.$$

Soit ρ_1 un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série (22) et désignons par G le maximum du module de cette série à l'intérieur du domaine

$$|z - a| \leqq \rho_1. \tag{33}$$

Soit ρ un nombre positif tel que, pour toute valeur de u du domaine

$$|u| \leqq \rho \tag{34}$$

la valeur correspondante de z, définie par l'égalité (26), satisfasse à la condition

$$|z - a| \leqq \rho_1.$$

Comme on a

$$|f(z)| \leqq G$$

quand z appartient au domaine (33), on a

$$|f_1(u)| \leqq G$$

tant que u reste dans le domaine (34).

Il en résulte que les coefficients $C_\nu(x, \beta)$ figurant dans le développement

$$f_1(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(x, \beta) u^\nu$$

satisfont à la condition suivante:

$$|C_\nu(x, \beta)| \leqq G\rho^{-\nu}$$

d'où résulte, par le même raisonnement qui nous a conduit à l'inégalité (18), que l'on a

$$\sum_{\nu=m}^{\prime} \frac{1}{|\underline{\nu}} |C_0 + C_1 + \ldots + C_{ss+\nu s-1}|$$

$$< \frac{Gc}{|\underline{m}} + \frac{Gs}{|\underline{m-1}} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{ss+ms} e^{\left(\frac{1}{\rho}\right)^s} \left(1 + \frac{s}{m}\right)$$

m étant un entier positif quelconque.

Or, le second membre dans cette formule tendant vers zéro avec $\frac{1}{s}$ si l'on prend

$$m > s^s,$$

on aura, en posant

$$(35) \quad P(x, \beta, s) = c \, . \sum_{\nu=0}^{s^s} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} \{ C_0(x, \beta) + C_1(x, \beta) + \ldots + C_{ss+\nu s-1}(x, \beta) \}$$

l'inégalité suivante:

$$(36) \qquad |F(x, \beta, s) - P(x, \beta, s)| < \frac{E}{2}$$

dès que

$$s > s''$$

où s'' est un nombre positif suffisamment grand.

Il résulte alors des formules (32) et (35) que l'on a

$$|f(x) - P(x, \beta, s)| < E$$

tant que l'entier positif s est supérieur à s' et à s''.

Nous pouvons, par conséquent, énoncer le théorème suivant:

Théorème V. *Soit*

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

une série de Taylor *convergente dans le voisinage de $z = a$ et désignons par $f(z)$ la branche uniforme de fonction analytique définie par cette série et son prolongement analytique à l'intérieur de l'étoile méromorphe M appartenant aux constantes c. Si l'on définit les polynômes C_n par la formule* (28) *et le polynôme $P(x, \beta, s)$ par l'égalité* (35) *on aura*

$$(37) \qquad f(x) = \lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} P(x, \beta, s)$$

en tout point régulier de $f(x)$ à l'intérieur de l'étoile M.

On peut en déduire facilement que $f(x)$ est représentable à l'intérieur de M par une *série de polynômes*.

13. Par définition, l'étoile M est un domaine continu comprenant d'une part tous les points appartenant à l'étoile holomorphe (ou principale) A, d'autre part la partie des coupures l''_{μ} que nous avons désignée par L.

Soit X un domaine compris tout entier en dedans de A; il résulte facilement des formules précédentes que le développement (37) converge *uniformément* dans X.

Soit d'autre part L_1 un segment d'une coupure quelconque appartenant à L tel qu'il n'y a sur ce segment (y compris les points qui le limitent) aucun point singulier de $f(x)$. La formule (37) non seulement a lieu le long de L_1, mais le second membre converge *uniformément* sur ce segment.

Au contraire, dans une aire embrassant un tel segment L_1, l'expression ne converge pas uniformément puisque le nombre B (n:o 10) tend vers *l'unité* quand x se rapproche de L[1].

14. Dans le cas particulier où tous les pôles de $f(x)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe sont situés sur une ligne droite l issue du point a, il suffit, pour avoir une expression de $f(x)$ valable sur l, de mettre dans les formules précédentes $\beta = 0$ ce qui donne

$$H = 0$$

$$C_n(x, \beta) = \frac{(x-a)^n}{\underline{|n}} \frac{d^n}{da^n} f(a) = c_n(x-a)^n$$

$$P(x, \beta, s) = e \cdot \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_{ss+\nu s-1}(x-a)^{ss+\nu s-1})$$

et enfin

$$f(x) = e \cdot \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_{ss+\nu s-1}(x-a)^{ss+\nu s-1})$$

pour tout point régulier situé sur l.

La formule générale (37) se réduit donc, dans le cas envisagé, à celle que nous avons obtenu au § 2.

---

[1] D'ailleurs, d'après une remarque que je dois à M. PHRAGMÉN, *aucune* série de polynômes représentant $f(x)$ dans M ne saurait converger uniformément dans une telle aire.

15. Comme application du résultat obtenu, considérons le cas où la série (22) définit une fonction $f(z)$ méromorphe dans tout domaine fini. Dans ce cas, l'étoile méromorphe M embrasse tout le plan et nous avons le résultat suivant: *l'expression:*

$$\lim_{\beta=1}\lim_{s=\infty} P(x, \beta, s)$$

définie plus haut converge et représente $f(x)$ en tout point régulier du plan.

§ 4. *Recherche des points singuliers. — Conclusion.*

16. Dans ce qui précède nous avons formé des expressions de $f(x)$ valables en tout point régulier de $f(x)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

Une question qui se pose nécessairement est donc la suivante: étant donné un point ξ à l'intérieur de l'étoile M, décider si ξ est un point *régulier* ou un point *singulier* pour $f(x)$.

Pour étudier cette question, il convient d'employer les notations introduites au n:o 6.

Supposons qu'un point donné ξ à l'intérieur de l'étoile M soit un point singulier de $f(z)$; comme $f(z)$ est méromorphe dans le voisinage de $z=\xi$ nous pouvons écrire

$$f(z)=\frac{A_1}{\xi - z}+\frac{A_2}{(\xi - z)^2}+\cdot\cdot+\frac{A_\alpha}{(\xi - z)^\alpha}+\mathfrak{P}(z-\xi) \tag{38}$$

en désignant par α l'ordre du pôle ξ, par A certaines constantes et par $\mathfrak{P}$ une fonction holomorphe au point $z=\xi$.

Par la transformation

$$z-a=(\xi-a)\frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)} \tag{39}$$

employée plus haut $f(z)$ se transforme en une fonction $f_1(u)$; d'après ce qui précède, il y a un nombre positif $B<1$ tel que, pour toute valeur de β remplissant les conditions

$$B\leqq\beta<1, \tag{40}$$

cette fonction $f_1(u)$ soit méromorphe à l'intérieur et sur le contour du cercle

$$(41) \qquad |u| = 1$$

et que tous les pôles de $f_1(u)$ dans ce domaine soient réels et positifs. Comme les points $z = \xi$, $u = 1$ se correspondent, le point $u = 1$ est un pôle de $f_1(u)$ et l'on peut écrire

$$(42) \qquad f_1(u) = \frac{B_1}{1-u} + \frac{B_2}{(1-u)^2} + \ldots + \frac{B_\alpha}{(1-u)^\alpha} + \mathfrak{P}_1(u-1)$$

les B étant des constantes qui s'expriment linéairement par rapport aux A et $\mathfrak{P}_1$ étant holomorphe pour $u = 1$.

Il nous faut maintenant calculer la valeur de la fonction *associée* de $f_1(u)$ pour $u = 1$ c'est-à-dire la valeur de la fonction $F(x, \beta, s)$, définie par la formule (29), au point correspondant $x = \xi$.

En vertu des propriétés de la fonction associée (n:o 6) on a

$$(43) \qquad Ass.\ f_1(u) = Ass.\ \mathfrak{P}_1(u-1) + \sum_{k=0}^{\alpha-1} B_{k+1}\ Ass.\ \frac{1}{(1-u)^{k+1}}$$

$$= Ass.\ \mathfrak{P}_1(u-1) + \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{B_{k+1}}{\underline{|k}} \frac{d^k}{du^k} \frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u}$$

où l'on a posé $s^2 = \sigma$ pour abréger.

Or comme

$$\frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u} = e \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (1 + u + u^2 + \ldots + u^{\sigma+\nu s+k-1})$$

on peut écrire

$$\frac{d^k}{du^k} \frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u} = e \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} \frac{d^k}{du^k} \frac{1 - u^{k+\sigma+\nu s}}{1-u}$$

et il suffit donc de calculer la valeur de la fonction

$$\frac{d^k}{du^k} \frac{1 - u^{k+\sigma+\nu s}}{1-u}$$

pour $u = 1$. A cet effet, remarquons que l'on a, m désignant un entier positif quelconque,

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1 - u^{k+m}}{1 - u}\right)_{u=1} = \sum_{\nu=k}^{m+k-1} \nu(\nu - 1)\ldots(\nu - k + 1) = \frac{m(m+1)\ldots(m+k)}{k+1}.$$

Il en résulte

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1 - e u^{k+\sigma}e^{-u^s}}{1 - u}\right)_{u=1} = e \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} \frac{(\sigma + \nu s)(\sigma + \nu s + 1)\ldots(\sigma + \nu s + k)}{k+1}$$

$$= \frac{e}{k+1}\left(\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} u^{k+\sigma} e^{-u^s}\right)_{u=1}$$

quel que soit l'entier positif k. (Pour $k = 0$, il faut supprimer l'opération $\frac{d^k}{du^k}$ devant la fraction dans le premier membre.)

En formant, d'après la formule classique, la dérivée k^{me} du produit des deux fonctions

$$u^{k+\sigma} \text{ et } e^{-u^s}$$

on obtient, pour $u = 1$, une expression de la forme suivante:

$$\left(\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} u^{k+\sigma} e^{-u^s}\right)_{u=1} = \theta_k(\sigma, s)$$

où θ_k désigne un polynôme entier de degré $k + 1$ en σ et s dans lequel le coefficient de σ^{k+1} est égal à e^{-1}. Pour $\sigma = s^2$, on obtient, donc un polynôme $\theta_k(s^2, s)$ dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de s, savoir s^{2k+2}, est égal à e^{-1}.

Nous pouvons donc écrire

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1 - e u^{k+\sigma}e^{-u^s}}{1 - u}\right)_{u=1} = \frac{s^{2k+2}}{k+1} + \ldots$$

les termes omis du second membre étant de degré inférieur à $2k + 2$ par rapport à s.

Portant ces valeurs dans la formule (43) et mettant $u = 1$ on obtient, en se rappelant la relation

$$(Ass.\ f_1(u))_{u=1} = F(\xi, \beta, s),$$

la formule suivante

$$F(\xi, \beta, s) = K_s + \frac{B_\alpha}{\underline{|\alpha}} s^{2\alpha} + \ldots \tag{44}$$

les termes omis étant linéaires et homogènes par rapport à $B_{\alpha-1} \ldots B_1$ et de degré moindre que $2\alpha - 1$ par rapport à s; K_s désigne la valeur que prend la fonction

$$Ass.\ \mathfrak{P}_1(u - 1)$$

pour $u = 1$.

Comme $\mathfrak{P}_1(u - 1)$ est holomorphe au point $u = 1$ on a d'après le théorème I,

$$\lim_{s=\infty} K_s = \mathfrak{P}_1(0).$$

Le nombre β ayant une valeur fixe satisfaisant aux conditions (40) et A_α désignant par hypothèse le coefficient de la plus haute puissance négative de $\xi - z$ dans le développement de $f(z)$, on voit sans difficulté que B_α est une quantité différente de zéro.

La formule (44) montre, par suite, que le pôle ξ satisfait nécessairement à la condition[1]

$$\lim_{s=\infty} |F(\xi, \beta, s)| = \infty. \tag{45}$$

17. Ce résultat fournit déjà un critère pour décider si ξ est singulier ou régulier. Mais on peut le simplifier en remplaçant F par le polynôme P défini par la formule (35).

En effet, β étant un nombre satisfaisant aux conditions (40) et ξ étant un point quelconque à l'intérieur de l'étoile méromorphe, nous savons, d'après ce qui a été démontré au n:o 12 que l'on a

$$\lim_{s=\infty} (F(\xi, \beta, s) - P(\xi, \beta, s)) = 0 \tag{46}$$

d'où l'on voit que la condition

$$\lim_{s=\infty} |P(\xi, \beta, s)| = \infty$$

[1] Si au lieu des valeurs (16) de σ et τ nous avions choisi les valeurs plus simples (14), c'est-à-dire si nous nous étions servi de $x^s e^{-x^s}$ comme facteur de discontinuité au lieu de $x^{s^2} e^{-x^s}$, la formule (45) n'aurait pas eu lieu en général.

est *nécessaire* pour que ξ soit un pôle de $f(z)$. Cette condition est d'ailleurs *suffisante* aussi, car pour un point *régulier* ξ l'égalité (45) ne peut pas avoir lieu puisque nous savons que l'on a

$$\lim_{s=\infty} P(\xi, \beta, s) = f(\xi)$$

dans ce cas.

On peut ajouter que, une fois décidé si ξ est un pôle ou non, les formules précédentes permettent d'évaluer les valeurs des coefficients A figurant dans le développement (38).

Dans ce qui précède, je me suis borné à former et à étudier le prolongement analytique d'une série de TAYLOR à l'intérieur de son étoile *méromorphe*.[1] Mais par la considération de certains exemples, j'ai trouvé que les formules obtenues restent vraies dans des domaines encore plus étendus. Et il me paraît probable que les méthodes employées doivent pouvoir s'étendre à la solution de ce problème général:

Former le prolongement analytique de $f(z)$ à l'intérieur de son étoile *uniforme*, c'est-à-dire dans l'étoile la plus étendue de centre a à l'intérieur de laquelle $f(z)$ reste uniforme.

Mais cette nouvelle question m'entraînerait trop loin et je me borne à la signaler.[2]

---

[1] Un résumé de cette recherche a été publié précédemment dans ma note »*Applications nouvelles de la fonction exponentielle*» (Bih. till K. Svenska Vet.-Ak. Förh., 12 Février 1902).

[2] Pendant l'impression du présent travail j'ai eu connaissance d'une note très intéressante que vient de publier M. PAINLEVÉ sur le même sujet (*Comptes rendus*, 7 Juillet 1902). Par une méthode entièrement différente de la nôtre M. PAINLEVÉ arrive à des résultats qui ont beaucoup de rapport aux précédents et parvient même, dans certains cas, à une représentation de la fonction à l'extérieur de l'étoile uniforme. Cependant il me semble que les formules que j'ai obtenues présentent, dans leur domaine de validité, certains avantages. Dans la recherche des singularités, par exemple, elles ne sauraient être remplacées par les formules de M. PAINLEVÉ, car celles-ci n'indiquent pas, semble-t-il, si un point du domaine considéré est singulier ou non.

SUR LA STRATIFICATION D'UNE MASSE FLUIDE EN ÉQUILIBRE

PAR

VITO VOLTERRA

À ROME.

1. Abel a été amené par un problème de mécanique à envisager pour la première fois la question de l'inversion des intégrales définies. En effet c'est le problème des *tautochrones* généralisé qui l'a conduit, par un vrai coup de génie, à sa célèbre formule d'inversion qui se trouve dans le mémoire qu'il a publié en 1823 sous le titre: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*[1]. Cette formule qui correspond à un cas très-particulier d'inversion a reçu bien d'applications dans beaucoup de questions de physique mathématique, de mécanique et d'analyse. Liouville peu de temps après Abel, et sans connaître son résultat, a tâché de résoudre une classe intéressante de questions par l'invention d'un nouveau calcul qu'il appelait des différentielles à indices quelconques.

Mais les formules de Liouville ne sont que des transformations de celle d'Abel.

On a donné après un grand nombre de démonstrations du résultat trouvé par Abel, et on en a multiplié les applications; cependant rien de réellement nouveau n'a été fait, par rapport à la question de l'inversion, jusqu'à l'année 1884 M. Sonine a donné dans les Acta Mathematica une

[1] Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania 1823. — Oeuvres, Christiania 1881, T. 1^er page 11.

Voir aussi le Mémoire: *Resolution d'un problème de Mécanique.* Journ. f. d. reine und ang. Math. her. v. Crelle, Bd. 1, Berlin 1826. — Oeuvres, Christiania 1881. T. 1^er page 97.

nouvelle formule. M. SONINE envisage aussi un cas particulier d'inversion, mais sa formule n'est pas une transformation de celle qui avait été donnée par ABEL, mais c'est une vraie généralisation de cette formule.

Dans quelques travaux que j'ai publiés en 1896 et 1897 [1] j'ai donné la solution de la question générale de l'inversion des intégrales définies. Cette solution peut s'obtenir en supposant seulement certaines conditions peu restrictives sur la continuité et sur l'ordre d'infini des fonctions qui paraissent dans les calculs.

Cependant il y a des cas pratiques dans lesquels ces conditions ne sont pas vérifiées, et il faut alors recourir à des artifices particuliers, quelque fois très-pénibles pour arriver au but. Dans cette Note j'envisage précisément un de ces cas qui ressort d'une question de mécanique céleste. Le problème se réduit à la détermination d'une fonction inconnue qui paraît sous une intégrale définie, tout à fait comme dans le problème des courbes tautochrones étudié par ABEL. Mais, si l'on veut résoudre ce cas dans toute sa généralité, il faut imaginer des méthodes nouvelles.

2. Je vais maintenant éclaircir en quelques mots la question de mécanique céleste à laquelle je me rapporte.

Le problème de l'équilibre d'une masse fluide hétérogène qui tourne autour d'un axe avec une vitesse uniforme, joue un rôle très-important dans l'astronomie théorique, parce que c'est le fondement du calcul de la figure des corps célestes.

Un examen approfondi des stratifications qui sont compatibles avec l'équilibre n'est pas très-avancé, et presque tous les résultats rigoureux qu'on a là-dessus sont des résultats négatifs. Cependant même des résultats négatifs ont un grand intérêt dans ce genre de recherches. Pour mettre cela en pleine lumière, il suffit de remarquer que, même dans le cas des fluides homogènes, on ne possède pas des méthodes directes par lesquelles on peut

---

[1] *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, II, III, IV, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino 1896.

Sulla inversione degli integrali definiti. Rend. della R. Accademia dei Lincei, Roma 1896.

Sulla inversione degli integrali multipli. Ibid. 1896.

Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti. Annali di Matematica, Milano 1897.

déterminer des figures d'équilibre. Les calculs classiques de MAC-LAURIN et de JACOBI, par exemple, ne sont que des vérifications que les ellipsoïdes peuvent être des figures d'équilibre. C'est pourquoi il y a un vrai intérêt à établir que certaines formes ou certaines stratifications sont impossibles. Mais dans la plupart des cas ces propositions négatives ne s'obtiennent qu'avec beaucoup d'effort.

Entre toutes ces propositions il y en a une qu'il est intéressant de mettre hors de doute d'une manière rigoureuse et complète. Rapportons nous aux méthodes de MAC LAURIN et de JACOBI. Leurs succès ressort de la forme extrêmement simple du potentiel d'un ellipsoïde homogène. Or l'expression du potentiel reste aussi simple lorsque l'ellipsoïde étant hétérogène est stratifié par couches homothétiques et concentriques. Il s'agit donc de vérifier s'il y a des figures d'équilibre des fluides ainsi stratifiés.

Au premier abord cette question semble déja tranchée d'une manière négative par les remarquables résultats de M. HENRY et de M. POINCARÉ; mais puisque ces auteurs se rapportent à une masse discontinue, on comprend, si on regarde plus de près, que la proposition n'est pas encore complète [1].

Le but de ce mémoire est d'établir d'une manière générale cette proposition négative. C'est la généralité qu'on laisse à la densité qui engendre la difficulté de la question [2]. En effet on ne peut pas employer les procédés de M. HENRY et de M. POINCARÉ, et dès qu'on impose à la densité la seule condition d'être une fonction intégrable, on tombe sur un problème d'inversion qui n'est soluble que par des méthodes nouvelles.

Nous partagerons notre recherche en trois parties. Dans le premier § nous établirons la relation (A) fondamentale entre deux fonctions inconnues. En utilisant cette relation nous envisagerons dans le second § le cas de l'ellipsoïde de révolution, et dans le troisième § celui de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

---

[1] Voir la 1ère Note à la fin du Mémoire.

[2] Voir la IIème et la IIIème Note à la fin du Mémoire.

I.

1. Soient $2a$, $2b$, $2c$ les axes d'un ellipsoïde. Si on le rapporte à ses axes principaux, son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Chaque ellipsoïde interne homothétique et concentrique aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-h \qquad (0<h<1). \tag{2}$$

Si la matière qui remplit l'ellipsoïde est stratifiée par couches homothétiques et concentriques, la densité ρ sera une fonction de h. Nous supposerons que $\rho(h)$ soit une fonction positive finie et intégrable. Dans cette hypothèse, l'ensemble des valeurs de h pour lesquelles $\rho(h)$ est continue, est condensé dans toute partie du domaine $(0, 1)$.

A cause de la définition de la densité, on a que la masse d'une portion quelconque de l'ellipsoïde, et sa fonction potentielle ne changeront pas en changeant les valeurs de $\rho(h)$ dans les points où cette fonction n'est pas continue, pourvu qu'elle reste toujours intégrable.

C'est pourquoi nous pourrons changer d'une manière arbitraire les valeurs données de la densité $\rho(h)$ dans les points où elle est discontinue en conservant pour cette fonction la propriété d'être intégrable, et on pourra remplacer la primitive expression de la densité par la nouvelle expression.

Cela posé, il est connu que la fonction potentielle dans tout point x, y, z qui fait partie de la masse de l'ellipsoïde est donnée par

$$V=\pi abc\int_0^\infty \varphi(\mu)\frac{d\lambda}{\sqrt{D}}$$

où

$$\mu=1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}, \qquad D=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) \tag{3}$$

$$\varphi(\mu)=\int_0^\mu \rho(\mu)\,d\mu.$$

2. Supposons maintenant que l'ellipsoïde tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z. Il faut distinguer deux cas: celui où l'on peut trouver deux nombres h_0 et h_1 tels que

$$0 < h_0 < h_1 < 1$$

$\rho(h)$ étant constant pour toutes les valeurs de h comprises entre h_0 et h_1; et le cas où cette condition n'est pas verifiée.

Dans le premier cas on peut démontrer que l'équilibre de la masse fluide n'est pas possible, en réduisant ce cas à celui envisagé par M. Poincaré. En effet, si l'équilibre était possible, il subsisterait même en retranchant la portion de fluide comprise entre la surface libre et l'ellipsoïde qui correspond au paramètre h_0. Alors on trouverait un fluide dont la partie externe est homogène et en même temps est comprise entre deux ellipsoïdes qui ne sont pas homofocaux. Cette condition est incompatible avec l'équilibre [1].

3. Nous allons donc envisager le second cas. La fonction potentielle de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge est donnée par

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Pour l'équilibre il faut que W soit constante sur les surfaces où la densité est constante. Il faudra donc que l'on ait

$$W = \psi(h),$$

c'est pourquoi on aura l'équation

$$\text{(A)} \qquad \pi abc \int_0^{\sigma} \varphi(\mu) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \psi(h).$$

4. Il est facile de démontrer que si $\omega \gtrless 0$ l'éllipsoïde ne peut pas se réduire à une sphère.

En effet pour $a = b = c$, on aurait

$$\mu = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + \lambda} \qquad h = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}$$

c'est pourquoi V et ψ seraient des fonctions de $x^2 + y^2 + z^2$.

[1] Journal de Mathématiques fondé par J. Liouville. IV Série. T. VI, 1890, page 69.

Ecrivons maintenant l'équation (A) sous la forme

$$V - \psi = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Cette équation serait absurde si $V - \psi$ était une fonction de $x^2+y^2+z^2$. Il faut donc envisager deux cas:

1

1er cas $\qquad a = b \gtrless c$

2ème cas $\qquad a \gtrless b.$

II.

1. Soit $a = b$. En posant $x^2 + y^2 = r^2$ nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu = 1 - \dfrac{r^2}{a^2 + \lambda} - \dfrac{z^2}{c^2 + \lambda}, \\ h = 1 - \dfrac{r^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}, \end{cases}$$

d'où

$$\mu = \frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h.$$

L'équation (A) s'écrira

$$\pi^2 a^2 c \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2} r^2 + \psi(h),$$

et si nous dérivons par rapport à r^2, on aura puisque ρ est intégrable,

$$-\pi^2 c \int_0^\infty \rho\left(\frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h\right) \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\sqrt{D}} d\lambda = -\frac{\omega^2}{2}.$$

Posons

$$(2) \qquad \pi^2 c \rho = \chi,$$

l'équation précédente deviendra

$$(3)\qquad \int_0^\infty \chi(\mu)\frac{\lambda d\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega^2}{2(a^2-c^2)}.$$

χ est une fonction positive. On en tire

$$a > c,$$

c'est à dire l'axe de rotation est le petit axe de l'éllipsoïde.

2. En posant

$$(4)\qquad \frac{r^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=\xi,\qquad \frac{r^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}=\theta$$

on aura

$$\mu = 1-\xi$$

$$(5)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\xi}=-\frac{1}{\theta},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial r^2}=\frac{1}{(a^2+\lambda)\theta},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z^2}=\frac{1}{(c^2+\lambda)\theta}.$$

Prenons dans le premier membre de l'équation (3) pour variable d'intégration ξ au lieu de λ; cette équation s'écrira

$$\int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\,d\xi = \frac{\omega^2}{2(a^2-c^2)}.$$

Si nous dérivons par rapport à r^2 et à z^2 en remarquant que la quantité sous l'intégrale s'annule à la limite supérieure, non aurons

$$(6)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial}{\partial r^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]d\xi = 0,$$

$$(6')\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial}{\partial z^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]d\xi = 0.$$

Or, par des calculs qui ne présentent pas de difficultés, on trouve, ayant égard aux relations (5),

$$\frac{\partial}{\partial r^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}.$$

En remplaçant dans les équations (6) et (6′) les premiers membres des équations précédentes par les seconds membres, et en faisant des intégrations par parties, on peut écrire les équations (6) et (6′) sous la forme

$$(6_a)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\theta}\right]d\xi=0,$$

$$(6'_a)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}\right]d\xi=0,$$

où l'on a posé

$$(7_a)\qquad f(\xi)=-\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}\int_0^{\xi}\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\theta}d\xi.$$

3. Supposons maintenant $z=0$, et posons

$$\frac{r^2}{a^2}=y,\qquad \frac{a^2-c^2}{a^2}=\varepsilon.$$

En vertu des équations (4) nous aurons

$$\lambda = a^2\frac{y-\xi}{\xi}, \qquad a^2+\lambda = a^2\frac{y}{\xi}, \qquad c^2+\lambda = a^2\frac{y-\varepsilon\xi}{\xi}, \qquad \theta = \frac{a^3 y}{\xi^3}$$

et par suite les relations (6^a), ($6'_a$) et (7_a) deviendront, pour $z = 0$

$$(6_b) \qquad \int_0^y f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{3}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(6'_b) \qquad \int_0^y f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(7_b) \qquad f(\xi) = \left[-\chi(1-\xi)\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\int_0^\xi \chi(1-\xi)\xi^{\frac{1}{2}}d\xi\right]\frac{1}{a^3 y^{\frac{3}{2}}},$$

ou même

$$(6_c) \qquad \int_0^y \phi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{3}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(6'_c) \qquad \int_0^y \phi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\xi}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}d\xi = 0,$$

$$(7_c) \qquad \phi(\xi) = -\chi(1-\xi)\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\int_0^\xi \chi(1-\xi)\xi^{\frac{1}{2}}d\xi$$

Il est évident que $\phi(\xi)$ et $\chi(1-\xi)$ sont des fonctions continues pour les mêmes valeurs de ξ.

4. Cela posé dérivons l'équation (6_b) par rapport à y.

$\bar{y}$ étant une valeur de y pour laquelle $f(y)$ est continue, on aura

$$-\phi(\bar{y})\frac{1}{\bar{y}^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\bar{y}} \phi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{-\frac{1}{2}\bar{y}+\frac{3}{2}\xi-\varepsilon\xi}{(\bar{y}-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}\right\}d\xi = 0.$$

Ajoutons cette équation à l'équation $(6'_b)$ après l'avoir multipliée par $\frac{3}{2} - \varepsilon$. On trouvera

$$-\psi(\bar y)\frac{1}{\bar y^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\bar y} \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\bar y(1-\varepsilon)}{(\bar y - \varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}\,d\xi = 0\,,$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{1}{\bar y^{\frac{5}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{5}{2}}}\psi(\bar y) = \int_0^{\bar y} \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{(\bar y - \varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}\,d\xi\,.$$

L'expression $\int_0^{y} \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{(y - \varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}\,d\xi$ est une fonction continue de la variable y pour toute valeur y comprise entre 0 et 1. Donc en vertu de la relation (8) on pourra rendre continue la fonction $\psi(y)$ en changeant ses valeurs dans les points de discontinuité. On ne pourra avoir d'exception que pour la valeur $y = 0$.

De même, à cause des relations (7_c) et (2), $\chi(1-\xi)$ et $\rho(1-\xi)$ deviendront des fonctions continues (excepté tout au plus pour $\xi = 0$) en changeant leurs valeurs dans les points de discontinuité. Par suite, en prenant garde à ce que nous avons remarqué au 1^er^ §, nous pouvons supposer que $\rho(1-\xi)$, $\chi(1-\xi)$ et $\psi(\xi)$ soient des fonctions continues. Tout au plus elles pourraient n'avoir pas une valeur déterminée pour $\xi = 0$.

5. La fonction $-\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}$ croît lorsqu'on fait croître ξ entre 0 et y; par conséquent $\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}$ est positive. C'est pourquoi

$$\int_0^{y} \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}\,d\xi = \psi_1\int_0^{y}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{\frac{5}{2}}}\,d\xi = \psi_1\frac{1-(1-\varepsilon)^{\frac{5}{2}}}{y^{\frac{5}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{5}{2}}}$$

en désignant par ψ_1 une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\psi(\xi)$, ξ étant comprise entre 0 et y.

L'équation (8) deviendra donc

$$\psi(y) = \psi_1 \left(1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}} \right).$$

Il est facile de démontrer que cette équation ne peut être vérifiée que si les valeurs $\psi(y)$ sont nulles.

En effet, si $\psi(y)$ n'est pas nul, on tire de l'équation précédente

$$\frac{\psi(y)}{\psi_1} = 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Le second membre étant positif, on peut remplacer $\psi(y)$ et ψ_1 par leurs valeurs absolues, et l'on a

$$\frac{|\psi(y)|}{|\psi_1|} = 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Soit M la limite supérieure des valeurs absolues de $\psi(y)$, y étant comprise entre 0 et 1.

On aura

$$\frac{|\psi(y)|}{M} \leqq 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Mais $\psi(y)$ peut s'approcher de M autant que l'on veut, de sorte que le premier membre étant proche de l'unité autant que l'on veut, l'équation précédente est absurde.

6. $\psi(\xi)$ étant nul, on tire de l'équation (7_c)

$$\chi(1 - \xi)\xi^2 = \frac{3}{2}\int_0^{\xi} \chi(1 - \xi)\xi^2 \, d\xi.$$

χ est donc une fonction dérivable par rapport à ξ pour $0 < \xi < 1$. Par la dérivation on trouve

$$\chi'(1 - \xi) = 0$$

d'où l'on déduit que χ et ρ sont constantes. Cette condition est incompatible avec l'hétérogénéité de l'ellipsoïde, et cela démontre que lorsque l'ellipsoïde est un ellipsoïde hétérogène de révolution, par rapport à l'axe de rotation, l'équilibre n'est pas possible.

III.

1. Envisageons maintenant le cas où $a \gtrless b$. En posant $r^2 = x^2 + y^2$, on aura, à cause de l'équation (2) du 1^er Article,

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{r^2}{b^2} - h + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$y^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{r^2}{a^2} - h + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

et par suite, en vertu de la formule (3),

$$(1) \qquad \mu = 1 - \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} r^2 - \frac{a^2 b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} h - \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}\right)\frac{z^2}{c^2}.$$

Dérivons maintenant la relation (A) par rapport à z^2. On trouvera, à cause de l'équation précédente,

$$(2) \qquad \int_0^\gamma \varphi'(\mu)\frac{d\lambda}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}\right) = 0.$$

Supposons que c ne soit pas la plus petite des trois quantités a, b, c. Puisque λ est une quantité positive, on aurait

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} > \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)} > 0.$$

Tous les facteurs qui paraissent sous la dernière intégrale seraient donc des quantités positives et par suite l'équation (2) ne serait pas possible. Il faut donc que c soit plus petite que a et b. L'ellipsoïde sera à trois axes inégaux, et l'on pourra arranger les trois quantités a, b, c par ordre de grandeur en écrivant

$$a > b > c.$$

2. Dérivons maintenant l'équation (A) par rapport à r^2. En prenant garde à l'équation (1) nous aurons

$$(3) \qquad \pi abc \int_0^L \varphi'(\mu) \frac{\lambda d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega^2}{2}.$$

Posons

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = \xi.$$

En regardant λ comme une fonction de ξ, x^2, y^2, z^2, définie par l'équation précédente, on trouvera

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = -\frac{1}{\Omega}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x^2} = \frac{1}{(a^2+\lambda)\Omega}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y^2} = \frac{1}{(b^2+\lambda)\Omega}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{(c^2+\lambda)\Omega}$$

où l'on suppose

$$\Omega = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

Pour calculer l'intégrale qui paraît dans l'équation (3), prenons ξ comme variable d'intégration au lieu de λ, nous aurons

$$(3') \qquad \int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega} d\xi = \frac{\omega^2}{2}$$

étant

$$\chi(1-\xi) = \pi abc\varphi'(\mu).$$

Dérivons l'équation (3') par rapport à x^2, y^2, z^2. Puisque à la limite supérieure de l'intégrale on a $\lambda = 0$, nous trouverons

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial H}{\partial x^2} d\xi = 0, \qquad \int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial H}{\partial y^2} d\xi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial H}{\partial z^2} d\xi = 0.$$

ayant posé

$$H = \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}.$$

Or, on trouve par des calculs très-simples,

$$\frac{\partial H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega}.$$

C'est pourquoi les équations (4) s'écriront, par des intégrations par parties,

$$(4_1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right)d\xi = 0, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}\Omega}\right)d\xi = 0, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\Omega}\right)d\xi = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$f(\xi) = \chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}\int_0^{\xi}\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}\Omega}\,d\xi.$$

3. Supposons maintenant $y = z = 0$, et posons

$$\frac{x^2}{a^2} = u, \quad \varepsilon_1 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Il viendra

$$\lambda = a^2 \frac{u - \xi}{\xi}, \qquad a^2 + \lambda = a^2 \frac{u}{\xi}, \qquad b^2 + \lambda = a^2 \frac{u - \varepsilon_1 \xi}{\xi}, \qquad c^2 + \lambda = a^2 \frac{u - \varepsilon_2 \xi}{\xi},$$

$$\rho = \frac{\xi^2}{a^2 u},$$

et les équations (4_1) s'écriront

$$(4') \qquad \int_0^u \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u - \xi}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi = 0,$$

$$(4'') \qquad \int_0^u \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u - \xi}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{5}{2}} (u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi = 0,$$

$$(4''') \qquad \int_0^u \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u - \xi}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{3}{2}}} \right] d\xi = 0,$$

où

$$(5) \qquad \psi(\xi) = -\chi(1 - \xi) \xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi) \xi^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

Dérivons (4′) par rapport à u.

u étant un point de continuité de ψ, on aura

$$0 = -\psi(\bar{u}) \frac{1}{\bar{u}^2 (1 - \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} (1 - \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \int_0^{\bar{u}} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{u} - \xi}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{5}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{u} - \xi}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{3}{2}}} \right] d\xi.$$

Ajoutons (4″) et (4‴) après avoir multiplié par $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$ respectivement. On obtiendra

$$(6) \qquad \psi(\bar{u}) \frac{1}{\bar{u}^2 (1 - \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} (1 - \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\bar{u}} \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi.$$

En répétant la discussion que nous avons faite dans l'Art. précédant, on trouve qu'on peut toujours supposer que les fontions $\chi(1-\xi)$, $\rho(1-\xi)$, $\psi(\xi)$ soient continues pour $0<\xi<1$.

Or $\frac{1}{(u-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(u-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}$ est une fonction croissante par rapport à ξ, étant $0\leq\xi<u$; par suite l'équation (6) s'écrira

$$\psi(u)\frac{1}{u^2(1-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}}=\psi_1\int_0^{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{(u-\varepsilon_1\xi)^{\frac{3}{2}}(u-\varepsilon_2\xi)^{\frac{1}{2}}}\right]d\xi\,,$$

où ψ_1 est une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\psi(\xi)$, étant $0<\xi<u$.

On tire de là

$$\psi(u)=\psi_1\left(1-(1-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Il n'y a maintenant qu'à répéter les considérations faites à la fin de l'Art. II pour voir que $\psi(u)=0$, et par suite ρ est une quantité constante.

Donc, même si l'ellipsoïde est à trois axes inégaux l'équilibre n'est pas possible lorsqu'il est hétérogène.

Note Ière.

On peut montrer d'une manière très-simple que les raisonnements qu'on fait dans le cas de l'ellipsoïde discontinu, c'est à dire formé par un nombre fini de couches homogènes de densités différentes superposées les unes aux autres, ne peuvent pas s'appliquer, en général, au cas de l'ellipsoïde continu. Pour cela nous allons donner une démonstration directe, fort-simple, de la proposition qu'un ellipsoïde discontinu formé par n couches homogènes limitées par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques, ne peut pas être en équilibre lorsqu'il tourne avec une vitesse constante autour d'une axe. On verra tout de suite que cette démonstration élémentaire ne peut pas s'étendre au cas où le nombre des couches augmente indéfiniment jusqu'à former un ellipsoïde continu.

On peut réduire le cas général où l'on a n couches au cas où l'ellipsoïde n'est formé que de deux couches. En effet supposons qu'il y ait équilibre pour l'ellipsoïde à n couches. Il y aura toujours équilibre en retranchant un nombre quelconque de couches extérieures, car ces couches n'exercent aucune attraction à l'intérieur.

Il y aura donc équilibre si l'ellipsoïde est réduit aux deux couches les plus internes ou même au noyau central. Mais le noyau étant en équilibre, l'équilibre subsisterait même si les deux couches avaient la même densité du noyau. Il faudrait donc que la fonction potentielle d'une masse remplissant la couche extérieure avec une densité égale à la différence des densités des deux couches fût constante sur la surface externe. Or cela est contraire aux propriétés de la fonction potentielle des couches ellipsoïdiques.

Note IIème.

Lorsqu'on suppose que la densité, à partir d'une certaine profondeur jusqu'au centre de l'ellipsoïde, va toujours en croissant ou en décroissant, alors les développements analytiques que nous avons donnés auparavant ne sont plus nécessaires pour la démonstration. Par des calculs très-simples on peut arriver au but. On peut même l'atteindre sans recourir à des calculs, mais par une discussion élémentaire.

En effet il suffit de remarquer que la masse fluide se maintient en équilibre en retranchant toute la partie extérieure et en gardant seulement celle renfermée à l'intérieur d'un ellipsoïde E concentrique et homothétique à l'ellipsoïde primitif, où la densité croît ou décroît toujours du centre jusqu'à la périphérie.

Cela posé décomposons cette masse M, par un ellipsoïde homothétique et concentrique E' en deux parties. Celle interne M' se maintient d'elle-même en équilibre par la rotation ω. Or on voit tout de suite qu'en prenant une masse M'' homothétique à M' de sorte que M' et M'' aient la même densité aux points qui se correspondent par homothétie, cette masse sera en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire ω autour de l'axe qui correspond par homothétie à l'axe de rotation M'. Si nous prenons maintenant M'' de manière qu'elle occupe l'espace renfermé

dans un ellipsoïde E' égal à E, nous aurons les deux masses M et M' qui sont renfermées à l'intérieur de deux ellipsoïdes égaux et sont en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire autour de deux axes correspondants.

Si nous prenons une troisième ellipsoïde E''' égale à E et à E' et y renfermons une masse M''' dont la densité en chaque point soit la différence des densités correspondantes de M et de M', cette masse sera en équilibre d'elle-même étant en repos. Or la masse M''' a en tout point une densité positive, c'est pourquoi on voit aisément que l'équilibre n'est pas possible.

Note IIIème.

Je vais exposer une nouvelle démonstration de l'incompatibilité de l'équilibre d'une masse tournant uniformément, avec sa stratification par ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Je dirai après pourquoi je ne l'ai pas préférée à celle que j'ai donnée dans le cours du travail précédent.

Partons de l'équation (A) (Art. 1er) qu'on peut écrire

$$V = -\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \psi(h),$$

d'où l'on tire

$$\text{(B)} \qquad \Delta^2 V = -2\omega^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial h^2}\Delta h + \frac{\partial\psi}{\partial h}\Delta^2 h,$$

étant

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Or par le théorème de Poisson

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho(h),$$

et à cause de l'équation (2) du 1er Article

$$\Delta h = 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

$$\Delta^2 h = -2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Donc, afin que l'équation (B) soit satisfaite, il faut que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} = 0$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (B), que la densité doit être constante.

Cette démonstration est très-simple; mais elle suppose que le théorème de Poisson soit vérifié et pour cela il ne suffit pas que la densité soit une fonction intégrable. C'est pourquoi nous avons préféré la démonstration que nous avons donnée précédemment, quoique plus compliquée, à celle que nous venons d'exposer.

Cependant il faut remarquer qu'en suivant cette voie, on peut arriver à une conclusion plus générale.

En effet, par cette méthode, on peut démontrer le théorème suivant: *Soit une masse fluide d'une forme et d'une constitution quelconque, pourvu que la densité soit telle que le théorème de Poisson soit applicable. Si dans le domaine d'un point où le fluide est hétérogène et continu, les surfaces où la densité a des valeurs constantes sont des parties de quadriques homothétiques et concentriques, ou des parties de quadriques homofocales, la masse fluide ne sera pas en équilibre si elle tourne uniformément autour d'un axe quelconque.*

Note IVème.

Nous avons supposé dans le 1^{er} § que la rotation de l'ellipsoïde eût lieu autour de l'un des axes. Il est aisé de prouver que cette hypothèse n'est pas une restriction, car si l'axe de rotation aurait pour équation

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

α, β, γ étant les cosinus de direction de l'axe, il faudrait remplacer dans l'équation (A), le terme $-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ par

$$-\frac{\omega^2}{2}\Big\{(x-x_0)^2(\beta^2+\gamma^2)+(y-y_0)^2(\gamma^2+\alpha^2)+(z-z_0)^2(\alpha^2+\beta^2)$$
$$-2(y-y_0)(z-z_0)\beta\gamma-2(z-z_0)(x-x_0)\gamma\alpha-2(x-x_0)(y-y_0)\alpha\beta\Big\}.$$

Or puisque le premier membre de l'équation (A) et $\psi(h)$ ne changent pas, en changeant le signe des quantités x, y, z, il faut que l'on ait

$$\frac{x_0}{\alpha}=\frac{y_0}{\beta}=\frac{x_0}{\gamma}$$

et que deux des cosinus α, β, γ soient nuls.

BEWEIS EINES SATZES VON ABEL ÜBER DIE GLEICHUNG $x^n + y^n + z^n = 0$

VON

P. STÄCKEL

in KIEL

Dass Abel sich mit der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ beschäftigt hat, zeigt ein Brief von ihm an Holmboe aus dem August 1823 (Oeuvres, Nouv. éd. t. II. S. 254—255). Ein darauf bezüglicher Satz, den er in dem Briefe mitteilt, ohne anzugeben, wie er ihn hergeleitet hatte, soll in dem Folgenden bewiesen werden.

Wenn n eine positive ungerade Zahl bedeutet, so ist $u^n + v^n$ durch $u + v$ algebraisch teilbar, und da der Quotient in u und v symmetrisch ist, lässt er sich als ganze rationale Function von $u + v$ und uv darstellen, es besteht also eine Identität der Form:

$$\frac{u^n + v^n}{u + v} = A_0(u+v)^{n-1} + A_1 uv\,.\,(u+v)^{n-3} + A_2(uv)^2\,.\,(u+v)^{n-5} + \ldots$$
$$\ldots + A_{\frac{n-3}{2}}(uv)^{\frac{n-3}{2}}\,.\,(u+v)^2 + A_{\frac{n-1}{2}}(uv)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Im Besonderen ist der letzte Coefficient

$$A_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,n,$$

wie man sofort erkennt, indem man $u = t + x$, $v = -t$ setzt und dann zur Grenze für $x = 0$ übergeht. Mithin gilt die Congruenz:

$$\frac{u^n + v^n}{u + v} \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,n(uv)^{\frac{n-1}{2}} \qquad (\text{mod.}\ (u+v)^2).$$

Bezeichnen nunmehr x, y, z von Null verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, die paarweise relativ prim sind, und besteht zwischen ihnen die Gleichung:

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

in der n eine ungerade Primzahl bedeuten soll, so ergiebt sich mittels der soeben bewiesenen Formel die Congruenz:

$$\frac{x^n}{y+z} \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot n(yz)^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{mod. } (y+z)^2),$$

bei der die linke Seite eine ganze Zahl ist.

Man zerlege $y+z$ in Primfactoren. Es sei p eine Primzahl, die in $y+z$ genau k mal enthalten ist. Da sich x^n durch $y+z$ teilen lässt, so muss p auch Primfactor von x sein, und ist p in x genau α mal enthalten, so muss

$$k \leqq \alpha n$$

sein.

Ist $k < \alpha n$, so enthält der Quotient $\frac{x^n}{y+z}$ noch den Primfactor p, folglich ist auch $n(yz)^{\frac{n-1}{2}}$ durch p teilbar. Wenn aber y und z relativ prim sind, so gilt dasselbe von $y+z$ und yz, mithin muss n durch p teilbar und daher $p = n$ sein. Demnach kann die Annahme $k < \alpha n$ nur dann erfüllt sein, wenn $y+z$ durch n teilbar ist. Dann ist es yz nicht, und daher, zufolge der Congruenz, der Quotient $\frac{x^n}{y+z}$ nur durch n selbst, aber durch keine höhere Potenz von n teilbar, also

$$k = \alpha n - 1.$$

Hieraus ergiebt sich, dass für $p \gtrless n$ notwendig

$$k = \alpha n$$

ist und dass nur folgende zwei Möglichkeiten vorhanden sind:

Erstens: Es ist $y+z$ nicht durch n teilbar. Dann lässt es sich als n^{te} Potenz einer ganzen Zahl u darstellen:

$$y + z = u^n,$$

und es wird gleichzeitig

$$x = u \cdot u',$$

wo die ganzen Zahlen u und u' relativ prim sind. *Zweitens:* Es ist $y+z$ durch n teilbar, dann lässt es sich in der Form darstellen:

$$y + z = n^{n-1}u^n,$$

und es wird gleichzeitig

$$x = nu \, . \, u',$$

wo nu und u' relativ prim sind.

Entsprechende Gleichungen gelten, wenn y oder z bevorzugt wird. Es ist also entweder gleichzeitig

$$z + x = v^n \quad \text{und} \quad y = v \, . \, v',$$

wo v und v' relativ prim sind, oder

$$z + x = n^{n-1}v^n \quad \text{und} \quad y = nv \, . \, v',$$

wo nv und v' relativ prim sind, und entweder gleichzeitig

$$x + y = w^n \quad \text{und} \quad z = w \, . \, w',$$

wo w und w' relativ prim sind, oder

$$x + y = n^{n-1}w^n \quad \text{und} \quad z = nw \, . \, w',$$

wo nw und w' relativ prim sind.

Da die Zahlen x, y, z paarweise relativ prim sein sollten, kann höchstens eine von ihnen durch n teilbar sein, und es ergeben sich daher durch Combination der Möglichkeiten nur *zwei* wesentlich verschiedene Fälle. Entweder ist keine der Zahlen $y+z$, $z+x$, $x+y$ durch n teilbar und daher

$$y + z = u^n, \qquad z + x = v^n, \qquad x + y = w^n,$$

oder es ist eine von ihnen durch n teilbar, während es die anderen nicht sind. Da alle drei Zahlen x, y, z in der Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0$$

dieselbe Rolle spielen, darf man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass $y+z$ durch n teilbar sei, und erhält dann die Gleichungen:

$$y + z = n^{n-1}u^n, \qquad z + x = v^n, \qquad x + y = w^n.$$

Auf diese Weise ergiebt sich schliesslich ein Satz, der mit dem von Abel angegebenen im Wesentlichen identisch ist und folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Sind x, y, z von Null verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, die paarweise relativ prim sind, und besteht für sie die Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

in der n eine ungerade Primzahl bedeutet, so sind nur zwei Fälle möglich. *Erstens:* x, y, z lassen sich in je zwei teilerfremde Factoren zerlegen:

$$x = u \,.\, u', \qquad y = v \,.\, v', \qquad z = w \,.\, w',$$

wo u, v, w nicht durch n teilbar sind, in der Weise, dass gleichzeitig:

$$x = \frac{-u^n + v^n + w^n}{2}, \qquad y = \frac{u^n - v^n + w^n}{2}, \qquad z = \frac{u^n + v^n - w^n}{2}$$

ist. *Zweitens:* x, y, z lassen sich in je zwei teilerfremde Factoren zerlegen:

$$x = nu \,.\, u', \qquad y = v \,.\, v', \qquad z = w \,.\, w',$$

wo v und w nicht durch n teilbar sind, in der Weise, dass gleichzeitig:

$$x = \frac{-n^{n-1}u^n + v^n + w^n}{2}, \qquad y = \frac{n^{n-1}u^n - v^n + w^n}{2}, \qquad z = \frac{n^{n-1}u^n + v^n - w^n}{2}$$

ist, oder es gelten die durch Vertauschung von x, y, z mit einander hervorgehenden Relationen.

SUR UN PROBLÈME D'INVERSION RÉSOLU PAR ABEL

PAR

E. GOURSAT

À PARIS.

En cherchant à déterminer une courbe située dans un plan vertical, de telle façon que le temps mis par un mobile λ, soumis à l'action de la pesanteur et assujetti à se mouvoir sur cette courbe, pour parvenir d'un point de départ quelconque D à un point donné A, soit une fonction donnée $\varphi(a)$ de la hauteur verticale a de la chute, ABEL a été conduit à résoudre une équation qui peut s'écrire

$$(1) \qquad \varphi(a) = \int_0^a \frac{f(x)dx}{\sqrt{a-x}},$$

où $f(x)$ est la fonction à déterminer. En réfléchissant à la méthode employée pour résoudre cette équation et l'équation plus générale

$$(2) \qquad \varphi(a) = \int_0^a \frac{f(x)dx}{(a-x)^n},$$

où n est un exposant positif quelconque inférieur à l'unité, il m'a semblé que la marche suivie par ABEL devenait presque intuitive, en rattachant le problème à une certaine intégrale double.

1. La fonction $\varphi(a)$ étant donnée, pour déterminer la fonction $f(x)$ au moyen de l'équation (2), admettons d'abord que cette fonction $f(x)$

peut être représentée par une expression analogue à celle de $\varphi(a)$, et posons

$$(3) \qquad f(x) = \int_0^x \frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{n'}},$$

n' étant un nouvel exposant positif inférieur à l'unité, et $\psi(y)$ une nouvelle fonction inconnue. La formule (2) peut s'écrire, en posant $x = ax'$,

$$\varphi(a) = \int_0^1 a^{1-n} \frac{f(ax')\,dx'}{(1-x')^n},$$

et de la formule (3) on tire

$$f(ax') = \int_0^{ax'} \frac{\psi(y)\,dy}{(ax'-y)^{n'}},$$

ou encore, en posant $y = ay'$,

$$f(ax') = a^{1-n'} \int_0^{x'} \frac{\psi(ay')\,dy'}{(x'-y')^{n'}},$$

et la valeur de $\varphi(a)$ devient, en remplaçant $f(ax')$ par cette expression,

$$(4) \qquad \varphi(a) = a^{2-n-n'} \int_0^1 \frac{dx'}{(1-x')^n} \int_0^{x'} \frac{\psi(ay')\,dy'}{(x'-y')^{n'}}.$$

Mais le second membre de cette égalité n'est autre chose que l'intégrale double de la fonction

$$\frac{a^{2-n-n'}\psi(ay')}{(1-x')^n(x'-y')^{n'}}$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites $y' = 0$, $y' = x'$, $x' = 1$. En intervertissant l'ordre des intégrations, on a donc aussi

$$\varphi(a) = a^{2-n-n'} \int_0^1 \psi(ay')\,dy' \int_{y'}^1 \frac{dx'}{(1-x')^n(x'-y')^{n'}};$$

or la première intégration nous donne, en posant $x' = y' + (1 - y')t$,

$$\int_{y'}^{1} \frac{dx'}{(1 - x')^n (x' - y')^{n'}} = (1 - y')^{1-n-n'} \int_0^1 t^{-n'} (1 - t)^{-n} dt$$
$$= \frac{\Gamma(1 - n)\Gamma(1 - n')}{\Gamma(2 - n - n')} (1 - y')^{1-n-n'},$$

et par suite

$$\varphi(a) = \frac{\Gamma(1 - n)\Gamma(1 - n')}{\Gamma(2 - n - n')} \int_0^1 a^{2-n-n'} (1 - y')^{1-n-n'} \psi(ay') dy';$$

en revenant à la variable $y = ay'$, on a encore

$$(5) \qquad \varphi(a) = \frac{\Gamma(1 - n)\Gamma(1 - n')}{\Gamma(2 - n - n')} \int_0^a (a - y)^{1-n-n'} \psi(y) dy.$$

On satisfait facilement à cette condition en prenant pour l'exposant n', qui est resté indéterminé jusqu'ici, la valeur $1 - n$, ce qui donne

$$(6) \qquad \varphi(a) = \Gamma(n)\Gamma(1 - n) \int_0^a \psi(y) dy = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^a \psi(y) dy;$$

on ne peut trouver de fonction $\psi(y)$ vérifiant la relation précédente que si la fonction $\varphi(a)$ est nulle pour $a = 0$, et, s'il en est ainsi, on a immédiatement, en prenant les dérivées par rapport à la variable a,

$$(7) \qquad \psi(a) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \varphi'(a),$$

et la fonction inconnue $f(x)$ a pour expression

$$(8) \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(y) dy}{(x - y)^{1-n}}.$$

2. Cette expression de $f(x)$ n'est valable que si la fonction $\varphi(a)$ est nulle pour $a = 0$. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la fonction $f(x)$ ne peut être continue pour $x = 0$, comme le montre immédiatement la formule (1). Dans ce cas, nous prendrons pour $f(x)$ une expression de la forme

$$(9) \qquad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\psi(y) dy}{(x - y)^{1-n}};$$

par une suite de transformations tout-à-fait pareilles aux précédentes, on trouve que $\varphi(a)$ peut s'écrire

$$(10) \qquad \varphi(a) = \int_0^1 \psi(ay')dy' \int_{y'}^1 \frac{dx'}{x'(1-x')^n(x'-y')^{1-n}}.$$

La première intégrale peut être calculée, car si si l'on pose

$$x' = \frac{y'}{1+(y'-1)t},$$

elle devient

$$\frac{1}{y'^{1-n}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-n}(1-t)^n} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}{y'^{1-n}} = \frac{\pi}{\sin n\pi} y'^{n-1},$$

et la formule qui donne $\varphi(a)$ devient

$$(11) \qquad \varphi(a) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^1 \frac{\psi(ay')dy'}{y'^{1-n}},$$

ou, en revenant à la variable $y = ay'$,

$$(12) \qquad a^n\varphi(a) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^a \frac{\psi(y)}{y^{1-n}} dy.$$

Les deux membres de l'égalité (12) s'annullent pour $a = 0$; il suffira donc que leurs dérivées soient égales, ce qui donne

$$\psi(a) = [a\varphi'(a) + n\varphi(a)] \frac{\sin n\pi}{\pi}$$

et l'expression cherchée de $f(x)$ est

$$(13) \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi x} \int \frac{y\varphi'(y) + n\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}} dy.$$

Cette expression de $f(x)$ coïncide avec la première lorsque $\varphi(0) = 0$, car on peut l'écrire

$$\frac{\sin n\pi}{\pi x}\int_0^x \frac{(y-x)\varphi'(y) + n\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}}dy + \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi'(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

La première partie est égale à

$$-\frac{\sin n\pi}{\pi x}\left[(x-y)^n\varphi(y)\right]_0^x = \frac{\sin n\pi}{\pi x}x^n\varphi(0) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}},$$

et la formule (13) prend la forme plus simple

$$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}} + \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi'(y)dy}{(x-y)^{1-n}}. \tag{14}$$

3. Pour vérifier l'identité de la solution précédente avec la solution d'Abel, remarquons qu'en posant $y = tx$ l'expression (13) de $f(x)$ devient

$$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n t\varphi'(xt) + nx^{n-1}\varphi(xt)}{(1-t)^{1-n}}dt,$$

et le second membre est la dérivée par rapport à x de l'intégrale

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n\varphi(xt)dt}{(1-t)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

Si donc on pose $ds = f(x)dx$, la formule (13) conduit à la formule même d'Abel

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

ON A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS LEADING TO PERIODIC FUNCTIONS

BY

H. F. BAKER

of CAMBRIDGE (Engl.).

The present paper contains an elementary algebraic deduction of a system of differential equations satisfied by all the hyperelliptic sigma functions which, as is believed, were first stated, but without demonstration, in the Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. IX, Part IX, 1898, p. 513. In that note will be found indications of a method of solution of the equations in connexion with the theory, considered by PICARD, of integrals of total differentials, and of a method of obtaining from them the expansion of any sigma function, and of their use, in case $p = 2$, for expressing the geometry of KUMMER's sixteen nodal quartic surface. The establishment of a theory of the sigma functions directly from these differential equations would appear likely to be of the greatest suggestiveness for the development of the theory of functions of several variables. It is from this general point of view that the equations appear to the present writer to be of peculiar interest; though their simplicity would also recommend them merely as a contribution to the theory of the hyperelliptic functions.

I.

Let $(x_1 y_1) \dots (x_p y_p)$ be pairs satisfying the equation

$$y^2 = f(x) = 4P(x)Q(x),$$

where

$$P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_p), \qquad Q(x) = (x - c_1) \dots (x - c_p)(x - c);$$

let

$$F(x) = (x - x_1) \dots (x - x_p), \qquad F'(x) = \frac{d}{dx} F(x),$$

and, $e_1, e_2, e_3, \dots$ being undetermined quantities, let

$$\Delta_i = \sum_{r=1}^{p} \frac{y_r}{(e_i - x_r) F'(x_r)}, \qquad \Delta_{ij} = -\frac{\Delta_i - \Delta_j}{e_i - e_j},$$

so that

$$(e_2 - e_3)\Delta_{23} + (e_3 - e_1)\Delta_{31} + (e_1 - e_2)\Delta_{12} = 0$$

$$(e_2 - e_3)(e_4 - e_1)\Delta_{23}\Delta_{41} + (e_3 - e_1)(e_4 - e_2)\Delta_{31}\Delta_{42}$$
$$+ (e_1 - e_2)(e_4 - e_3)\Delta_{12}\Delta_{43} = 0;$$

put further

$$\frac{f(e_i)}{[F(e_i)]^2} = \varphi_i$$

and

$$\Omega_{ij} = (e_i - e_j)^2 \Delta_{ij}^2 - \varphi_i - \varphi_j;$$

also let

$$\chi_{p-i}(x) = x^{p-i} - h_1 x^{p-i-1} + h_2 x^{p-i-2} - \dots + (-1)^{p-i} h_{p-i},$$

so that

$$\frac{F(x)}{x - x_i} = x^{p-1} + x^{p-2}\chi_1(x_i) + x^{p-3}\chi_2(x_i) + \dots + \chi_{p-1}(x_i),$$

h_r being the sum of the homogeneous products of $x_1 \dots x_p$, without repetitions, r together.

We assume in this paper that $u_1 \ldots u_p$ are arbitrary variables, and that the pairs $(x_1 y_1) \ldots (x_p y_p)$ are determined from them by the p equations

$$\int_{m_1}^{x_1} \frac{x^{r-1}\,dx}{y} + \ldots + \int_{m_p}^{x_p} \frac{x^{r-1}\,dx}{y} = u_r,$$

where the lower limits denote p pairs satisfying the equation $y^2 = f(x)$, to be chosen arbitrarily and kept the same throughout the following investigation. It is further assumed that any rational symmetric function of the pairs $(x_1 y_1) \ldots (x_p y_p)$ is a single valued analytic function of $u_1 \ldots u_p$. Such a function has in fact no essential singularities for finite values of $u_1 \ldots u_p$.

It is proved at once that

$$dx_i = \sum_{r=1}^{p} \left[\frac{y_i}{F'(x_i)} \chi_{p-r}(x_i) \right] du_r,$$

and therefore

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_r} = \frac{y_i}{F'(x_i)} \chi_{p-r}(x_i), \qquad \frac{\partial y_i}{\partial u_r} = \frac{1}{2} \frac{f'(x_i)}{F'(x_i)} \chi_{p-r}(x_i);$$

we put further

$$\sum_{r=1}^{p} e_i^{r-1} \frac{\partial}{\partial u_r} = \partial_i .$$

Now consider the expression

$$H = \frac{1}{4} F^2(e_1) F^2(e_2) \Delta_{12}^2 - \frac{F(e_1)P(e_2) - F(e_2)P(e_1)}{e_1 - e_2} \cdot \frac{F(e_1)Q(e_2) - F(e_2)Q(e_1)}{e_1 - e_2};$$

it is easily seen to vanish when e_1 is replaced by x_1; it is therefore an integral polynomial in e_1 and e_2 dividing identically by $F(e_1)F(e_2)$.

Take a symmetrical system of $\frac{1}{2}p(p+1)$ constants $c_{\lambda\mu}$, of arbitrary values, and put

$$f(e_1, e_2) = 4[P(e_1)Q(e_2) + P(e_2)Q(e_1)] - 4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} c_{\lambda\mu} e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1},$$

so that the expression

$$f(e_1, e_2) + 4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} c_{\lambda\mu} e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} - \frac{f(e_1)F(e_2)}{F(e_1)} - \frac{f(e_2)F(e_1)}{F(e_2)}$$

is equal to

$$\frac{4[F(e_1)P(e_2) - F(e_2)P(e_1)][F(e_1)Q(e_2) - F(e_2)Q(e_1)]}{F(e_1)F(e_2)};$$

then the quantity

$$\Phi = \frac{H}{F(e_1)F(e_2)} - \sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p} c_{\lambda\mu} e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1}$$

is equal to

$$\frac{1}{4}F(e_1)F(e_2)\Delta_{12}^2 + \frac{1}{4(e_1 - e_2)^2}\left[f(e_1, e_2) - f(e_1)\frac{F(e_2)}{F(e_1)} - f(e_2)\frac{F(e_1)}{F(e_2)}\right],$$

which is therefore a rational symmetric polynomial in e_1 and e_2, of degree $(p - 1)$ in each, of which the coefficients are rational symmetric functions of the p pairs $(x_1 y_1) \ldots (x_p y_p)$.

We may therefore define $\frac{1}{2}p(p+1)$ single-valued analytic functions of the variables $u_1 \ldots u_p$, without essential singularity for finite values of these variables, by putting

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu}(u) e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1}.$$

These functions depend on the $\frac{1}{2}p(p+1)$ arbitrary constants $c_{\lambda\mu}$, but only additively; and they depend on the p arbitrary fixed places denoted above by $m_1 \ldots m_p$, of which the alteration is equivalent only to the addition of constants to the arguments $u_1 \ldots u_p$; moreover they satisfy the equations

$$\wp_{\lambda\mu}(u) = \wp_{\mu\lambda}(u).$$

We shall put

$$\wp_{\lambda\mu\nu}(u) = \frac{\partial \wp_{\lambda\mu}(u)}{\partial u_\nu}, \qquad \wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u) = \frac{\partial \wp_{\lambda\mu\nu}(u)}{\partial u_\rho}.$$

and it will be found to be an incidental consequence of the following work that in all the functions $\wp_{\lambda\mu\nu}(u)$, $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$, the order of the suffixes is indifferent, or $\wp_{\lambda\mu\nu}(u) = \wp_{\lambda\nu\mu}(u)$; etc.

The definition of the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ is equivalent with

$$4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu}(u) \,.\, e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} - f(e_1, e_2) = F(e_1)F(e_2)\Omega_{12},$$

where, as before,

$$\Omega_{12} = (e_1 - e_2)^2 \Delta_{12}^2 - \varphi_1 - \varphi_2 .$$

To this equation we apply the operator

$$\partial_3 = \sum_{r=1} e_3^{r-1} \frac{\partial}{\partial u_r} .$$

Recalling the values of $\partial x_i | \partial u_r$ and $\partial y_i | \partial u_r$ we find easily

$$\frac{1}{F(e_3)} \partial_3 F(e_1) = - F(e_1) \Delta_{13} , \qquad \frac{1}{F(e_3)} \partial_3 \varphi_1 = 2 \varphi_1 \Delta_{13} ;$$

with some calculation, of which the details are given below, we find

$$\frac{1}{F(e_3)} \partial_3 \Delta_{13} = \frac{1}{2} \frac{(e_1 - e_3) \Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3) \Delta_{23}^2}{e_1 - e_2}$$

$$+ \frac{\varphi_1}{2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + \frac{\varphi_2}{2(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} + \frac{\varphi_3}{2(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} ,$$

which gives

$$\frac{1}{F(e_1) F(e_2) F(e_3)} \partial_3 [\Omega_{12} F(e_1) F(e_2)]$$

$$= (e_1 - e_2) \Delta_{12} \left[(e_1 - e_3) \Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3) \Delta_{23}^2 + (e_1 - e_2) \sum^{1,2,3} \frac{\varphi_1}{2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \right]$$

$$- 2\varphi_1 \Delta_{13} - 2\varphi_2 \Delta_{23} - (\Delta_{13} + \Delta_{23})[(e_1 - e_2)^2 \Delta_{12}^2 - \varphi_1 - \varphi_2] ,$$

and in virtue of

$$(e_2 - e_3) \Delta_{23} + (e_3 - e_1) \Delta_{31} + (e_1 - e_2) \Delta_{12} = 0$$

this reduces to

$$- \frac{\partial_3 [\Omega_{12} F(e_1) F(e_2)]}{(e_1 - e_2)^2 F(e_1) F(e_2) F(e_3)}$$

$$= \Delta_{23} \Delta_{31} \Delta_{12} + \frac{(e_2 - e_3) \varphi_1 \Delta_{23} + (e_3 - e_1) \varphi_2 \Delta_{31} + (e_1 - e_2) \varphi_3 \Delta_{12}}{\varpi_{123}}$$

where

$$\varpi_{123} = (e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) .$$

We thus deduce that the expression

$$- \frac{4}{F(e_1) F(e_2) F(e_3)} \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu\nu}(u) e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} e_3^{\nu-1}$$

is, for all values of e_1, e_2, e_3, equal to the expression on the right side of the last written equation. As this is symmetrical in e_1, e_2, e_3 it follows that in $\wp_{\lambda\mu\nu}(u)$ the order of the suffixes is indifferent. It is not possible to express the functions $\wp_{\lambda\mu\nu}(u)$ rationally in terms of the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$; it is a consequence of what follows that the squares and products

$$\wp^2_{\lambda\mu\nu}(u)\,,\ \wp_{\lambda\mu\nu}(u)\wp_{\rho\sigma\tau}(u)$$

can be so expressed. We proceed therefore to further apply the operator

$$\partial_4 = \sum_{\rho=1}^{p} e_4^{\rho-1}\frac{\partial}{\partial u_\rho}$$

to obtain the expressions for $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$.

Before doing this we give the calculation referred to above to find the expression for

$$\frac{1}{F'(e_3)}\partial_3\Delta_{12};$$

we have

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)}{[F'(x_k)]^2}\chi_{p-r}(x_k) - \frac{y_k}{[F'(x_k)]^2}\frac{\partial}{\partial u_r}[F'(x_k)]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)}{[F'(x_k)]^2}\chi_{p-r}(x_k) - \frac{y_k}{F'(x_k)}\left\{\frac{y_k}{F'(x_k)}\chi_{p-r}(x_k)\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{1}{x_k-x_i}\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{F'(x_i)}\chi_{p-r}(x_i)\frac{1}{x_k-x_i}\right\},$$

where $\sum\limits_{i=1}^{p}{}^{(k)}$ is a summation from which the term for $i=k$ is omitted, so that

$$\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{1}{x_k-x_i} = \frac{1}{2}\frac{F''(x_k)}{F'(x_k)};$$

therefore

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f'(x_k)}{[F'(x_k)]^2}\chi_{p-r}(x_k) - \frac{1}{2}\frac{f(x_k)F''(x_k)}{[F'(x_k)]^3}\chi_{p-r}(x_k)$$

$$+\frac{y_k}{F'(x_k)}\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{F'(x_i)}\frac{\chi_{p-r}(x_i)}{x_k-x_i};$$

hence

$$\frac{\mathrm{I}}{F(e_3)}\partial_3\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right]=\frac{\mathrm{I}}{2}\frac{f'(x_k)F'(x_k)-f(x_k)F''(x_k)}{(e_3-x_k)[F'(x_k)]^3}+\frac{y_k}{F'(x_k)}\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{(e_3-x_i)(x_k-x_i)F'(x_i)},$$

while

$$\partial_3\frac{y_k}{(e_1-x_k)F'(x_k)}=\frac{f(x_k)}{(e_1-x_k)^2(e_3-x_k)[F'(x_k)]^2}+\frac{\mathrm{I}}{e_1-x_k}\partial_3\left[\frac{y_k}{F'(x_k)}\right],$$

wherefore

$$\frac{\mathrm{I}}{F(e_3)}\partial_3\Delta_1=\frac{\mathrm{I}}{F(e_3)}\sum_{k=1}^{p}\partial_3\left[\frac{y_k}{(e_1-x_k)F'(x_k)}\right]$$

$$=\sum_{k=1}\left\{\frac{\mathrm{I}}{2}\frac{f'(x_k)F'(x_k)-f(x_k)F''(x_k)}{(e_3-x_k)(e_1-x_k)[F'(x_k)]^3}+\frac{f(x_k)}{(e-x_k)^2(e_3-x_k)[F'(x_k)]^2}\right\}$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{y_k}{(e_1-x_k)F'(x_k)}\sum_{i=1}^{p}{}^{(k)}\frac{y_i}{(e_3-x_i)(x_k-x_i)F'(x_i)};$$

herein the second term of the right side, arising in a form consisting of $p(p-\mathrm{I})$ terms, is in fact a sum of $\frac{\mathrm{I}}{2}p(p-\mathrm{I})$ terms, namely equal to

$$\sum\sum_{k,i}^{1\ldots p}\frac{y_k y_i}{(e_1-x_k)(e_3-x_k)F'(x_k)(e_1-x_i)(e_3-x_i)F'(x_i)}\cdot\frac{(e_3-x_k)(e_1-x_i)-(e_3-x_i)(e_1-x_k)}{x_k-x_i}$$

wherein $k \neq i$, and therefore equal to

$$\sum\sum_{k,i}^{1\ldots p}\frac{(e_3-e_1)y_k y_i}{(e_3-x_k)(e_1-x_k)F'(x_k)(e_3-x_i)(e_1-x_i)F'(x_i)}$$

or

$$\frac{\mathrm{I}}{2}(e_3-e_1)\left\{\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{y_k}{(e_3-x_k)(e_1-x_k)F'(x_k)}\right]^2-\sum_{k=1}^{p}\frac{f(x_k)}{(e_3-x_k)^2(e_1-x_k)^2[F'(x_k)]^2}\right\}.$$

Thus

$$\frac{\mathrm{I}}{F(e_3)}\partial_3\Delta_1=\frac{\mathrm{I}}{2}(e_3-e_1)\Delta_{13}^2$$

$$+\frac{\mathrm{I}}{2}\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{f'(x_k)F'(x_k)-f(x_k)F''(x_k)}{(e_3-x_k)(e_1-x_k)[F'(x_k)]^3}+\frac{(e_3+e_1-2x_k)f(x_k)}{(e_3-x_k)^2(e_1-x_k)^2[F'(x_k)]^2}\right\}$$

which is the same as

$$\frac{1}{2}(e_3 - e_1)\Delta_{13}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{F'(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{f(x_k)}{(e_3 - x_k)(e_1 - x_k)F'(x_k)}\right].$$

This gives

$$\frac{1}{F(e_3)}\partial_3\Delta_{12} = \frac{1}{2}\frac{(e_1 - e_3)\Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3)\Delta_{23}^2}{e_1 - e_2}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{F'(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{f(x_k)}{(e_1 - x_k)(e_2 - x_k)(e_3 - x_k)F'(x_k)}\right];$$

now if $R(x)$ be a rational function of x not becoming infinite or zero for $x = x_k$, it is easy to prove that the coefficient of $(x - x_k)^{-1}$ in the expansion of $R(x) \mid [F(x)]^2$ is equal to

$$\frac{1}{F'(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{R(x_k)}{F'(x_k)}\right];$$

thus, applying the well known partial fraction theorem

$$\left[\frac{f(x)}{(e_1 - x)(e_2 - x)(e_3 - x)[F(x)]^2}\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

we find, finally, as stated above, that

$$\frac{1}{F(e_3)}\partial_3\Delta_{12} = \frac{1}{2}\frac{(e_1 - e_3)\Delta_{13}^2 - (e_2 - e_3)\Delta_{23}^2}{e_1 - e_2} + \frac{1}{2}\sum^{1,2,3}\frac{\varphi_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}.$$

Proceeding now to apply the operator

$$\partial_4 = \sum_{r=1}^{p} e_4^{r-1}\frac{\partial}{\partial u_r}$$

to the equation before proved

$$-\frac{4}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)}\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu\nu}(u)\,.\,e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}e_3^{\nu-1}$$
$$= \Delta_{23}\Delta_{31}\Delta_{12} + \frac{1}{\varpi_{123}}\sum^{1,2,3}\varphi_1(e_2 - e_3)\Delta_{23},$$

we have at once, by use of the equations

$$\partial_4 F(e_i) = -F(e_4)F(e_i)\Delta_{i4}, \qquad \partial_4\varphi_i = 2F(e_4)\varphi_i\Delta_{i4}$$

$$\partial_4\Delta_{12} = \frac{1}{2}F(e_4)\left\{\frac{(e_1 - e_4)\Delta_{14}^2 - (e_2 - e_4)\Delta_{24}^2}{e_1 - e_2} - \frac{1}{\varpi_{124}}\sum^{1,2,4}\varphi_1(e_2 - e_4)\right\}$$

the result that

$$-\frac{4}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)F(e_4)}\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\rho=1}^{p}\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}e_3^{\nu-1}e_4^{\rho-1}$$

is equal to

$$-(\Delta_{14}+\Delta_{24}+\Delta_{34})\left[\Delta_{23}\Delta_{31}\Delta_{12}+\frac{1}{\varpi_{123}}\sum^{1,2,3}\varphi_1(e_2-e_3)\Delta_{23}\right]+\frac{2}{\varpi_{123}}\sum^{1,2,3}\varphi_1(e_2-e_3)\Delta_{23}\Delta_{14}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\Delta_{12}\Delta_{13}+\frac{1}{\varpi_{123}}\varphi_1(e_2-e_3)\right]\left[\frac{(e_2-e_4)\Delta_{24}^2-(e_3-e_4)\Delta_{34}^2}{e_2-e_3}-\frac{1}{\varpi_{234}}\sum^{2,3,4}(e_2-e_3)\varphi_4\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\Delta_{23}\Delta_{21}+\frac{1}{\varpi_{123}}\varphi_2(e_3-e_1)\right]\left[\frac{(e_3-e_4)\Delta_{34}^2-(e_1-e_4)\Delta_{14}^2}{e_3-e_1}-\frac{1}{\varpi_{314}}\sum^{3,1,4}(e_3-e_1)\varphi_4\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\Delta_{31}\Delta_{32}+\frac{1}{\varpi_{123}}\varphi_3(e_1-e_2)\right]\left[\frac{(e_1-e_4)\Delta_{14}^2-(e_2-e_4)\Delta_{24}^2}{e_1-e_2}-\frac{1}{\varpi_{124}}\sum^{1,2,4}(e_1-e_2)\varphi_4\right];$$

by means of the identity

$$(e_j-e_k)\Delta_{jk}+(e_k-e_i)\Delta_{ki}+(e_i-e_j)\Delta_{ij}=0$$

the right side, multiplied by -2, reduces to

$$\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{42}\Delta_{43}+\Delta_{23}\Delta_{21}\Delta_{43}\Delta_{41}+\Delta_{31}\Delta_{32}\Delta_{41}\Delta_{43}$$

$$-\sum^{1,2,3,4}\varphi_h\left[\frac{\Delta_{ij}\Delta_{ik}}{(e_h-e_j)(e_h-e_k)}+\frac{\Delta_{jk}\Delta_{ji}}{(e_h-e_k)(e_h-e_i)}+\frac{\Delta_{ki}\Delta_{kj}}{(e_h-e_i)(e_h-e_j)}\right]$$

$$+\sum^{1,2,3,4}\frac{\varphi_h\varphi_i+\varphi_j\varphi_k}{(e_i-e_j)(e_i-e_k)(e_h-e_j)(e_h-e_k)}.$$

If now we put

$$M=(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)(e_4-e_1)(e_4-e_2)(e_4-e_3),\qquad \lambda_{ij}=(e_i-e_j)^2\Delta_{ij}^2$$

and use the identities

$$\sum^{1,2,3,4}(e_2-e_3)(e_4-e_1)\Delta_{23}\Delta_{41}=0,\qquad \sum^{1,2,3}(e_2-e_3)\Delta_{23}=0,$$

we find that the expression above, multiplied by M, can be written as the sum of three expressions of the form

$$(e_2-e_3)(e_4-e_1)\left[\lambda_{23}\lambda_{41}-\lambda_{23}(\varphi_1+\varphi_4)-\lambda_{41}(\varphi_2+\varphi_3)-(\varphi_2\varphi_3+\varphi_4\varphi_1)\right]$$

which is equal to

$$(e_2 - e_3)(e_4 - e_1)\Big[(\lambda_{23} - \wp_2 - \wp_3)(\lambda_{41} - \wp_4 - \wp_1) - \sum^{1,2,\cdot} \wp_2\wp_3 + \wp_4\wp_1\Big];$$

thus, with

$$\Omega_{ij} = \lambda_{ij} - \wp_i - \wp_j,$$

we finally have the formula

$$8(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)(e_4-e_1)(e_4-e_2)(e_4-e_3)\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\rho=1}^{p}\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)\,.\,e_1^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}e_3^{\nu-1}e_4^{\rho-1}$$

$$= (e_2 - e_3)(e_4 - e_1)\Big[f(e_2\,,\,e_3) - 4(e_2 - e_3)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_2^{\lambda-1}e_3^{\mu-1}\Big]$$

$$\Big[f(e_4\,,\,e_1) - 4(e_4 - e_1)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_4^{\lambda-1}e_1^{\mu-1}\Big]$$

$$+ (e_3 - e_1)(e_4 - e_2)\Big[f(e_3\,,\,e_1) - 4(e_3 - e_1)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_3^{\lambda-1}e_1^{\mu-1}\Big]$$

$$\Big[f(e_4\,,\,e_2) - 4(e_4 - e_2)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_4^{\lambda-1}e_2^{\mu-1}\Big]$$

$$+ (e_1 - e_2)(e_4 - e_3)\Big[f(e_1\,,\,e_2) - 4(e_1 - e_2)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_1^{\lambda-1}e_1^{\mu-1}\Big]$$

$$\Big[f(e_4\,,\,e_3) - 4(e_4 - e_3)^2\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\wp_{\lambda\mu}(u)e_4^{\lambda-1}e_3^{\mu-1}\Big]$$

which, to save repetitions, we shall refer to as the fundamental formula. It is clear from it that the functions $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ have values independent of the order of the suffixes λ, μ, ν, ρ. It is also clear that the arbitrariness in the lower limits of the integrals by which $x_1 \ldots x_p$ were initially determined from $u_1 \ldots u_p$, equivalent as it is only to arbitrary additive constants for the arguments $u_1 \ldots u_p$, is of no importance, and that, similarly, the arbitrariness of the coefficients $c_{\lambda\mu}$ in the definition of the polynomial $f(x\,,\,z)$, cancelled as it is by corresponding arbitrary additive constants for the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$, is of no importance.

The above work has been carried out on the hypothesis that the hyperelliptic equation $y^2 = f(x)$ has no term in x^{2p+2}. By putting

$$x = \frac{A}{\xi - a}, \qquad x_i = \frac{A}{\xi_i - a}, \qquad e_i = \frac{A}{\varepsilon_i - a}, \qquad \eta = \frac{(\xi - a)^{p+1}}{H}\,y,$$

where A and α are arbitrary, and, with λ_{2p+2} arbitrary,

$$H^2 = -4a_1 \ldots a_p c_1 \ldots c_p c \,|\, \lambda_{2p+2},$$

we easily find the corresponding results for an equation

$$\eta^2 = \lambda_{2p+2}(\xi - \alpha)(\xi - \alpha_1) \ldots (\xi - \alpha_p)(\xi - \gamma)(\xi - \gamma_1) \ldots (\xi - \gamma_p);$$

I have carried through the work, which, though long, is not difficult. It will be sufficient to state the result, which may therefore be reckoned equivalent with the former, or can be directly proved in the same way.

Let

$$y^2 = \lambda_{2p+2} P(x) Q(x) = f(x)$$

where

$$P(x) = (x - a)(x - a_1) \ldots (x - a_p), \qquad Q(x) = (x - c)(x - c_1) \ldots (x - c_p);$$

let $u_1 \ldots u_p$ be arbitrary variables, and $x_1 \ldots x_p$ be thence determined by means of

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{m_k}^{x_k} \frac{x^{r-1}\,dx}{y} = u_r, \qquad {\scriptstyle r=1\ldots p}$$

and put

$$R(x) = (x - a)(x - x_1) \ldots (x - x_p), \qquad \Phi(x) = f(x) \,|\, [R(x)]^2,$$

$$\nabla_{12} = \sum_{k=1}^{p} \frac{y_k}{(e_1 - x_k)(e_2 - x_k) R'(x_k)};$$

further, taking $\frac{1}{2}p(p+1)$ arbitrary constant coefficients $c_{\lambda\mu}$, define, for undetermined quantities e_1, e_2, the function $f(e_1, e_2)$ by means of

$$f(e_1, e_2) = \lambda_{2p+2}[P(e_1)Q(e_2) + P(e_2)Q(e_1)] - 4(e_1 - e_2)^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} c_{\lambda\mu} e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1};$$

then, if we define $\frac{1}{2}p(p+1)$ functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ by means of the equation

$$\frac{4(e_1 - e_2)^2 \sum\limits_{\lambda=1}^{p} \sum\limits_{\mu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu}(u) e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} - f(e_1, e_2)}{R(e_1) R(e_2)} = (e_1 - e_2)^2 \nabla_{12}^2 - \Phi(e_1) - \Phi(e_2),$$

we shall arrive at an equation having precisely the same form as the previously deduced fundamental formula.

This second equation being regarded as deducible from the former by the transformation suggested, the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ occurring in it are not identical with but linear functions of the former.

It is easy to see, as is well known, that the polynomial $f(x, z)$ satisfies the two conditions (1) of being a rational polynomial in x and z, of degree $p+1$ in each, and symmetrical in regard to them, (2) of reducing to $2f(x)$ when $z=x$, (3) of being such that

$$\left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\right]_{z=x} = \frac{df(x)}{dx},$$

the condition (3) being a consequence of (1) and (2); and that conversely any expression satisfying these is included in our form above by suitably choosing the constants $c_{\lambda\mu}$. This is so whether $f(x)$ is of order $2p+2$ or $2p+1$. If we write $f(x)$ symbolically in the form a_x^{2p+2}, one possible form for $f(x, z)$, considered by Prof. KLEIN, is $2a_x^{p+1}a_z^{p+1}$. Another form (suggested by an identity due to ABEL, see the present writer's *Abelian Functions*, p. 195) though not invariantive, appears to possess great simplicity for purposes of calculation, namely putting $f(x) = \sum_0^{2p+2} \lambda_r x^r$ we may take $f(x, z) = \sum_{i=0}^{p+1} x^i z^i [2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x+z)]$, with $\lambda_{2p+3}=0$. It will save repetitions to refer to this as ABEL's form for $f(x, z)$.

If we suppose $\lambda_{2p+2}=0$, $\lambda_{2p+1}=4$, and take this form for $f(x, z)$, the equations which express $(x_1 y_1) \ldots (x_p y_p)$ in terms of $u_1 \ldots u_p$ are given at once in a simple form by the formulae above. From the definition formula for the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$, dividing by e_2^{p+1}, putting $e_2=\infty$, and then $e_1=x_i$, we find that $x_1 \ldots x_p$ are the roots of the equation

$$x^p - x^{p-1}\wp_{pp}(u) - x^{p-2}\wp_{p,p-1}(u) - \ldots - \wp_{p,1}(u) = 0;$$

while, taking the formula

$$-4\sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} \wp_{\lambda\mu\nu}(u) e_1^{\lambda-1} e_2^{\mu-1} e_3^{\nu-1}$$

$$= F(e_1)F(e_2)F(e_3)\left[\Delta_{23}\Delta_{31}\Delta_{12} + \frac{\sum^{1,2,3} \varphi_1(e_2-e_3)\Delta_{23}}{\varpi_{123}}\right],$$

we obtain, for the right side, after dividing by e_3^{p-1} and putting $e_3 = \infty$, the value

$$-4F(e_1)F(e_2)\Delta_{12};$$

if we now divide by e_2^{p-1} and put $e_2 = \infty$, and afterwards put $e_1 = x_i$, we find that

$$y_i = x_i^{p-1}\wp_{ppp}(u) + x_i^{p-2}\wp_{p,p,p-1}(u) + \ldots + \wp_{pp1}(u).$$

The fact we have proved, that $\wp_{\lambda\mu\nu}(u) = \wp_{\lambda\nu\mu}(u)$, shews that

$$\wp_{\lambda 1}(u)du_1 + \ldots + \wp_{\lambda p}(u)du_p, \; = -d\zeta_\lambda(u), \text{ say},$$

is a perfect differential; in the present order of development the study of the character of the functions $\zeta_\lambda(u)$ is subsequent to that of the differential equations. From

$$\frac{\partial\zeta_\lambda(u)}{\partial u_\mu} = -\wp_{\lambda\mu}(u) = \frac{\partial\zeta_\mu(u)}{\partial u_\lambda}$$

follows that

$$\zeta_1(u)du_1 + \ldots + \zeta_p(u)du_p$$

is also a perfect differential. If we write it equal to $d\log\sigma(u)$ it will be found that the differential equations naturally suggest the consideration of $\sigma(u)$ as a dependent variable, and that they are satisfied by the hypothesis that $\sigma(u)$ is an integral function.

Note. The formula for the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ which is made the basis of this paper was first given by Bolza, Gött. Nachr., 1894, p. 270. A deduction from the theory of algebraic integrals was given by him, Amer. J. of Math., XVII (1895), and, independently, by the present writer (*Abel. Functions,* Cambridge, 1897, p. 329); see also Baker, *On the hyperelliptic sigma functions,* Amer. J. of Math., XX, 1898, p. 378, and Math. Annal., L, 1898, p. 462. For the equations of this paper, without demonstration, but with indications of their application, see Camb. Phil. Proc., Vol. IX, Pt. IX, p. 513, September 1898. The expression for the functions $\zeta_\lambda(u)$ in terms of algebraic integrals are given in the writers *Abelian Functions* (pp. 321 and 195). The present development is complete in itself, and requires no previous study of the associated Riemann surface, if the simple case of Jacobi's theorem of inversion which is utilised be assumed. But, if we allow the formula which expresses a theta function of any characteristic, not necessarily half-integral, by the addition of certain constants (parts of the period system) to the arguments of a theta function with zero characteristic, we see that the equations are satisfied by sigma functions of quite arbitrary characteristic.

II.

We consider now, as next in logical order, the algebraic problem of forming the explicit differential equations from the fundamental formula above established, obtaining them by way of example for $p=2$ and $p=3$. The method followed can be regarded only as provisional. Not only is the question how far some of these equations are deducible from the others left unconsidered; but the isobaric character of the equations, remarked below, which promises a general rule for writing down the equations for any value of p, remains not utilised. The present deduction has however great simplicity and some algebraic interest.

The following notation is employed:

The quantities before denoted by e_1, e_2, e_3, e_4 are denoted respectively by x, y, z, t, and so

$$M=(y-z)(z-x)(x-y)(t-x)(t-y)(t-z);$$

a summation extending to these four letters is denoted by S; so that for instance

$$S(y-z)^2(t-x)^2=(y-z)^2(t-x)^2+(z-x)^2(t-y)^2+(x-y)^2(t-z)^2;$$

further we denote the symmetric function $S(x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta)$ by $(\alpha\beta\gamma\delta)$, and the sum of the homogeneous products of x, y, z, t, including repetitions, α together, by H_α, so that for instance $H_2=Sx^2+Syz$ or $H_2=(2000)+(1100)$; and we denote by $|\alpha\beta\gamma\delta|$ the determinant

$$|\alpha\beta\gamma\delta|=\begin{vmatrix} H_\alpha & H_\beta & H_\gamma & H_\delta \\ H_{\alpha-1} & H_{\beta-1} & H_{\gamma-1} & H_{\delta-1} \\ H_{\alpha-2} & H_{\beta-2} & H_{\gamma-2} & H_{\delta-2} \\ H_{\alpha-3} & H_{\beta-3} & H_{\gamma-3} & H_{\delta-3} \end{vmatrix},$$

where $H_0=1$ and, when n is negative, $H_n=0$; similarly in what follows quantities usually arising with positive suffixes are to be put zero when the general rules would give negative suffixes;

we shall need to consider the coefficients $(\alpha\beta)$ arising in the product

$$\Phi_1(x, y) = (x - y)\,\Phi(x, y) = (x - y)\sum_{\alpha=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = -\sum_{\alpha=0}^{N+1}\sum_{\beta=0}^{N+1}(\alpha\beta)x^\alpha y^\beta,$$

wherein $\Phi(x, y)$ is any rational polynomial symmetric in x and y so that $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, and

$$(\alpha\beta) = a_{\alpha,\beta-1} - a_{\alpha-1,\beta},$$

for which $(\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$, $(\alpha\beta) = 0$; and shall meet with the Pfaffian forms

$$\{\alpha\beta\gamma\delta\} = (\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\gamma)(\beta\delta) + (\alpha\delta)(\beta\gamma);$$

it is easy to see that when the polynomial $\Phi(x, y)$ is the Abelian form

$$\sum_{i=0}^{p+1} x^i y^i[2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x + y)]$$

all the quantities $(\alpha\beta)$ are zero in which the difference of α and β is not 1 or 2, and that

$$(\alpha, \alpha + 1) = 2\lambda_{2\alpha}, \qquad (\alpha, \alpha + 2) = \lambda_{2\alpha+1};$$

similarly from two such rational symmetric polynomials

$$\Phi(xy) = \sum_{\alpha=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \qquad \Phi'(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} a'_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$$

we shall form the quantities

$$\{\alpha\beta\gamma'\delta'\} = (\alpha\beta)(\gamma'\delta') - (\alpha\gamma)(\beta'\delta') + (\alpha\delta)(\beta'\gamma') + (\gamma\delta)(\alpha'\beta') - (\beta\delta)(\alpha'\gamma') + (\beta\gamma)(\alpha'\delta')$$

reducing, when $a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$, to $2\{\alpha\beta\gamma\delta\}$; in particular when the first polynomial is the Abelian form above and the second is

$$(x - y)^2\sum_{\alpha=0}^{p-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\wp_{\alpha+1,\beta+1}x^\alpha y^\beta,$$

that is

$$\sum_{\alpha=0}^{p+1}\sum_{\beta=0}^{p+1}(\wp_{\alpha-1,\beta+1} - 2\wp_{\alpha,\beta} + \wp_{\alpha+1,\beta-1})x^\alpha y^\beta,$$

then $(\alpha\beta)$ is as before and

$$(\alpha'\beta') = -(\wp_{\alpha-2,\beta+1} - 3\wp_{\alpha-1,\beta} + 3\wp_{\alpha,\beta-1} - \wp_{\alpha+1,\beta-2}),$$

functions $\wp_{\lambda\mu}$ with negative suffixes being, as explained above, put zero.

The forms just explained arise naturally in the problem of expressing the quotient

$$-\frac{1}{M} S(y-z)(t-x)\,\Phi(y\,,\,z)\,\Phi(t\,,\,x),$$

which is an integral symmetric polynomial in $x\,,\,y\,,\,z\,,\,t$; it is equal to

$$\frac{1}{M}\left[\Phi_1(x\,,\,y)\Phi_1(z\,,\,t)-\Phi_1(x\,,\,z)\Phi_1(y\,,\,t)+\Phi_1(x\,,\,t)\Phi_1(y\,,\,z)\right],$$

and contains the term

$$\frac{1}{M}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta\{\alpha\beta\gamma\delta\},$$

and is therefore equal to the sum, for all combinations four together of the unequal numbers $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\delta$ chosen from the set $0\ldots(N+1)$, of the expressions

$$\frac{1}{M}\begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta & x^\gamma & x^\delta \\ y^\alpha & y^\beta & y^\gamma & y^\delta \\ z^\alpha & z^\beta & z^\gamma & z^\delta \\ t^\alpha & t^\beta & t^\gamma & t^\delta \end{vmatrix}\{\alpha\beta\gamma\delta\},$$

that is, as is well known, of the expressions

$$|\alpha\beta\gamma\delta|\{\alpha\beta\gamma\delta\}.$$

In precisely the same way the expression

$$-\frac{1}{M} S(y-z)(t-x)\left[\Phi(y\,,\,z)\Phi'(t\,,\,x)+\Phi(t\,,\,x)\Phi'(y\,,\,z)\right]$$

is equal to the sum of all possible expressions arising of the form

$$|\alpha_{\prime}\beta\gamma\delta|\{\alpha_{\prime}\beta\gamma'\delta''\}.$$

Returning now to our differential equations, and writing for brevity $f_{12}=f(x\,,\,y)$, etc., the suffixes $1\,,\,2\,,\,3\,,\,4$ being respectively associated with $x\,,\,y\,,\,z\,,\,t$, and $f(x\,,\,y)$ denoting as before a rational polynomial symmetrical in $x\,,\,y$, of degree $p+1$ in each, for which $f(x\,,\,x)=2f(x)$, and writing further

$$P_{12}=\sum_{\alpha=0}^{p-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\wp_{\alpha+1,\beta+1}\,x^\alpha y^\beta,$$

the differential equations can be put into the form

$$8\sum_{\lambda,\mu,\nu,\rho}^{1\ldots p}(\lambda-1\,,\,\mu-1\,,\,\nu-1\,,\,\rho-1)\left[\wp_{\lambda\mu\nu\rho}-2\left(\wp_{\mu\lambda}\wp_{\rho\lambda}+\wp_{\nu\lambda}\wp_{\rho\mu}+\wp_{\lambda\mu}\wp_{\rho\nu}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{M}S(y-z)(t-x)f_{23}f_{41}-\frac{4}{M}S(y-z)(t-x)\left[f_{23}(t-x)^2P_{41}+f_{41}(y-z)^2P_{23}\right]$$

$$+\frac{16}{M}HS(y-z)(t-x)P_{23}P_{41}$$

wherein

$$H=\frac{1}{2}S(y-z)^2(t-x)^2=(2200)-(2110)+6(1111)$$

and the summation on the left extends to every combination of four of the numbers $\lambda-1\,,\,\mu-1\,,\,\nu-1\,,\,\rho-1$ from the set $0\ldots(p-1)$. We are to express the right side in terms of the symmetric functions $(\alpha\beta\gamma\delta)$ and equate coefficients of these on the two sides. The form of the fundamental formula here taken is recommended, not only by the simplicity of the right side, but also by the fact that if we put

$$\wp_{\lambda\mu}=-\frac{\partial^2}{\partial u_\lambda\partial u_\mu}\log\sigma(u),\qquad \sigma_i=\frac{\partial\sigma(u)}{\partial u_i},\qquad \sigma_{ij}=\frac{\partial^2\sigma(u)}{\partial u_i\partial u_j},\quad \text{etc.},$$

the expression

$$Q_{\lambda\mu\nu\rho}=\wp_{\lambda\mu\nu\rho}-2(\wp_{\mu\nu}\wp_{\lambda\rho}+\wp_{\nu\lambda}\wp_{\rho\mu}+\wp_{\lambda\mu}\wp_{\rho\nu})=-\frac{1}{\sigma^2}\left\{\sigma\sigma_{\lambda\mu\nu\rho}-\sum\sigma_\rho\sigma_{\lambda\mu\nu}+\sum\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\rho\lambda}\right\}$$

involves only σ^2 in its denominator; when it is proved, as indeed follows from the differential equations, that $\sigma(u)$ is an integral function, it will be permissable to say that $Q_{\lambda\mu\nu\rho}$ is a function whose (unessential) singularities are such that $\sigma^2(u)Q_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ is an integral function. We remark moreover that if

$$\Delta_\lambda=\frac{\partial}{\partial u_\lambda}-\frac{\partial}{\partial u'_\lambda},$$

then

$$\wp_{\lambda\mu}(u)=-\frac{1}{2\sigma^2(u)}\Delta_\lambda\Delta_\mu\sigma(u)\sigma(u'),$$

$$Q_{\lambda\mu\nu\rho}(u)=-\frac{1}{2\sigma^2(u)}\Delta_\lambda\Delta_\mu\Delta_\nu\Delta_\rho\sigma(u)\sigma(u'),$$

where, after differentiation, u'_λ is to be replaced by u_λ.

On consideration of the forms arising in the fundamental formula it is immediately clear that if we reckon $\wp_{\lambda\mu}(u)$ as of *weight* $\lambda+\mu$, $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ as of weight $\lambda+\mu+\nu+\rho$, and, in

$$f(x\,,\,y)=\sum_0^{p+1}\sum_0^{p+1}a_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta,$$

reckon $a_{\alpha,\beta}$ as of weight $\alpha+\beta$, then the coefficient of the symmetric function $(\alpha\beta\gamma\delta)$ on each side of the formula is isobarically of weight $\alpha+\beta+\gamma+\delta+4$. Thus the expression to be obtained for $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ is isobarically of weight $\lambda+\mu+\nu+\rho$; for instance the function $\wp_{1111}(u)$ can only contain terms of weight 4, and therefore, however great p may be, cannot have more than a limited number of terms. While further, the form of $\wp_{\lambda\mu\nu\rho}(u)$ being obtained for any value of p, its form for any lower value, p_1, of p, is obtainable by the mere omission of coefficients $a_{\alpha,\beta}$ which contain suffixes α or β greater then p_1+1 and of functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$ which contain suffixes λ or μ greater then p_1. As before terms to which the general rules give negative suffixes are throughout to be omitted.

We content ourselves here with forming the equations for $p=3$. In every form $|\alpha\beta\gamma\delta|$, or $\{\alpha\beta\gamma\delta\}$, we suppose $\alpha<\beta<\gamma<\delta$; the only forms $|\alpha\beta\gamma\delta|$ arising for $p=3$, with their values in terms of the symmetric functions $(\alpha\beta\gamma\delta)$, are

$$|0123|=1;\quad |0124|=(1000),\quad |0134|=(1100),$$
$$|0234|=(1110),\quad |1234|=(1111);$$
$$|0125|=(2000)+(1100),\quad |0135|=(2100)+2(1110),$$
$$|0235|=(2110)+3(1111),\quad |0145|=(2200)+(2110)+2(1111)$$
$$|0245|=(2210)+2(2111),\quad |0345|=(2220)+(2211),$$
$$|1235|=(2111),\quad |1245|=(2211),\quad |1345|=(2221),\quad |2345|=(2222).$$

With the help of these equations we can arrange the expression

$$-\frac{1}{M}S(y-z)(t-x)f(y\,,\,z)f(t\,,\,x)=\sum|\alpha\beta\gamma\delta|\{\alpha\beta\gamma\delta\}$$

where

$$f(x\,,\,y)=\sum_0^4\sum_0^4 a_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta,$$

in terms of the symmetric functions (0000) . . . (2222); for the expression

$$-\frac{1}{M} S(y-z)(t-x) P_{23} P_{41} = \Sigma \left|\alpha\beta\gamma\delta\right| \left\{\alpha\beta\gamma\delta\right\}',$$

where

$$P_{12} = \sum_0^2 \sum_0^2 \wp_{\alpha+1,\beta+1} x^\alpha y^\beta,$$

only one term arises, namely

$$|0123| \{0123\}' = (01)'(23)' - (02)'(13)' + (03)'(12)',$$

wherein

$$(\alpha\beta)' = \wp_{\alpha+1,\beta} - \wp_{\alpha,\beta+1},$$

so that the term is equal to

$$-(\wp_{32}\wp_{12} - \wp_{31}\wp_{22} + \wp_{31}^2 - \wp_{23}\wp_{11})$$

which we shall denote by $-\Delta$.

For instance by equating the coefficients of (0112) on the two sides of the fundamental formula we obtain the equation

$$S\{\wp_{1223} - 4\wp_{12}\wp_{23} - 2\wp_{22}\wp_{13}\} = -\{0235\} - \{0145\}$$
$$+ 4\{023'5'\} + 4\{014'5'\} + 16\{0123\}';$$

it will be sufficient to denote the right side of the equation by

$$-\{0235\} - \{0145\} + 4\{..''\} - 16\Delta,$$

and so for the others, and the left side by [1223]. With these notations the set of equations is as follows, the left column giving the symmetrical function $(\alpha\beta\gamma\delta)$ of which the other terms in the same horizontal line are the coefficients: —

$$(2222); \quad [3333] = -\{2345\} + 4\{..''\}$$
$$(2221); \quad [3332] = -\{1345\} + 4\{..''\}$$
$$(2220); \quad [3331] = -\{0345\} + 4\{..''\}$$
$$(2211); \quad [3322] = -\{0345\} - \{1245\} + 4\{..''\}$$
$$(2210); \quad [3321] = -\{0245\} + 4\{..''\}$$

$$(2200);\quad [3311] = -\ \{0145\} + 4\{..''\} + 16\Delta$$

$$(2111);\quad [3222] = -2\{0245\} - \{1235\} + 4\{..''\}$$

$$(2110);\quad [3221] = -\ \{0235\} - \{0145\} + 4\{..''\} - 16\Delta$$

$$(2100);\quad [3211] = -\ \{0135\} + 4\{..''\}$$

$$(2000);\quad [3111] = -\ \{0125\} + 4\{..''\}$$

$$(1111);\quad [2222] = -\ \{1234\} - 3\{0235\} - 2\{0145\} + 4\{..''\} + 96\Delta$$

$$(1110);\quad [2221] = -\ \{0234\} - 2\{0135\} + 4\{..''\}$$

$$(1100);\quad [2211] = -\ \{0134\} - \{0125\} + 4\{..''\}$$

$$(1000);\quad [2111] = -\ \{0124\} + 4\{..''\}$$

$$(0000);\quad [1111] = -\ \{0123\} + 4\{..''\}.$$

To calculate now explicit values for the quantities $\{\alpha\beta\gamma\delta\}$ we limit ourselves to the hypothesis that $f(x, y)$ is of the socalled Abelian form

$$f(x, y) = \sum_0^4 \sum_0^4 x^i y^i \left[2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x + y)\right],$$

where $\lambda_9 = 0$, the corresponding results for other forms of $f(x, y)$ being obtainable by adding a suitable constant to each of the functions $\wp_{\lambda\mu}(u)$. Then with the equations, remarked before, $(\alpha, \alpha + 1) = 2\lambda_{2\alpha}$, $(\alpha, \alpha + 2) = \lambda_{2\alpha+1}$, we obtain, for the forms $\{\alpha\beta\gamma\delta\}$ which arise when $p = 3$,

$$\{0123\} = 4\lambda_0\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3;\quad \{0124\} = 2\lambda_0\lambda_5,\quad \{0134\} = 4\lambda_0\lambda_6,\quad \{0234\} = 2\lambda_1\lambda_6,$$
$$\{1234\} = 4\lambda_2\lambda_6 - \lambda_3\lambda_5;$$

$$\{0125\} = 0,\quad \{0135\} = 2\lambda_0\lambda_7,\quad \{0235\} = \lambda_1\lambda_7,\quad \{0145\} = 4\lambda_0\lambda_8,$$

$$\{0245\} = 2\lambda_1\lambda_8,\quad \{0345\} = 0,\quad \{1235\} = 2\lambda_2\lambda_7,\quad \{1245\} = 4\lambda_2\lambda_8,$$

$$\{1345\} = 2\lambda_3\lambda_8,\quad \{2345\} = 4\lambda_4\lambda_8 - \lambda_5\lambda_7.$$

To calculate the quantities $\{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\}$ we require the values of the quantities

$$(\alpha'\beta') = -(\wp_{\alpha-2,\beta+1} - 3\wp_{\alpha-1,\beta} + 3\wp_{\alpha,\beta-1} - \wp_{\alpha+1,\beta-2});$$

those which enter are found to be given by

$$\begin{array}{lllll}
(0'1')=0 \quad (0'2')=0 & (0'3')=\wp_{11} & (0'4')=\wp_{13} & (0'5')=\wp_{13} \\
 \quad (1'2')=-3\wp_{11} & (1'3')=-2\wp_{12} & (1'4')=\wp_{22}-3\wp_{13} & (1'5')=\wp_{23} \\
 & (2'3')=4\wp_{13}-3\wp_{22} & (2'4')=-2\wp_{23} & (2'5')=\wp_{33} \\
 & & (3'4')=-3\wp_{33} & (3'5')=0 \\
 & & & (4'5')=0
\end{array}$$

From these we easily calculate the fifteen quantities $\{012'3'\}\ldots\{234'5'\}$: for instance

$$\begin{aligned}
\{012'3'\} &= (01)(2'3')-(02)(1'3')+(03)(1'2')+(23)(0'1')-(13)(0'2')+(12)(0'3') \\
&= 2\lambda_0(4\wp_{13}-3\wp_{22})+2\lambda_1\wp_{12}+2\lambda_2\wp_{11}.
\end{aligned}$$

When all these are substituted we find the following differential equations

$$\begin{aligned}
&\wp_{3333}-6\wp_{33}^2 &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_8+\tfrac{1}{8}\lambda_5\lambda_7+\lambda_6\wp_{33}+\lambda_7\wp_{32}+\lambda_8(4\wp_{31}-3\wp_{22}) \\
&\wp_{3332}-6\wp_{23}\wp_{33} &&= -\tfrac{1}{4}\lambda_3\lambda_8+\lambda_6\wp_{32}+\tfrac{1}{2}\lambda_7(3\wp_{31}-\wp_{22})+2\lambda_8\wp_{21} \\
&\wp_{3331}-6\wp_{31}\wp_{33} &&= \lambda_6\wp_{31}-\tfrac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}+\lambda_8\wp_{11} \\
&\wp_{3322}-4\wp_{32}^2-2\wp_{22}\wp_{33} &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_2\lambda_8+\tfrac{1}{2}\lambda_5\wp_{32}+\lambda_6\wp_{31}-\tfrac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}-2\lambda_8\wp_{11} \\
&\wp_{3321}-2\wp_{12}\wp_{33}-4\wp_{23}\wp_{13} &&= -\tfrac{1}{4}\lambda_1\lambda_8+\tfrac{1}{2}\lambda_5\wp_{31} \\
&\wp_{3311}-4\wp_{31}^2-2\wp_{11}\wp_{33} &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_0\lambda_8+2\Delta \\
&\wp_{3222}-6\wp_{22}\wp_{23} &&= -\tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_8-\tfrac{1}{4}\lambda_2\lambda_7-\tfrac{1}{2}\lambda_3\wp_{33}+\lambda_4\wp_{32}+\lambda_5\wp_{31}-\tfrac{3}{2}\lambda_7\wp_{11} \\
&\wp_{3221}-4\wp_{12}\wp_{23}-2\wp_{22}\wp_{13} &&= -\tfrac{1}{8}\lambda_1\lambda_7-\tfrac{1}{2}\lambda_0\lambda_8+\lambda_1\wp_{31}-2\Delta \\
&\wp_{3211}-4\wp_{12}\wp_{13}-2\wp_{11}\wp_{23} &&= -\tfrac{1}{4}\lambda_0\lambda_7+\tfrac{1}{2}\lambda_3\wp_{31} \\
&\wp_{3111}-6\wp_{11}\wp_{31} &&= \lambda_0\wp_{33}-\tfrac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}+\lambda_2\wp_{31}
\end{aligned}$$

$$\wp_{2222} - 6\wp_{22}^2 = -\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_6 + \frac{1}{8}\lambda_3\lambda_5 - \frac{3}{8}\lambda_1\lambda_7 - \lambda_0\lambda_8 - 3\lambda_2\wp_{33} + \lambda_3\wp_{32} + \lambda_4\wp_{22} + \lambda_5\wp_{21} - 3\lambda_6\wp_{11} + 12\Delta$$

$$\wp_{2221} - 6\wp_{21}\wp_{22} = -\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_6 - \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_7 - \frac{3}{2}\lambda_1\wp_{33} + \lambda_3\wp_{31} + \lambda_4\wp_{21} - \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{11}$$

$$\wp_{2211} - 4\wp_{12}^2 - 2\wp_{22}\wp_{11} = -\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_6 - 2\lambda_0\wp_{33} - \frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32} + \lambda_2\wp_{31} + \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{21}$$

$$\wp_{2111} - 6\wp_{11}\wp_{12} = -\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_5 - 2\lambda_0\wp_{32} + \frac{1}{2}\lambda_1(3\wp_{31} - \wp_{22}) + \lambda_2\wp_{21}$$

$$\wp_{1111} - 6\wp_{11}^2 = -\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_4 + \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0(4\wp_{31} - 3\wp_{22}) + \lambda_1\wp_{21} + \lambda_2\wp_{11}$$

wherein

$$\Delta = \wp_{32}\wp_{21} - \wp_{31}\wp_{22} + \wp_{31}^2 - \wp_{33}\wp_{11}.$$

Of these the last five equations give the proper equations for $p = 2$, by putting therein $\lambda_7 = \lambda_8 = 0$ and $\wp_{33} = \wp_{32} = \wp_{31} = 0$; while the last equation gives the proper equation for $p = 1$.

These equations put a *problem:* To obtain a theory of differential equations which shall shew from them why, if we assume

$$\wp_{\lambda\mu}(u) = -\partial^2 \log \sigma(u) \,|\, \partial u_\lambda \partial u_\mu,$$

the function $\sigma(u)$ has the properties which *a priori* we know it to possess, and how far the forms of the equations are essential to these properties. It must suffice for the present to have stated the problem.

Cambridge (Engl.), 14 February, 1902.

[15 August. In illustration of the remarks as to weight (p. 152), it may be added that the equation given above for $\wp_{1111}$ is true for any value of p, and that the equations for the preceding four functions $\wp_{2111}$, $\wp_{2211}$, $\wp_{2221}$, $\wp_{2222}$ are true for any value of p if we add to the right sides the respective terms,

for $\wp_{2111}$ the term $3\lambda_0\wp_{14}$, for $\wp_{2211}$ the terms $\lambda_0(2\wp_{15} + \wp_{24}) + \frac{3}{2}\lambda_1\wp_{14}$,

for $\wp_{2221}$ the terms

$$\lambda_0(\wp_{16} + 3\wp_{25} - 3\wp_{34}) + \lambda_1\left(\wp_{15} + \frac{3}{2}\wp_{24}\right) + \lambda_2\wp_{14},$$

and for $\wp_{2222}$ the terms

$$\lambda_0(4\wp_{26} - 3\wp_{44}) + \lambda_1(4\wp_{35} - 3\wp_{34}) + 4\lambda_2\wp_{24} + 12(\wp_{11}\wp_{24} - \wp_{12}\wp_{14}).]$$

A GENERALISATION OF A THEOREM OF M. PICARD WITH REGARD TO INTEGRALS OF THE FIRST KIND OF TOTAL DIFFERENTIALS

BY

ARTHUR BERRY,
of CAMBRIDGE (Engl.).

To the integrals connected with a plane curve, which are associated with the name of ABEL, correspond two distinct classes of integrals connected with an algebraic surface, viz. double integrals and integrals of total differentials. The latter were introduced into mathematical science by M. PICARD and a large part of what is at present known about them is due to him[1].

If a surface of order n,

$$f(x, y, z, w) = 0, \tag{1}$$

admits of an integral of the *first* kind, it is necessary that four homogeneous polynomials, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, of order $n-3$, should exist, which satisfy the identity

$$\theta_1 f_x + \theta_2 f_y + \theta_3 f_z + \theta_4 f_w = 0, \tag{2}$$

and that the determinants of order $n-2$, belonging to the array

$$\left\| \begin{matrix} \theta_1, & \theta_2, & \theta_3, & \theta_4 \\ x, & y, & z, & w \end{matrix} \right\|.$$

[1] M. PICARD's first important memoir on the subject appeared in LIOUVILLE's Journal, sér. IV, t. I (1885); the chief results are to be found in the *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* which he published in 1897 in conjunction with M. SIMART. All the results which I use are contained in chapter V of this book.

should vanish at every singular point of the surface. They must also satisfy further conditions, at present imperfectly known, at points of higher multiplicity.

It is also known that, if an integral of the first kind exists, the surface must have at least one singular point. The object of this note is to generalize this result.

Let us take two points (P, Q) in space with coordinates $(\lambda, \mu, \nu, \varpi)$ and $(\lambda', \mu', \nu', \varpi')$; then if we avoid special positions we can take ∞^4 positions of PQ such that the tangent planes through PQ touch the surface in n' distinct points, which do not lie on any singular line or at any singular points of the surface; n' is then the *class* of the surface.

The coordinates of these n' points satisfy the equations

$$\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z + \varpi f_w = 0 \tag{4}$$

$$\lambda' f_x + \mu' f_y + \nu' f_z + \varpi' f_w = 0 \tag{5}$$

as well as

$$nf \equiv x f_x + y f_y + z f_z + w f_w = 0. \tag{6}$$

Also, by hypothesis, f_x, f_y, f_z, f_w do not all vanish at these points; hence eliminating these differential coefficients between (4), (5), (6) and the identical relation (2), we have:

$$F \equiv \begin{vmatrix} \theta_1, & \theta_2, & \theta_3, & \theta_4 \\ x, & y, & z, & w \\ \lambda, & \mu, & \nu, & \varpi \\ \lambda', & \mu', & \nu', & \varpi' \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

This is a surface of order $n-2$, on which the n' points also lie.

Thus the n' points lie on each of the surfaces (4), (5), (7); but these surfaces cannot meet in more than $(n-1)^2(n-2)$ points, unless they have a common curve.

If possible let these three surfaces have a common curve; then if this curve also lie on $f=0$ it follows from (4) and (5) that the tangent plane at every point of it passes through PQ, which is impossible unless it be

a double (or multiple) curve on $f=0$. We may therefore assume that along this curve, assumed not to be a multiple curve on $f=0$,

(8) $$xf_x+yf_y+zf_z+wf_w=k,$$

where $k\neq 0$, except at a finite number of points where the curve meets $f=0$.

Solving for f_w from (2), (4), (5) and (8) we have

$$f_w\,.\,F=k\begin{vmatrix}\theta_1, & \theta_2, & \theta_3\\ \lambda, & \mu, & \nu\\ \lambda', & \mu', & \nu'\end{vmatrix}.$$

But $F=0$ along the curve, therefore also along it

(9) $$\begin{vmatrix}\theta_1, & \theta_2, & \theta_3\\ \lambda, & \mu, & \nu\\ \lambda', & \mu', & \nu'\end{vmatrix}=0.$$

Thus the curve in question is some part of the intersection of the surfaces (5) and (9); but these are independent of ϖ, so that the curve remains fixed as ϖ varies continuously; accordingly it lies on all the surfaces given by (4) as ϖ varies continuously; hence it lies on $f_w=0$. Similarly it lies on $f_x=0$, $f_y=0$, $f_z=0$; it is therefore a double curve on $f=0$.

Again, since F is a linear combination of the determinants (3), the surface $F=0$ passes, with a certain multiplicity, through the multiple points and curves of $f=0$; let us suppose that these singularities absorb q of the intersections of (4), (5), (7), so that the remaining points of intersection are diminished to

$$(n-1)^2(n-2)-q.$$

We have thus the inequality

(10) $$n'\leqq(n-1)^2(n-2)-q.$$

But for a non singular surface

$$n' = (n-1)^2 n,$$

so that there must be enough singularities to diminish the class of the surface by at least

$$2(n-1)^2 + q.$$

We can obtain a second inequality of a similar character by considering the number of points of intersection of one of the polars, say (4), with $f=0$, $F=0$. By similar reasoning we can shew that these three surfaces can have no common curve other than a multiple curve on $f=0$, so that the number of points of intersection distinct from singularities is $n(n-1)(n-2)-r$, where r is the number of intersections of the three surfaces absorbed by the singularities of $f=0$. We thus obtain

$$n' \leqq n(n-1)(n-2) - r, \tag{11}$$

so that there must be enough singularities to diminish the class by at least

$$n(n-1) + r.$$

In the case of the simplest kinds of singular points and singular lines the numbers q and r can be calculated without difficulty; but in the more complicated cases I do not know of any methods that are generally applicable. Accordingly I only illustrate these inequalities by some very simple cases.

If any multiple point of $f=0$ is equivalent to the same number of intersections of $f=0$ with two polars on the one hand, and with one polar and $F=0$ on the other hand, its presence effects both sides of (11) equally. This is the case with an ordinary conical point of order 2, which diminishes the class by 2, and with a biplanar point of the simplest kind, which diminishes the class by 3 and also counts triply as an intersection of $F=0$ with $f=0$ and a polar, since it can easily be shewn that $F=0$, like a polar, has a tangent plane passing through the intersection of the two tangent planes to the surface at the biplanar point. It follows that if the only singularities of the surface are double points of these two species, the inequality (11) is impossible. We thus get the result:

a surface, the only singularities of which are double points which diminish the class by 2 or 3, can have no integral of the first kind of a total differential.

Let us next suppose that the only singularity is a nodal double curve, reducible or otherwise, of order m, with h apparent double points and t actual triple points; then if there are no further singularities on the curve, other than those which result necessarily from these characteristics, it is known[1] that the curve diminishes the class of $f = 0$ by

$$m(7n - 4m - 8) + 8h + 9t.$$

Also since $F = 0$ and the two polars pass through this curve it absorbs at least

$$q \equiv m(n - 1 + n - 1 + n - 2 - m - 1) + 2h$$

of the points of intersection of the three surfaces[2].

Similarly the curve absorbs at least

$$r \equiv m\{n + 2(n - 1) + 2(n - 2) - 2m - 2\} + 4h$$

of the points of intersection of $F = 0$, a polar and $f = 0$.

Substituting in (10) and (11) we have the inequalities

$$m(4n - 3m - 3) + 6h + 9t \geqq 2(n - 1)^2 \tag{12}$$

and

$$2m(n - m) + 4h + 9t \geqq n(n - 1). \tag{13}$$

These formulæ may be illustrated by the cases of quartic and quintic surfaces.

In the case of a quartic surface ($n = 4$), if $m > 2$, the surface is rational or reducible; rejecting these cases we see that the only admissible solution of these inequalities is given by

$$m = 2, \qquad h = 1, \qquad t = 0.$$

The nodal curve accordingly consists of two non-intersecting straight lines; and it is known that this quartic does admit of an integral of the first kind.

[1] Salmon's *Geometry of three Dimensions*, § 594. I follow the notation of § 586, which is different from that of this article.

[2] *Ib.* § 586.

In the case of a quintic surface ($n = 5$), we can exclude for the same reason as before the cases of $m > 5$; the inequalities reduce to

$$m(17 - 3m) + 6h + 9t \geqq 32$$

and

$$m(10 - 2m) + 4h + 9t \geqq 20.$$

The inequalities obviously cannot be satisfied by $m = 1$ or $m = 2$. If $m = 3$, then

$$6h + 9t \geqq 8, \qquad 4h + 9t \geqq 8,$$

whence

$$h \geqq 2; \quad \text{or} \quad t \geqq 1.$$

In the former case we have a conic and a straight line, or three straight lines which are not coplanar, and in either case it is easily shewn that the surface is rational or reducible; in the latter case we have three straight lines meeting in a point.

If $m = 4$, then

$$6h + 9t \geqq 12, \qquad 4h + 9t \geqq 12,$$

whence

$$h \geqq 3, \quad \text{or} \quad h \geqq 1, t \geqq 1, \quad \text{or} \quad t \geqq 2.$$

It is easy to verify that in all these cases the quintic must be rational or reducible.

If $m = 5$, then

$$6h + 9t \geqq 22, \qquad 4h + 9t \geqq 20,$$

whence

$$h \geqq 5, \quad \text{or} \quad h \geqq 3, t \geqq 1, \quad \text{or} \quad h \geqq 1, t \geqq 2, \quad \text{or} \quad t \geqq 3.$$

It is again easy to verify that in all cases except the first the quintic must be rational or reducible if it can exist at all; and that we have left the case in which the double curve is an irreducible quintic with 5 apparent double points. I have verified by other methods that such a quintic effectively possesses an integral of the first kind.

Cambridge, Jan. 1902.

ÜBER DIE METACYKLISCHEN GLEICHUNGEN VON PRIMZAHLGRAD

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

§ 1. *Referat über die Arbeiten von Abel, Kronecker und Herrn Weber.*

Wie lebhaft sich ABEL für das Problem der algebraischen Auflösung der Gleichungen interessiert hat, ist aus wiederholten Äusserungen in seinen Briefen ersichtlich.[1] Zunächst war es ihm gelungen den ersten vollständigen Beweis zu erbringen, dass die allgemeinen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade nicht durch Radikale auflösbar oder, wie wir mit Herrn WEBER sagen wollen, nicht metacyklisch sind. Durch eine Vertiefung der hierbei angewandten Methode wollte er alsdann zeigen, wie man alle metacyklischen Gleichungen aufstellen kann.[2] Seine diesbezüglichen Untersuchungen waren leider bei seinem frühzeitigen Tode unvollendet. So hat er die wichtigen Sätze, vermittelst deren die Aufgabe auf primitive metacyklische Gleichungen von Primzahlpotenzgrad reduziert wird, ohne Beweis hinterlassen (Oeuvres II, p. 222). Bezüglich der metacyklischen Gleichungen vom 5. Grade hat er in einem Briefe an CRELLE (Oeuvres II, p. 266) die allgemeine Gestalt der Wurzeln angegeben. Eine entsprechende Darstellung für die Wurzeln einer metacyklischen Gleichung

[1] In einem Briefe an HOLMBOE (Oeuvres II, p. 260) bezeichnet er diese Aufgabe als sein »Thème favori».

[2] Hier lassen wir unerörtert die wichtigen Klassen von *speciellen* metacyklischen Gleichungen, welche ABEL entdeckt hat, wie die nach ihm benannten ABEL'schen, sowie die damit verwandten Gleichungen der komplexen Multiplikation.

von einem beliebigen Primzahlgrade p wurde von Kronecker bei seiner Wiederaufnahme des Problems gegeben.[1] Hierbei treten als Endradikale die p^{ten} Wurzeln aus gewissen Grössen r auf, welche ihrerseits einer cyklischen Gleichung vom Grade n genügen, wobei n einen Teiler von $p - 1$ bedeutet. In seiner späteren Note gab Kronecker für diese Grössen r explicite Ausdrücke durch Kreisteilungsgrössen, wobei er den freilich erst in neuerer Zeit von den Herren Weber und Hilbert bewiesenen Satz benutzte, dass alle im absoluten Rationalitätsbereiche Abel'schen Körper Kreisteilungskörper sind. Es war aber noch kein Beweis gegeben, dass die Wurzeln einer metacyklischen Gleichung von Primzahlgrad sich wirklich in der angegebenen Weise darstellen lassen. Ein solcher wurde erst von Herrn Weber erbracht.[2] Die Form der Wurzeln, um welche es sich bei diesem Beweise handelt, ist jedoch in gewissen Fällen nicht als die eigentlich naturgemässe zu betrachten. In der Tat hatte schon Kronecker, wie oben angedeutet wurde, eine Fallunterscheidung eingeführt. Die verschiedenen Fälle beziehen sich, wie wir hier zeigen wollen, in ziemlich komplizierter Weise einerseits auf die Gruppe der Gleichung, anderseits auf die verschiedenen Möglichkeiten betreffend den gemeinsamen Unterkörper des durch die Wurzeln der Gleichung gebildeten Körpers und des Körpers der p^{ten} Einheitswurzeln.

§ 2. *Die Gruppe des Körpers* $R(x, \varepsilon)$.

Es sei mit R der zu Grunde gelegte Rationalitätsbereich bezeichnet. Die Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$ der Gleichung bestimmen einen Körper $R(x)$ über R. Werden hierzu noch die p^{ten} Einheitswurzeln adjungiert, so erhält man einen Körper $R(x, \varepsilon)$.

Die am Ende des vorigen Paragraphen besprochenen Verhältnisse beruhen nun darauf, das die einzelnen Radikale, welche in den Ausdrücken für die Wurzeln auftreten, nicht dem Körper $R(x)$, sondern erst dem Körper $R(x, \varepsilon)$ angehören. Da es sich also um Grössen in diesem Körper

[1] Berl. Ber. 1853, p. 365; 1856, p. 203. Doch ist es, nach den unvollständigen Notizen zu urteilen, welche aus dem Nachlasse Abel's hierüber publiziert worden sind (Oeuvres II, p. 233—243), höchst wahrscheinlich, dass schon Abel die fragliche Darstellung gekannt hat.

[2] Marb. Ber. 1892, p. 3; Algebra I, Abschn. 18.

handelt, so ist zunächst die zugehörige Gruppe zu bestimmen. Da die Gleichung irreduktibel sein soll, so lassen sich die Wurzeln in solcher Weise ordnen, dass für

$$(S) \qquad x_i' = x_{i+1}$$

$$(T) \qquad x_i' = x_{ig^e} \qquad (i=0,1,\ldots,p-1)$$

die Gruppe G des Körpers $R(x)$ durch die Substitutionen S und T erzeugt wird,[1] wobei die Indices nach dem Modul p genommen werden sollen, g eine Primitivzahl nach p, und e einen Teiler von $p-1$ bedeutet. Die Gruppe G hat dann die Gradzahl $\frac{p(p-1)}{e}$.

Die Grösse $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ bestimmt bekanntlich über den Körper der rationalen Zahlen einen Körper $k(\varepsilon)$ vom Grade $p-1$, dessen Gruppe durch die Substitution $U = (\varepsilon : \varepsilon^g)$ erzeugt wird. Der Einfachheit halber machen wir, falls nicht ausdrücklich anderes vorausgesetzt wird, die Annahme, im Rationalitätsbereiche R sei kein höherer Unterkörper von $k(\varepsilon)$ als der Körper der rationalen Zahlen enthalten. Der Körper $R(\varepsilon)$ über R hat dann ebenfalls den Grad $p-1$, und die Gruppe Γ dieses Körpers lässt sich durch U erzeugen.

Den gemeinsamen Unterkörper, welchen die über R aufgebauten Körper $R(x)$ und $R(\varepsilon)$ gemein haben, bezeichnen wir mit $R(\sigma)$, wo σ eine den Körper bestimmende Grösse bedeutet. Dieser Körper muss zu ausgezeichneten Untergruppen von sowohl G als Γ gehören, welche je von gleichem Index sein sollen. Die ausgezeichneten Untergruppen von G sind nun den Teilern von $\frac{p-1}{e}$ zugeordnet, so dass zu jedem solchen Teiler e_1 eine durch S und T^{e_1} erzeugte Gruppe gehört. Den gleichen Index e_1 besitzt die durch U^{e_1} erzeugte Untergruppe von Γ. Sowohl durch T als durch U wird offenbar die Reihe der zu σ conjugierten Grössen $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{e_1-1}$ cyklisch verschoben, und es giebt für $e_1 > 1$ immer eine Operation U^l, wo l eine relative Primzahl gegen e_1 sein muss, welche dieselbe Verschiebung wie T bewirkt.

Die Gruppe Δ des Körpers $R(x, \varepsilon)$ lässt sich durch die Substitutionen ausdrücken, denen bei ihr die den Körper bestimmenden Grössen x und ε unterworfen werden. Wie sofort ersichtlich, dürfen bei Δ nur solche Sub-

[1] Vergl. Galois, oeuvr., p. 47.

stitutionen in $R(x)$ und $R(\varepsilon)$ gleichzeitig ausgeführt werden, bei denen die Grösse σ in dieselbe conjugierte Grösse übergeführt wird. Umgekehrt muss auch Δ alle Operationen von dieser Eigenschaft enthalten, denn anderenfalls wäre der Grad von Δ nicht $\frac{p-1}{e_1}$ mal so gross als der Grad von G. Dies muss aber der Fall sein, weil der Körper $R(x, \varepsilon)$ in Bezug auf $R(x)$ den Relativgrad $\frac{p-1}{e_1}$ besitzt, welche Tatsache aus dem Umstande folgt, dass $R(x)$ keinen höheren Unterkörper von $R(\varepsilon)$ als $R(\sigma)$ vom Grade e_1 enthalten darf. Bezeichnen Σ bez. Σ_1 die beiden oben besprochenen ausgezeichneten Untergruppen von G bez. Γ, so lassen sich die $\frac{p(p-1)^2}{ce_1}$ Operationen von Δ in der folgenden Weise darstellen:

$$(\Sigma, \Sigma_1); (T\Sigma, U^l\Sigma_1); \ldots (T^{e_1-1}\Sigma, U^{l(e_1-1)}\Sigma_1), \tag{1}$$

wo die Substitutionen von Σ und Σ_1 auf alle möglichen Weisen kombiniert werden.[1]

§ 3. *Die Resolventen.*

Vermittelst der symmetrischen Funktion

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{p-1} = A$$

und der sogenannten LAGRANGE'schen Resolventen

$$(\varepsilon^i, x) = x_0 + \varepsilon^i x_1 + \ldots + \varepsilon^{i(p-1)} x_{p-1}$$

giebt man bekanntlich die Wurzeln der Gleichung in der Gestalt:

$$x_x = \frac{1}{p}\left[A + \sum_{i=1}^{i=p-1} \varepsilon^{-xi}(\varepsilon^i, x)\right]. \tag{2}$$

Man hat also in diesen Ausdrücken die p^{ten} Wurzeln aus den Grössen

$$\rho_i = (\varepsilon^i, x)^p$$

[1] In dem allgemeineren Falle, wo R einen Unterkörper von $k(\varepsilon)$ vom Grade δ enthält, hat man $\frac{p-1}{\delta}$ als Grad von $R(\varepsilon)$. Es muss dann e_1 auch Teiler von $\frac{p-1}{\delta}$ sein, und die Gruppe Δ besitzt den Grad $\frac{p(p-1)^2}{ce_1\delta}$.

zu ziehen. Wir wollen nun zunächst *die Gruppe des durch diese Grössen* ρ *bestimmten Körpers* $R(\rho)$ *ermitteln* und dann nachweisen, wie die Radikale (ε^i, x) durch ein einziges von ihnen und Grössen im Körper $R(\rho)$ sich rational ausdrücken lassen.

Erstere Aufgabe erledigen wir, indem wir untersuchen, welchen Einfluss die Substitutionen von Δ auf diese Grössen ρ ausüben. Bleiben nämlich alle Grössen ρ bei einer Untergruppe Δ_1, welche innerhalb Δ ausgezeichnet sein muss, invariant, so ist die fragliche Gruppe als Faktorgruppe $\frac{\Delta}{\Delta_1}$ zu charakterisieren. Hierbei haben wir, da S offenbar keine Vertauschung unter den ρ bewirkt, nur Substitutionen von der Gestalt $T^\lambda U^\mu$ in Betracht zu ziehen. Eine solche Operation führt

$$\rho_i = [x_0 + \sum \varepsilon^{ih} x_h]^p \tag{3}$$

in

$$[x_0 + \sum \varepsilon^{ihg^\mu} x_{hg^{e\lambda}}]^p = [x_0 + \sum \varepsilon^{ihg^{\mu - e\lambda}} x_h]^p = \rho_{ig^{\mu - e\lambda}} \tag{3'}$$

über. Nehmen wir noch auf den später zu beweisenden Satz Bezug, dass [für $\mu - e\lambda \not\equiv 0 \pmod{p-1}$] wenigstens zwei Grössen ρ_i und $\rho_{ig^{\mu-e\lambda}}$ von einander verschieden sind, so können wir jetzt den Satz aussprechen, dass *die Gruppe von* $R(\rho)$ *cyklisch ist und den Grad* $\frac{p-1}{e_2}$ *besitzt, wo* e_2 *den grössten Teiler von* $p-1$ *bedeutet, welcher bei jeder zulässigen Kombination von* μ *und* λ *in* $\mu - e\lambda$ *aufgeht.* Nach (1) ist $\mu = kl + k_1 e_1$, $\lambda = k + k_2 e_1$, also $\mu - e\lambda = k(l-e) + k_1 e_1 - k_2 e e_1$, wo die ganzen Zahlen k, k_1 und k_2 nach den bezüglichen Moduln e_1, $\frac{p-1}{e_1}$ und $\frac{p-1}{ee_1}$ beliebig genommen werden können. Hieraus ersieht man, dass e_2 *den grössten gemeinsamen Teiler von* e_1 *und* $e - l$ *darstellen muss.* Die Grössen ρ zerlegen sich in e_2 Systeme von je $\frac{p-1}{e_2}$ conjugierten Grössen, so dass die Grössen $\rho_i, \rho_{ig^{e_2}}, \ldots \rho_{ig^{p-1-e_2}}$ jedesmal zu demselben Systeme gehören, wobei natürlich die Indices $i, ig^{e_2}, \ldots$ nach dem Modul p zu nehmen sind.

Bei der Auflösung einer metacyklischen Gleichung vom Grade p sind also von Bedeutung:

1) die Gradzahl $\frac{p(p-1)}{e}$ der Gruppe der Gleichung; hier giebt es so viele Möglichkeiten, wie $p-1$ Teiler besitzt;

2) der Grad e_1 des gemeinsamen Unterkörpers von $R(x)$ und $R(\varepsilon)$; die Anzahl der Möglichkeiten ist hier gleich der Anzahl der verschiedenen Teiler von $\frac{p-1}{e}$;

3) für $e_1 > 1$ der Exponent l in der Operation TU^l, welche in der Gruppe des Körpers $R(x, \varepsilon)$ auftritt; da l nach dem Modul e_1, und zwar als relative Primzahl, zu nehmen ist, so giebt es hier $\varphi(e_1)$ Möglichkeiten.

Ist eine Grösse $\rho = 0$, so verschwinden nach den Grundsätzen der Galois'schen Gleichungstheorie auch die übrigen Grössen ρ, welche demselben conjugierten Systeme angehören. Es muss aber mindestens ein System von Grössen ρ geben, dessen Glieder nicht identisch verschwinden; anderenfalls wären ja nach (2) die Wurzeln x gleich gross und rational. Es lässt sich immer durch geeignete Wahl der Indices der Wurzeln erreichen, das $\rho_1 = (\varepsilon, x)^p$ nicht verschwindet.

Wir wollen jetzt beweisen, dass *die nicht verschwindende Grösse* ρ_1 bei keiner Operation von Δ, welche in Δ_1 nicht enthalten ist, ungeändert bleiben kann, also *eine primitive Grösse in dem zu* Δ_1 *gehörigen Unterkörper von* $R(x, \varepsilon)$ *darstellt,* so dass alle Grössen des fraglichen Unterkörpers sich rational durch ρ_1 ausdrücken lassen.

Nach (3) und (3') genügt es für unseren Beweis, falls wir nachweisen können, *dass* ρ_1 *von jeder anderen Grösse* ρ_i *verschieden sein muss.* Nun bleibt der Ausdruck

$$(4) \qquad \frac{(\varepsilon^i, x)}{(\varepsilon, x)^i}$$

sowohl bei S als bei jeder Operation von der Gestalt $T^\lambda U^{e\lambda}$, also bei allen in Δ_1 enthaltenen Operationen, invariant. Es gelten mithin Relationen von der Gestalt

$$(5) \qquad (\varepsilon^i, x) = r_i(\varepsilon, x)^i,$$

wo die r_i solche Grössen des Körpers $R(x, \varepsilon)$ bedeuten, welche die Operationen von Δ_1 zulassen. Wäre nun für ein besonderes i

$$(\varepsilon^i, x)^p = (\varepsilon, x)^p,$$

so hätten wir eine Relation

$$(\varepsilon^i, x) = \varepsilon^a(\varepsilon, x),$$

woraus nach (5)

$$(\varepsilon, x)^{i-1} r_i = \varepsilon^a.$$

Da

$$i \not\equiv 1 \pmod{p}$$

so lassen sich die ganzen Zahlen k und k_1 so bestimmen, dass

$$k(i-1) = 1 + k_1 p.$$

Aus der Relation

$(\varepsilon\,, x$ [illegible] ε [illegible]

würde man dann erhalten

$$(\varepsilon\,, x) = \rho_1^{-k_1} r_i^{-k} \varepsilon^{ka}.$$

Man hätte also für $(\varepsilon\,, x)$ einen Ausdruck, dessen sämmtliche Faktoren bei der Operation S ungeändert bleiben sollten. Dasselbe würde dann auf Grund der Relationen (5) für sämmtliche Resolventen $(\varepsilon^i\,, x)$ gelten, und mithin nach (2) für die Wurzeln x. Wir sind also durch unsere Annahme $\rho_1 = \rho_i$ auf die Ungereimtheit gestossen, dass die Wurzeln x die Operation S zulassen sollten.

Nach der jetzt bewiesenen Eigenschaft der Grösse ρ_1, dass sie eine primitive Grösse des zur Gruppe Δ_1 gehörigen Unterkörpers von $R(x\,, \varepsilon)$ liefert, können wir den Relationen (5) die folgende Form geben:

$$(6) \qquad (\varepsilon^i, x) = f_i(\rho_1)(\varepsilon\,, x)^i,$$

wo die f_i rationale Funktionen bedeuten. Führt man in einer Relation (6) die Substitutionen von Δ aus, so erhält man

$$(7) \qquad (\varepsilon^{ig^{\nu e_2}}, x) = f_i(\rho_{g^{\nu e_2}})(\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x)^i \qquad \left(\nu = 0\,, 1\,, \ldots, \frac{p-1}{e_2} - 1\right),$$

und zwar hat man $p-2$ solche Systeme von Relationen (7), da man in (6) für i irgend eine von den Zahlen $2\,, 3\,, \ldots, p-2$ setzen kann.

§ 4. *Die Wurzelformen.*

Die folgenden Relationen erhält man direkt aus (6) und (7), indem man die Bezeichnungsweise etwas ändert:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&(\varepsilon^{g^{e_2}}, x)(\varepsilon\,, x)^{-g^{e_2}} &&= k_0;\\
&(\varepsilon^{g^{2e_2}}, x)(\varepsilon^{g^{e_2}}, x)^{-g^{e_2}} &&= k_1;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(\varepsilon\,, x)(\varepsilon^{g^{p-1-e_2}}, x)^{-g^{e_2}} &&= k_{\frac{p-1}{e_2}-1}
\end{aligned}
$$

Hierbei ist, wenn $k_0 = k(\rho_1)$ gesetzt wird,

$$k_i = k(\rho_{g^{ie_2}}),$$

so dass die k_i ein System von conjugierten Grössen des Körpers $R(\rho)$ bilden.

Wenn wir diese Funktionen $k_0, k_1, \dots, k_{\frac{p-1}{e_2}-1}$ der Reihe nach zu den Potenzen $g^{p-1-e_2}, g^{p-1-2e_2}, \dots 1$ erheben und dann multiplizieren, so heben sich im Produkt der linken Seite von (8) alle Resolventen mit Ausnahme von (ε, x) heraus, und man bekommt

$$
(9)\qquad (\varepsilon\,, x)^{1-g^{p-1}} = k_0^{g^{p-1-e_2}} k_1^{g^{p-1-2e_2}} \dots k_{\frac{p-1}{e_2}-1}
$$

Wir wählen g, was immer möglich ist, so, dass

$$g^{p-1} - 1 \equiv -p \pmod{p^2}.$$

Es sei nämlich für eine besondere Primitivzahl g_1 nach p

$$g_1^{p-1} - 1 \equiv lp \pmod{p^2}.$$

Wir setzen dann

$$g = g_1 + mp,$$

so dass

$$g^{p-1} - 1 \equiv g_1^{p-1} - 1 + m(p-1)g_1^{p-2}p \equiv (l - mg_1^{p-2})p \pmod{p^2},$$

und es lässt sich immer eine ganze Zahl m so bestimmen, dass die Kongruenz

$$l - mg_1^{p-2} \equiv -1 \pmod{p}$$

befriedigt wird.

Nachdem wir durch die Relationen:

$$1 - g^{p-1} = p - hp^2\,;\ g^\nu = pq_\nu + r_\nu\,,\ 0 < r_\nu < p \qquad (\nu = 0, 1, \dots, p-1)$$

die ganzen Zahlen h, q_ν und r_ν ermittelt haben, setzen wir

$$(\varepsilon\,, x)^{hp} k_0^{q_{p-1-e_2}} k_1^{q_{p-1-2e_2}} \dots = K_0(\rho_1).$$

Es geht dann (9) in

$$(10) \qquad (\varepsilon\,, x)^p = [K_0(\rho_1)]^p k_0^{r_{p-1-e_2}} k_1^{r_{p-1-2e_2}} \dots k_{\frac{p-1}{e_2}-1}$$

über.

Es lässt sich beweisen, dass *die Grössen k_i primitive Grössen des Körpers $R(\rho)$ darstellen,* so dass keine zwei unter ihnen einander gleich sein können. Gehörten nämlich diese Grössen schon zu einem Unterkörper von $R(\rho)$ vom etwaigen Index $\frac{p-1}{e_2 e_3}$, so würden sie die Substitution $(\rho_1 : \rho_{g^{e_2 e_3}})$ zulassen. Man hätte also

$$k_i = k_{i+e_3} = k_{i+2e_3} = \dots = k_{i+\frac{p-1}{e_2}-e_3},$$

wo wir $i < e_3$ annehmen wollen. In (9) wäre mithin k_i zu der Potenz

$$g^{p-1-ie_2} + g^{p-1-ie_2-e_3e_2} + \dots + g^{e_3e_2-ie_2}$$

erhoben. Diese Summe ist aber durch p teilbar. Es sind ja die betreffenden $\frac{p-1}{e_2 e_3}$ Glieder Wurzeln der Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{e_2 e_3}} \equiv g^{\frac{(e_3-i)(p-1)}{e_3}} \pmod{p}.$$

Offenbar ist dann auch die Summe der zugehörigen Reste

$$r_{p-1-ie_2} + r_{p-1-ie_2-e_3e_2} + \dots + r_{e_3e_2-ie_2}$$

durch p teilbar. Man würde also, falls man in (10) beiderseits die p^{ten} Wurzeln auszieht, für $(\varepsilon\,, x)$ einen rationalen Ausdruck durch ε und Grössen des Körpers $R(\rho)$ erhalten. Wir hatten aber schon im vorigen Paragraphen Gelegenheit, den Widerspruch bei einer solchen Folgerung hervorzuheben.

Werden in (10) die Substitutionen von Δ ausgeführt, so erhält man $\frac{p-1}{e_2} - 1$ neue Relationen:

$$(11) \qquad (\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x)^p = [K_0(\rho_{g^{\nu e_2}})]^p \, k_\nu^{r_{p-1-e_2}} k_{\nu+1}^{r_{p-1-2e_2}} \dots k_{\nu-1} \qquad \left(\nu = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{e_2} - 1\right),$$

wo die Indices $\nu + i$ nach dem Modul $\frac{p-1}{e_2}$ genommen werden.

Schreiben wir zur Abkürzung

$$(12) \qquad \tau_\nu = k_\nu^{\frac{1}{p}},$$

so ergiebt sich aus (10), indem man rechts und links die p^{ten} Wurzeln auszieht,

$$(13) \qquad (\varepsilon, x) = K_0(\rho_1) \, \tau_0^{r_{p-1-e_2}} \tau_1^{r_{p-1-2e_2}} \dots \tau_{\frac{p-1}{e_2}-1}$$

In entsprechender Weise erhalten wir aus (11)

$$(14) \qquad (\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x) = K_0(\rho_{g^{\nu e_2}}) \, \tau_\nu^{r_{p-1-e_2}} \tau_{\nu+1}^{r_{p-1-2e_2}} \dots \tau_{\nu-1} \qquad \left(\nu = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{e_2} - 1\right),$$

wo die Radikale τ_ν in derselben Weise genommen werden können wie in (13). Nach (8) hat man ja

$$(\varepsilon^{g^{\nu e_2}}, x)(\varepsilon, x)^{-g^{\nu e_2}} = k_{\nu-1} k_{\nu-2}^{g^{e_2}} \dots k_0^{g^{(\nu-1)e_2}}.$$

Man ersieht aber aus den in diesem Paragraphen gegebenen Relationen leicht, dass diese Identität nicht bestehen würde, falls bei der obigen Wahl der τ_ν auf der rechten Seite von (14) noch eine Potenz von ε als Faktor hinzukäme.

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für jede Resolvente (ε^i, x). Zunächst lässt sich setzen

$$i \equiv g^{\mu+\nu e_2} \pmod{p} \qquad \left[0 \leqq \mu < e_2, \qquad 0 \leqq \nu < \frac{p-1}{e_2}\right].$$

Aus den Relationen (6), (7), (13) und (14) erschliesst man dann, dass Identitäten von der Gestalt

$$(15) \qquad (\varepsilon^{g^{\mu+\nu e_2}}, x) = K_\mu(\rho_{g^{\nu e_2}}) \, \tau_\nu^{r_{p-1-e_2+\mu}} \tau_{\nu+1}^{r_{p-1-2e_2+\mu}} \dots \tau_{\nu-1}^{r_\mu}$$

bestehen müssen, wo eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen den e_2 Funktionen $K_0, K_1, \ldots, K_{e_2-1}$ nicht stattfindet. Der Wurzelausdruck (2) nimmt jetzt die folgende Gestalt an:

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{p}\left[A + \sum_{\mu=0}^{\mu=e_2-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{p-1}{e_2}-1} K_\mu(\rho_{g^{\nu e_2}}) \prod_{i=0}^{i=\frac{p-1}{e_2}-1} \tau_{\ldots}^{r_{p-1-(i+1)e_2+\mu}}\right].$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass (16) in einen Ausdruck von derselben Schreibweise übergeht, falls man irgend eine Operation der Gruppe Δ ausführt. Man findet auch, dass der Ausdruck nur p Werte annehmen kann, wie man auch die Radikale $k_\nu^{\frac{1}{p}} = \tau_\nu$ bestimmen mag. In der Tat, multipliziert man das Radikal τ_ν mit dem Faktor $e^{\frac{2k\pi i}{p}}$, so hat dies dieselbe Wirkung, als ob man dem Radikale τ_0 den Faktor $e^{\frac{2k\pi i}{p} r_{p-1-\nu e_2}}$ hinzufügt. *Man erhält mithin alle möglichen Werte von* (16), *indem man unter beliebiger Fixierung der übrigen Radikale dem Radikal τ_0 seine p verschiedenen Werte beilegt.*

Bei seiner Herleitung der Wurzelform betrachtet Herr Weber zunächst $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ als unabhängige Variable. Erst nachdem die nötigen Sätze über die Lagrange'schen Resolventen entwickelt worden sind, macht er die Festsetzung, dass die Variablen x die Wurzeln einer irreduktibeln metacyklischen Gleichung vom Grade p sein sollen. In solcher Weise erhält er eine in allen Fällen gültige, von der Rolle, welche die p^{ten} Einheitswurzeln gegenüber dem Körper $R(x)$ spielen, unabhängige Wurzelform, und zwar von der Gestalt (16) für den speciellen Fall $e_2 = 1$. Diese Verschiedenheit in den Endresultaten darf natürlich nur scheinbar sein. Bei Herrn Weber sind die $p-1$ Grössen $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}$ die Wurzeln einer cyklischen Gleichung. Diese Gleichung braucht aber nicht irreduktibel zu sein, sondern kann in e_2 verschiedene Faktoren zerfallen, wo e_2 einen beliebigen Teiler von $p-1$ bedeuten kann. Der Körper, welchem die Grössen k_i angehören, besitzt mithin den Grad $\frac{p-1}{e_2}$. Wollte man nun die in der Wurzelform des Herrn Weber auftretenden Grössen k_i und K_i durch ein conjugiertes System von $\frac{p-1}{e_2}$ Grössen des fraglichen Körpers darstellen, so würde man eben auf unsere Fallunterscheidungen gelangen, so weit sie in (16) ihren Ausdruck finden.

Es drängt sich noch die Frage auf, wie man, wenn die Grössen k_i oder ρ_i gegeben sind, also aus der Beschaffenheit einer Wurzelform (16), die Eigenschaften des zugehörigen Körpers $R(x)$ ablesen kann. In erster Linie handelt es sich dabei um den Grad $\frac{p(p-1)}{e}$ der Gruppe G, sowie um den Grad e_1 des gemeinsamen Unterkörpers $R(\sigma)$ von $R(x)$ und $R(\varepsilon)$.

Die Erledigung dieser Fragen beruht auf zweierlei Erwägungen. Zunächst lässt sich beweisen, dass der gemeinsame Unterkörper $R(\eta)$ von $R(\rho)$ und $R(\varepsilon)$ den Grad $\frac{ee_1}{e_2}$ besitzt. In der Tat muss jede Operation derjenigen Untergruppe Δ_2 von Δ, zu welcher der Körper $R(\eta)$ gehört, sich durch Kombination zweier Operationen erzeugen lassen, von denen eine auf die Grössen in $R(\rho)$, die andere auf die Grössen in $R(\varepsilon)$ keinen Einfluss übt. Hieraus erschliesst man, dass Δ_2 sich durch Kombination von Δ_1 und T^{e_1} erzeugen lässt und folglich als Untergruppe von Δ den Index $\frac{ee_1}{e_2}$ besitzen muss. Diesen Umstand können wir benutzen, um das Produkt ee_1 zu ermitteln.

Als Unterkörper von $R(\rho)$ gehört $R(\eta)$ zu der durch die Substitution $(\rho_1 : \rho_{g^{e e_1}})$ erzeugten Gruppe. Nun wissen wir aus § 3, dass eine Operation $T^\lambda U^\mu$, welche ja ε durch ε^{g^μ} ersetzt, ρ_1 in $\rho_{g^\mu - e\lambda}$ überführt. In Bezug auf die Grössen des Körpers $R(\eta)$ ist also die Operation nur dann mit $(\rho_1 : \rho_{g^\mu})$ äquivalent, wenn λ durch e_1 teilbar ist. Dann soll aber e_1 ebenfalls Teiler von μ sein, und wir haben, um e_1 zu bestimmen, nur darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Operationen $(\rho_1 : \rho_{g^{e_1}})$ und $(\varepsilon : \varepsilon^{g^{e_1}})$ dieselbe Umordnung unter den Grössen des Körpers $R(\eta)$ bewirken, und dass es für $\delta < e_1$ kein Paar in solcher Weise äquivalenter Operationen $(\rho_1 : \rho_{g^\delta})$ und $(\varepsilon : \varepsilon^{g^\delta})$ giebt.[1]

§ 5. *Rationale Transformation der Wurzeln.*

Wir können die K_μ und k_ν als ganze Funktionen der jedesmal zugehörigen Grösse ρ annehmen; nach bekannten Methoden kann man ja die Nenner rational machen. Etwaige Faktoren, welche zur p^{ten} Potenz in den k_ν auftreten, lassen sich aus dem Wurzelzeichen entfernen und den Funktionen K_μ zufügen. Allerdings erreicht man hiermit nicht immer eine ein-

[1] Vergl. Kronecker, Berl. Ber. (1856), p. 214.

zige bestimmte Normalform für die Funktionen k_ν, wie Verhältnisse bei Zahlkörpern lehren, welche ausser Hauptidealen noch Nebenideale besitzen. Da die Grössen ρ eine Gleichung von Grade $\frac{p-1}{e_1}$ befriedigen, so kann man die Funktionen K_μ und k_ν als höchstens vom Grade $\frac{p-1}{e_1} - 1$ betrachten. Die e_2 Funktionen K_μ enthalten also als Koefficienten der Potenzen der bezüglichen Grössen ρ insgesammt $p - 1$ rationale Parameter.

Unterwirft man nun die Wurzeln x einer rationalen Transformation

$$(17) \qquad y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1},$$

so ersieht man ohne Schwierigkeit, dass die y sich in eben derselben Gestalt (16) wie die x ausdrücken lassen, doch so, dass bei ungeändert gebliebenen k_ν die K_μ in andere Funktionen übergeführt werden. Da die Transformation (17) p rationale Parameter enthält, so kann man dem Ausdruck, in welchen (16) übergeht, p Bedingungen auferlegen, z. B.:

$$(18) \qquad A = 0\,;\; K_0 = 1\,;\; K_1 = K_2 = \ldots = K_{e_2-1} = 0\,.$$

In der Tat hat man, um diese Bedingungen zu erfüllen, nur ein System von p linearen Gleichungen für $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ aufzulösen, und die Determinante dieses Systems darf nicht verschwinden, weil dann eine Wurzel x einer Relation von niedrigerem als dem p^{ten} Grade genügen sollte. *Da also die metacyklischen Körper von Primzahlgrad nur von der Art abhängen, wie das conjugierte System von Funktionen k_ν gewählt wird, welche ihrerseits zu cyklischen Körpern niedrigeren Grades gehören, so haben wir hier ein geeignetes Mittel, um alle metacyklischen Zahlkörper von Primzahlgrad aufzustellen und zu klassifizieren, sowie die Kompositionseigenschaften zweier Körper zu studieren, welche in Bezug auf einen gemeinsamen Unterkörper relativ-*Abel'sch *sind.* Bei Benutzung dieses Ausgangspunktes wird man ohne Zweifel die schönen Resultate verallgemeinern können, welche zuerst von Kronecker und dann von den Herren Weber und Hilbert über die Abel'schen Zahlkörper gegeben worden sind.

DEUX THÉORÈMES D'ABEL SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES

PAR

M. HADAMARD

À PARIS.

On sait comment ABEL a fait entrer l'étude de la convergence des séries dans une voie nouvelle en montrant[1] l'impossibilité d'obtenir, par une règle unique, une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Le résultat qu'il a établi peut s'énoncer ainsi:

I. Etant donnée la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

à termes positifs et divergentee, on peut toujours trouver une suite de nombres positifs

$$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{2}$$

tendant vers zéro, par lesquels on peut multiplier respectivement les termes de cette série, sans que la nouvelle série ainsi obtenue

$$\xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n + \ldots \tag{1'}$$

soit convergente.

Inversement, d'ailleurs,

II. Etant donnée une série convergente à termes positifs, on peut toujours trouver une suite de nombres positifs indéfiniment croissants par lesquels on peut multiplier respectivement les termes de cette série sans la rendre divergente.

[1] *Note sur le mémoire n° 4 du second tome du journal de M. Crelle, ayant pour titre »Remarques sur les séries infinies et leur convergence«.* — *Oeuvres*, tome I, pp. 111—113 de la première édition.

Et ces deux propositions admettent à leur tour la réciproque commune

III. A toute suite

$$(2) \qquad \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

de nombres positifs qui croissent indéfiniment, on peut faire correspondre une suite de nombres positifs $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, tels que la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ soit convergente et la série $\xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n + \ldots$ divergente.

Il est d'ailleurs clair que ceci resterait vrai lors même qu'une partie seulement de ξ irait en croissant indéfiniment, les autres restant finis.

Je me suis occupé précédemment[1] de généraliser ces résultats à l'aide de ceux qu'a obtenus du Bois-Reymond; et l'on sait que, depuis, M. Borel a repris avec succès cet ordre de recherches.[2] Je ne sais s'il a été remarqué que la question peut recevoir une extension de nature différente. Si, en effet, on remarque que la convergence absolue de la série

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

entraîne celle de la série (1′) lorsque les ξ sont finis, on voit que la proposition III peut s'énoncer ainsi:

La condition nécessaire et suffisante que doivent remplir les nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *pour que la convergence absolue de la série* (1) *entraîne nécessairement celle de la série* (1′), *est que tous ces nombres* ξ_n *soient inférieurs en valeur absolue à une limite fixe.*

Cette proposition conduit dès lors à poser la question suivante:

Comment doit être choisie la suite

$$(2) \qquad \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$$

pour que toute série (1) *convergente* (absolument ou non) *donne, lorsqu'on multiplie ses termes respectivement par* $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *une série* (1′) *également convergente?*

[1] Acta Mathematica, tome 18; 1894.

[2] Indépendamment des résultats que M. Borel avait obtenus dans ses travaux précédents, ses récentes *Leçons sur les séries à termes positifs* contiennent un ensemble de vues nouvelles et importantes sur ces questions.

Or un autre théorème bien connu d'Abel, le théorème III de ses *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 . 2}x^2 + \frac{m(m-1 . m-2)}{1 . 2 . 3}x^3 + \ldots$,[1] montre immédiatement la catégorie des suites (2) qui jouissent de la propriété en question comme bien plus étendue qu'on n'aurait pu le supposer au premier abord. Il fait voir, en effet, que la convergence est toujours conservée si les multiplicateurs (2) sont des nombres positifs décroissants; et la même transformation qui conduit Abel a ce résultat montre[2] que cette propriété subsiste dès que la série

$$(3) \qquad \xi_0 + (\xi_1 - \xi_0) + (\xi_2 - \xi_1) + \ldots + (\xi_{n+1} - \xi_n) + \ldots$$

est absolument convergente.

Au reste, il faut remarquer que ce résultat n'est pas essentiellement distinct de celui d'Abel; car si la série (3) est absolument convergente, la quantité ξ_n (supposée réelle) peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \xi_n = A + \xi'_n - \xi''_n$$

où ξ'_n d'une part, ξ''_n de l'autre, désignent des nombres positifs décroissants pendant que A est une constante.

Je dis que *la condition ainsi trouvée comme suffisante est en même temps nécessaire.*

Supposons, en effet, qu'elle ne soit pas remplie et que la série (3) ne soit pas absolument convergente. Nous pouvons, néanmoins, admettre que ξ_n reste fini (sans quoi nous savons que la suite (2) ne possèderait pas la propriété qui nous intéresse, même pour les séries à termes positifs). Alors, si nous désignons par i, d'une manière générale, les valeurs de n pour lesquelles $\xi_{n+1} - \xi_n$ est positif, et par k celles pour lesquelles cette même quantité est négative, la série à termes positifs

$$\sum(\xi_{i+1} - \xi_i)$$

et la série à termes négatifs

$$\sum(\xi_{k+1} - \xi_k)$$

[1] *Oeuvres,* tome I, page 69 de la première édition; page 222 de l'édition Sylow et Lie.

[2] Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3e édition, suppl. IX, § 143. — Voir Pringsheim, Encyclopädie der Mathem. Wissenschaften, I A 3, p. 94.

seront divergentes. D'après le théorème I, nous pourrons, sans les rendre convergentes, multiplier les termes de la première par des quantités positives t_i qui tendent vers zéro, et les termes de la seconde par des quantités négatives t_k qui tendent également vers zéro. Dans ces conditions, la somme

$$(\xi_1 - \xi_0)t_0 + (\xi_1 - \xi_2)t_1 + \ldots + (\xi_{n+1} - \xi_n)t_n$$

augmentera indéfiniment avec n.

Or par la transformation d'Abel, cette somme s'écrit

$$-\xi_0 t_0 + \xi_1(t_0 - t_1) + \xi_2(t_1 - t_2) + \ldots + \xi_n(t_{n-1} - t_n) + \xi_{n+1}t_n$$

et l'on peut y faire abstraction du premier terme ainsi que du dernier, puisque ξ_n est fini et t_n infiniment petit. Il apparaît alors que la suite (2) ne répond pas à la question, puisque la série $\sum(t_{n-1} - t_n)$ est convergente et la série $\sum \xi_n(t_{n-1} - t_n)$ divergente.

Donc *la condition nécessaire et suffisante cherchée est que la série* (3) *soit absolument convergente.*

Rien n'est d'ailleurs changé à cette conclusion si l'on suppose ξ_n imaginaire, soit

$$\xi_n = \eta_n + i\zeta_n.$$

D'une part, en effet, la convergence absolue de la série $\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)$ entraîne celle des séries $\sum(\eta_{n+1} - \eta_n)$, $\sum(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$. D'autre part, lorsqu'on suppose les u réels, la convergence de la série $\sum \xi_n u_n$ exige celle des séries $\sum \eta_n u_n$, $\sum \zeta_n u_n$, de sorte que la suite des η_n et celle des ζ_n doivent satisfaire séparément à la condition qui vient d'être trouvée.

En demandant que la convergence de la série (1) entraîne celle de la série (1′) on peut aussi demander, en outre, que, réciproquement, la convergence de celle-ci entraîne celle de la série (1). Alors, à la condition que la série (3) soit absolument convergente, il faudra évidemment ajouter celle que sa somme soit différente de zéro. La double condition ainsi obtenue est d'ailleurs suffisante, car, si $\lim \xi_n \neq 0$, la convergence absolue de la série (3) entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum\left(\frac{1}{\xi_{n+1}} - \frac{1}{\xi_n}\right) = \sum \frac{\xi_n - \xi_{n+1}}{\xi_n \xi_{n+1}}.$$

(D'une manière générale, si la fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ admet des dérivées finies, la convergence absolue des séries $\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)$, $\sum(\eta_{n+1} - \eta_n)$, $\sum(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$ entraîne, en vertu de la formule des accroissements finis, celle de la série $\sum[\varphi(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}, \zeta_{n+1}) - \varphi(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)]$).

Considérons, par exemple, la série qu'a formée Abel dans son Mémoire *sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes*[1] et qui a été étudiée par Halphen dans le tome 18 du *Bulletin de la Société Mathématique de France*.[2]

Halphen constate (au n° 3 de son Mémoire) que le terme général de cette série est de la forme $\left(A + \frac{B}{n} + \frac{b_n}{n^2}\right) u_n$, où A est indépendant de n et où b_n reste fini, les nombres A et B étant d'ailleurs fonctions de la variable x; et il en déduit que la série $\sum u_n$ est nécessairement convergente si la série d'Abel converge pour deux valeurs de x qui donnent au rapport $\frac{B}{A}$ des valeurs différentes.

Nous voyons qu'une telle restriction est inutile. La série

$$\sum \left| \left(A + \frac{B}{n} + \frac{b_n}{n^2}\right) - \left(A + \frac{B}{n+1} + \frac{b_{n+1}}{(n+1)^2}\right) \right|$$

étant absolument convergente, la convergence de la série donnée ne pourra avoir lieu pour aucune valeur de x n'annulant pas A (c'est à dire, ici, pour aucune valeur de x différente de zéro), si la série $\sum u_n$ n'est pas convergente. Comme la particularité $A = 0$ qui se présente pour $x = 0$ est due à ce que tous les termes de la série d'Abel (à l'exception du premier) contiennent x en facteur, si nous supprimons ce facteur, nous voyons que la série converge alors pour toutes les valeurs données à x ou ne converge pour aucune.

Nous sommes d'ailleurs à même d'indiquer tous les cas où la série de polynômes

$$\sum_{n}^{\prime} a_n P_n(x)$$

(dans laquelle les P_n sont des polynômes déterminés et les a_n des constantes arbitraires) possède cette propriété de la série d'Abel: je veux dire

[1] *Oeuvres*, tome II, p. 82 de la 1re édition; p. 73 de la 2e.

[2] p. 67 et suiv.; 1882.

où, pour tout choix des a_n, il y a nécessairement, soit convergence pour toute valeur de x, soit divergence pour toute valeur de x. C'est ce qui aura lieu lorsque la série dont le terme général est

$$(4) \qquad \frac{P_{n+1}(x')}{P_{n+1}(x)} - \frac{P_n(x')}{P_n(x)}$$

sera absolument convergente, quels que soient x et x'. Il est évidemment nécessaire, pour cela, que $P_n(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$P_n(x) = \mu_n \sum_{k=1}^{n} p_k(x),$$

les μ_n étant des constantes quelconques et

$$p_1(x) + p_2(x) + \ldots + p_n(x) + \ldots$$

une série de polynômes absolument convergente dans tout le plan et dont la somme ne s'annulle jamais. Cette condition est, d'ailleurs, suffisante. Car, d'après une remarque faite plus haut, la convergence absolue des séries $\sum[P_{n+1}(x) - P_n(x)]$, $\sum[P_{n+1}(x') - P_n(x')]$ (les sommes de ces séries étant différentes de zéro) entraîne la convergence absolue de la série (4).

Quoiqu'il soit, comme on le voit, bien aisé d'obtenir la forme générale des polynômes P_n, ceux-ci présenteraient peut-être quelques propriétés intéressantes: le fait que $\frac{P_n(x')}{P_n(x)}$ a une limite semble, par exemple, montrer que leurs zéros vont, en général, en augmentant tous indéfiniment, ainsi qu'il arrive pour la série d'Abel.

On peut remarquer que, si les quantités *réelles* ξ_n tendent vers une limite ξ, on peut toujours les ranger dans un ordre tel que la série $\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)$ soit absolument convergente. Cela est évident si les ξ_n tendent vers ξ par valeurs toutes inférieures ou toutes supérieures; dans le cas contraire, il suffira (ξ étant supposé égal à zéro pour simplifier le langage) de ranger par ordre de grandeur décroissante les termes positifs, par ordre de grandeur croissante les termes négatifs et de ne passer de l'un des groupes à l'autre qu'à des intervalles assez éloignés pour que la série formée par les termes de passage soit absolument convergente.

Il en est tout autrement dans le domaine complexe. Soient, par exemple, $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ les termes (constamment décroissants) d'une

série divergente à termes positifs. Décrivons, d'un même point comme centre, des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ de rayons respectifs $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$, et, dans le cercle C_p, inscrivons un polygone régulier d'un nombre de côtés assez grand pour que chaque côté soit inférieur à la plus petite des différences $E_{p-1} - E_p$, $E_p - E_{p+1}$. Alors, si nous désignons par $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N, \ldots$ les sommets de ces différents polygones, rangés dans un ordre quelconque, toute ligne brisée assujettie à la condition de passer par tous ces points devra avoir une longueur supérieure à la somme des périmètres des polygones, laquelle croît indéfiniment.

Par contre, il peut se faire que, pour n'importe quel ordre assigné aux ξ, la série (3) soit absolument convergente. C'est ce qui aura lieu évidemment si la série $\sum(\xi - \xi_n)$ converge absolument, et dans ce cas seulement.

QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET LEURS APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES TRANSCENDANTES

PAR

CARL STÖRMER

À CHRISTIANIA.

Dans plusieurs recherches des mathématiques modernes concernant la théorie des fonctions, la théorie des équations différentielles, même la géométrie et la mécanique on est souvent arrêté par des difficultés considérables provenant de questions d'une nature purement arithmétique qui paraissent au premier abord tout-à-fait étrangères au sujet.

Il est aisé d'en donner des exemples. Le plus célèbre est ce problème géométrique de la quadrature du cercle dont la solution définitive fut donnée en 1882 par la démonstration de la transcendance du nombre π, question d'une nature exclusivement arithmétique.

Pour en rappeler d'autres, citons le problème de la réduction des intégrales abéliennes, problème abordé par ABEL[1] et traité depuis par plusieurs des mathématiciens les plus célèbres, et dont l'importance est bien mise en évidence p. ex. dans les recherches modernes sur les équations différentielles. Ainsi on y revient[2] quand on cherche la condition pour que l'intégrale d'une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$F(y', y) = 0$$

[1] Journal de Crelle, T. I., 1826.

[2] Voir PAINLEVÉ: *Cours professé à Stockholm*, p. 138–141.

où la variable x ne figure pas explicitement, soit une fonction de x à un nombre fini, *non donné* de déterminations. D'après M. PAINLEVÉ[1], ce problème est bien loin d'être résolu; on est arrêté ici par des obstacles insurmontables, dus à des questions d'une nature arithmétique et c'est seulement dans les cas très particuliers traités par TCHÉBYCHEFF[2] et ZOLOTAREFF[3], qu'on a réussi à en triompher.

De même la question de décider si une équation différentielle admet des solutions périodiques, question qui se pose p. ex. dans les recherches de la mécanique céleste (Problèmes des trois corps etc.) revient à des considérations analogues. Pour voir comment s'introduisent ici des recherches arithmétiques il suffit de renvoyer au mémoire de M. IVAR BENDIXSON: *Sur les équations différentielles à solutions périodiques*[4].

On doit à M. BOREL plusieurs exemples qui mettent en évidence le rôle que peuvent jouer les constantes d'une nature arithmétique particulière. Ainsi, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2u}{dx^2} - a^4\frac{d^2u}{dy^2} = f(x, y)$$

où $f(x, y)$ est une certaine fonction *analytique* de x et de y et où a est un nombre transcendant convenablement choisi, peut avoir cette propriété remarquable, qu'elle n'admet qu'une seule solution périodique u et cette solution est une fonction *non analytique*[5] de x et de y.

La théorie de la convergence des séries, p. ex. la théorie du développement des fonctions méromorphes en série de fonctions rationnelles, donne naissance à des considérations analogues[6].

En tout cas, l'étude des nombres incommensurables surtout au point de vue de leur transcendance forme une des branches les plus difficiles mais

[1] Voir l. c. p. 11 et 141.

[2] Journal de Liouville 1884.

[3] Bulletin des Sciences mathématiques 1879, p. 475—478.

[4] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar 1896. Stockholm.

[5] Voir diverses notes de M. BOREL dans les *Comptes Rendus* 1895 et 1899, et aussi E. PICARD: *Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique* Paris 1900, p. 22.

[6] Voir HADAMARD: *L'intermédiaire des mathématiciens* 1900, p. 32, et BOREL: *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes*, Annales de l'École Normale 1901, p. 234 etc.

aussi des plus attrayantes de l'arithmétique moderne. Dans ce qui suit nous allons donner une petite contribution à cette théorie en développant quelques propriétés arithmétiques des fonctions et des intégrales elliptiques.

1. Limite supérieure de l'expression $|\psi_n|$ dans la théorie de la fonction elliptique $\wp(u)$ de Weierstrass.

Considérons la fonction $\wp(u) = y$ de *Weierstrass,* définie par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \tag{1}$$

avec la condition initiale $y = \infty$ pour $u = 0$.

Comme on le sait, la formule de multiplication de l'argument donne, pour n entier, $\wp(nu)$ comme fonction rationnelle aux coefficients commensurables de $\wp(u)$, g_2 et g_3. En effet, on a[1]

$$\wp(nu) - \wp(u) = -\frac{\psi_{n+1} \cdot \psi_{n-1}}{\psi_n^2} \tag{2}$$

où les expressions ψ sont définies par les relations récurrentes

$$\psi_{2n} = -\frac{\psi_n}{p'}\left[\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2\right]$$

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3 \tag{3}$$

jointes aux relations initiales

$$\psi_1 = 1\,,\ \psi_2 = -p'$$

$$\psi_3 = 3p^4 - 6g_2'p^2 - 3g_3 p - g_2'^2$$

$$\psi_4 = -p'[2p^6 - 10g_2'p^4 - 10g_3p^3 - 10g_2'^2p^2 - 2g_2g_3p - g_3^2 - 2g_2'^3$$

où nous avons mis pour abréger:

$$\wp(u) = p, \qquad \frac{d\wp(u)}{du} = p', \qquad \frac{g_2}{4} = g_2'.$$

On voit par ces formules que $\frac{\psi_{2n}}{p'}$ et ψ_{2n+1} sont des polynômes à coefficients *entiers* de p, g_2' et g_3.

---

[1] Voir p. ex. HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques* I, chapitre IV.

Supposons que $\wp$, g_2 et g_3 aient des valeurs finies données et cherchons une limite *supérieure* pour le module $|\psi_n|$ de ψ_n.

Appelons τ_n le plus grand des nombres

$$|\psi_1|, |\psi_2|, \ldots, |\psi_n|$$

et soit d'abord p' différent de zéro. Alors les formules (3) donnent immédiatement

$$|\psi_{2n+1}| < 2 \cdot \tau_{n+2}^4 \quad < \lambda\tau_{n+2}^4$$

$$|\psi_{2n}| \quad < \frac{2}{|p'|} \cdot \tau_{n+2}^4 < \lambda\tau_{n+2}^4$$

$$|\psi_{2n-1}| < 2\tau_{n+1}^4 \qquad < \lambda\tau_{n+2}^4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où λ est une constante indépendante de n. On en tire que $\tau_{2n+1} < \lambda\tau_{n+2}^4$, d'où en remplaçant n par $n+1$ et en prenant les logarithmes népériens

$$\log \tau_{2n+3} < \log \lambda + 4 \log \tau_{n+3}. \tag{4}$$

Dans le cas où $p' = 0$, tous les ψ_{2n} seront nuls et l'inégalité $|\psi_{2n+1}| < 2\tau_{n+2}^4$ conduit au même résultat.

Cela posé, soit

$$2^{m-1} + 3 < n \leqq 2^m + 3,$$

m étant entier positif. L'inégalité (4) donne successivement

$$\log \tau_{2^m+3} \quad < \log \lambda + 4 \log \tau_{2^{m-1}+3}$$

$$\log \tau_{2^{m-1}+3} < \log \lambda + 4 \log \tau_{2^{m-2}+3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log \tau_5 < \log \lambda + 4 \log \tau_4.$$

En multipliant ces inégalités respectivement par $1, 4, 4^2, \ldots, 4^{m-1}$ et en ajoutant on obtient

$$\log \tau_{2^m+3} < \frac{4^m - 1}{3} \log \lambda + 4^m \log \tau_4 < K \cdot 2^{2m},$$

K étant indépendant de n.

Mais

$$\tau_n < \tau_{2^m}$$

et

$$2^{2m} < 4n^2$$

ce qui donne l'inégalité cherchée

(5) $$|\psi_n| < \tau_n < e^{an^2},$$

a étant une constante qui ne dépend que des valeurs données à p, g_2 et g_3 et non de n.

2. **Limites supérieures et inférieures de $|p(nu)|$, quand g_2, g_3 et $p(u)$ sont des nombres algébriques donnés.**

Supposons que g_2, g_3 et $\wp(u)$ soient des nombres algébriques donnés, racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Comme on le sait[1], il est toujours possible d'assigner un nombre algébrique auxiliaire V tel que g_2, g_3 et $\wp(u)$ soient des fonctions rationnelles à coefficients entiers de V. Comme d'ailleurs tout nombre algébrique devient un nombre entier algébrique en le multipliant par un nombre entier convenable[2], on voit facilement qu'on peut supposer:

(6) $$\left\{\begin{aligned} g_2' = \frac{g_2}{4} &= \frac{1}{M}(M_0 + M_1\rho + M_2\rho^2 + \ldots + M_{r-1}\rho^{r-1}) \\ g_3 &= \frac{1}{M}(M_0' + M_1'\rho + M_2'\rho^2 + \ldots + M_{r-1}'\rho^{r-1}) \\ \wp(u) &= \frac{1}{M}(N_0 + N_1\rho + N_2\rho^2 + \ldots + N_{r-1}\rho^{r-1}) \end{aligned}\right.$$

où les $M_0, M_1 \ldots N_{r-1}$ sont des nombres entiers ou nuls, où M est un nombre entier positif et où ρ est un nombre entier algébrique racine d'une équation irréductible à coefficients entiers

(7) $$x^r + a_1x^{r-1} + a_2x^{r-2} + \ldots + a_{r-1}x + a_r = 0.$$

---

[1] Voir p. ex.: Picard: *Traité d'Analyse* III, p. 436.

[2] Voir p. ex.: Lejeune-Dirichlet: *Zahlentheorie* (1894), p. 525.

Reprenons la formule (2):

$$\wp(nu) = \frac{p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}.$$

D'après les propriétés connues des ψ_n, les fonctions $p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}$ et ψ_n^2 sont des polynômes à coefficients *entiers* de p, g_2' et g_3, homogènes et de degré n^2 et $n^2 - 1$ respectivement en p, $g_2'^{\frac{1}{2}}$ et $g_3^{\frac{1}{3}}$. Par conséquent, si l'on introduit pour g_2', g_3 et p les expressions (6), les nombres

$$M^{n^2}[p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}] = U_n$$

et

$$M^{n^2}.\,\psi_n^2 = V_n$$

seront des *nombres entiers algébriques* appartenant au corps algébrique construit sur la racine ρ de l'équation (7).

Cherchons des limites *supérieures* de $|U_n|$ et $|V_n|$. En appliquant l'inégalité (5) on voit tout de suite qu'on peut assigner un nombre positif λ indépendant de n et tel que

$$(8) \quad \begin{cases} |U_n| < e^{\lambda n^2} \\ |V_n| < e^{\lambda n^2} \end{cases}$$

et cela quelqu'une des r racines ρ qu'on choisisse dans les expressions (6).

Il est facile d'en tirer des limites *inférieures* de $|U_n|$ et de $|V_n|$ dans les cas où ils ne sont pas nuls. En effet, supposons que U_n ne soit pas nul et désignons par $U_n^{(1)}, U_n^{(2)}, \ldots U_n^{(r-1)}$ ses r expressions conjuguées obtenues en substituant dans les expressions (6) pour ρ les $r - 1$ autres racines de l'équation (7). On aura

$$\frac{1}{U_n} = \frac{U_n^{(1)}.\,U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)}}{U_n.\,U_n^{(1)} \ldots U_n^{(r-1)}}.$$

Mais le dénominateur est la norme de U_n et comme U_n est un nombre entier algébrique différent de zéro, le module de ce norme sera $\geqq 1$ [1]. En appliquant les inégalités (8) on aura donc

$$\left|\frac{1}{U_n}\right| < e^{(r-1)\lambda n^2}$$

[1] Voir p. ex. Dirichlet, *Zahlentheorie* (1894), p. 535

c'est à dire

$$(9)\begin{cases} |U_n| > e^{-\lambda' n^2} \\ \text{et de même, si } V_n \text{ n'est pas nul} \\ |V_n| > e^{-\lambda' n^2} \end{cases}$$

λ' étant un nombre positif indépendant de n.

Comme

$$\wp(nu) = \frac{U_n}{V_n} \tag{10}$$

on en tire immédiatement le résultat suivant:

Supposons que $\wp(u)$, g_2 et g_3 sont des nombres algébriques donnés. Alors, si $\wp(nu)$ n'est pas infini on aura

$$|\wp(nu)| < e^{\lambda n^2}$$

et si $\wp(nu)$ n'est pas nul, on aura

$$|p(nu)| > e^{-\lambda' n^2}$$

où λ et *λ' sont des constantes positives indépendantes de n.*

3. **Limites supérieures et inférieures du module d'une fonction algébrique de $\wp(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)$.**

Le résultat trouvé dans la section précédente est susceptible d'une généralisation très étendue, que nous allons développer rapidement.

Soit $A(u)$ une fonction algébrique de $\wp(u)$, définie par une relation algébrique

$$F_1(A(u), \wp(u)) = 0 \tag{11}$$

où F_1 est un polynôme de $A(u)$ et de $p(u)$, dont les coefficients sont des nombres algébriques données. En éliminant ces coefficients entre l'équation (11) et les équations qui les définissent comme des nombres algébriques on en déduit une relation algébrique

$$F_2(A(u), \wp(u)) = 0 \tag{12}$$

où F_2 est un polynôme de $A(u)$ et de $\wp(u)$, dont les coefficients sont *des nombres entiers*.

Posons

$$u = n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont des variables indépendantes, et où $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sont entiers ou nuls (non nuls tous à la fois).

D'après le théorème d'addition de $\wp(u)$, il existe une relation algébrique à coefficients entiers entre $\wp(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$, g_2 et g_3. Supposons que g_2 et g_3 soient des nombres algébriques donnés. En éliminant g_2 et g_3 entre la relation ci-dessus et les équations qui les définissent comme nombres algébriques on obtient une relation algébrique

$$F_3(\wp(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)) = 0 \tag{13}$$

où F_3 est un polynôme à coefficients entiers de $\wp(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$.

Enfin, l'élimination de $\wp(u)$ entre les équations (12) et (13) donne

$$F(A(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)) = 0 \tag{14}$$

où F est un polynôme *à coefficients entiers* de $A(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$, et où

$$u = n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu.$$

Les coefficients de F et son degré en chacune des variables $A(u)$, $\wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$ sont naturellement indépendants de $n_1, n_2, \ldots n_\nu$.

Cela posé, appliquons la formule de multiplication (2) et posons:

$$\wp(n_i u_i) = \frac{P_{n_i}(u_i)}{Q_{n_i}(u_i)}$$

où

$$\left.\begin{aligned} P_{n_i}(u_i) &= p\psi_{n_i}^2 - \psi_{n_i+1} \cdot \psi_{n_i-1} \\ Q_{n_i}(u_i) &= \psi_{n_i}^2 \end{aligned}\right\} \text{ pour } u = u_i.$$

En substituant ces valeurs et en chassant les dénominateurs $Q_{n_i}(u_i)$ l'équation (14) peut s'écrire:

$$R_0 A(u)^q + R_1 A(u)^{q-1} + \ldots + R_q = 0 \tag{15}$$

où les R sont des polynômes à coefficients entiers des quantités $P_{n_1}(u_1), Q_{n_1}(u_1), \ldots, P_{n_\nu}(u_\nu), Q_{n_\nu}(u_\nu)$.

Supposons maintenant qu'on donne aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ de telles valeurs que $\wp(u_1), \ldots, \wp(u_\nu)$ soient égaux à des nombres algébriques donnés. Comme il en est de même de g_2 et g_3 d'après l'hypothèse faite plus haut, on comprend qu'on peut supposer comme auparavant:

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} & g_2' = \frac{g_2}{4} = \frac{1}{M}(M_0 + M_1\rho + \ldots + M_{r-1}\rho^{r-1}) \\ & g_3 = \frac{1}{M}(M_0' + M_1'\rho + \ldots + M_{r-1}'\rho^{r-1}) \\ \text{et} & \\ & \wp(u_i) = \frac{1}{M}(N^{(i)} + N_1^{(i)}\rho + \ldots + N_{r-1}^{(i)}\rho^{r-1}) \\ & \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu) \end{aligned} \right.$$

où les $M_0, M_1, \ldots, N_{r-1}^{(\nu)}$ sont des nombres entiers ou nuls, où M est entier positif et où ρ est un nombre entier algébrique racine d'une équation irréductible à coefficients entiers

$$x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r = 0.$$

Considérons une des branches de la fonction algébrique $A(u)$ et supposons qu'elle prend une valeur *finie* A, pour les valeurs de $g_2, g_3, \wp(u_1), \ldots, \wp(u_\nu)$ données plus haut. Cette valeur A sera racine de l'équation (15), quand on substitue pour $g_2, g_3, \wp(u_1)$ etc. les valeurs en question. Cherchons d'abord des limites supérieures et inférieures du module d'un coefficient quelconque R_s de cette équation.

En se rappelant la définition des R_s et en appliquant les résultats de la section précédente, on voit que

$$M^{\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \ldots + \lambda_\nu n_\nu^2} . R_s$$

sera un nombre *entier* algébrique appartenant au corps algébrique construit sur la racine ρ, pourvu qu'on choisisse les nombres entiers λ, qui sont indépendants de $n_1, \ldots, n_\nu$, assez grands. En désignant par n^2 le plus grand des nombres $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$ on voit que

$$R_s' = M^{\lambda' n^2} . R_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, q)$$

sera entier algébrique, λ' étant un nombre entier indépendant de n et de s.

Cela posé, en appliquant les inégalités (8), on aura d'abord

(17) $$|R_s| < e^{\lambda n^2},$$

λ étant indépendant de n et de s, et si R_s n'est pas nul, on trouve comme auparavant pour le nombre entier algébrique R'_s que

$$|R'_s| > e$$ [illegible]

c'est à dire

(18) $$|R_s| > e^{-\mu n^2},$$

μ étant indépendant de n et de s.

Cela fait, il est facile de trouver une limite supérieure de $|A|$. En effet, comme A, qui est supposé fini, est racine de l'équation (15), il faut que l'un des coefficients $R_0, R_1, \ldots, R_{q-1}$ soit différent de zero; soit R_μ le premier de ces coefficients qui n'est pas nul.

Alors une formule connue[1] donne

$$|A| < 1 + \frac{R}{|R_\mu|}$$

où R est le plus grand des nombres $|R_0|, \ldots, |R_q|$. En appliquant les inégalités (17) et (18) on en déduit

$$|A| < e^{Kn^2},$$

K étant indépendant de n.

Dans le cas où A n'est pas nul, on trouve de la même manière pour $|A|$ une limite inférieure de la forme $e^{-K'n^2}$, K' étant indépendant de n.

Nous avons ainsi le théorème:

Théorème 1.

Soit $\wp(u)$ la fonction elliptique de Weierstrass construite avec des invariants g_2 et g_3 qui sont des nombres algébriques donnés, et soit $A(u)$ une fonction algébrique de $\wp(u)$, liée à celle-là par une équation algébrique

$$F(A(u), \wp(u)) = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres algébriques.

[1] Voir p. ex. Serret: *Cours d'Algèbre supérieure* I, chapitre III.

Enfin soient $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ *des valeurs de* u *telles que* $\wp(u_1), \wp(u_2), \ldots, \wp(u_\nu)$ *ont des valeurs algébriques (finies) données, et soient* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers, qui ne sont pas tous nuls; désignons enfin par* n^2 *le plus grand des nombres* $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$.

Cela posé, si $A(n_1u_1 + \ldots + n_\nu u_\nu)$ *n'est pas infini on aura*

$$|A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| < e^{\lambda n^2} \tag{19}$$

et si cette quantité n'est pas nulle, on aura

$$|A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| > e^{-\lambda' n^2} \tag{20}$$

où λ *et* λ' *sont des constantes positives indépendantes de* n[1].

Comme on le sait, *toute fonction analytique qui possède un théorème d'addition algébrique, est une fonction algébrique de la fonction* $\wp(u)$, *correspondant à des invariants* g_2, g_3 *convenablement choisis.* On conçoit alors comment le théorème I peut être appliqué à de telles fonctions.

Dans le cas beaucoup plus simple où $A(u)$ est une fonction algébrique de $\sin u$, cas qui peut être regardé comme cas particulier du cas général, la même méthode donne aisément le résultat plus simple:

Soit $A(u)$ *une fonction algébrique de* $\sin u$, *liée à cette fonction par une équation algébrique dont les coefficients sont des nombres algébriques donnés. Soient de plus* $u_1, \ldots, u_\nu$ *des valeurs de* u, *telles que* $\sin u_1, \sin u_2, \ldots, \sin u_\nu$ *sont égaux à des nombres algébriques donnés. Enfin, soient* $n_1, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers non tous nuls et désignons par* n *le plus grand des nombres* $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_\nu|$.

Alors, si $A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)$ *n'est pas infini, on aura*

$$|A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots n_\nu u_\nu)| < e^{\lambda n} \tag{21}$$

[1] On pourrait sans doute appliquer ce théorème aux recherches arithmétiques des courbes algébriques, commencées par M. Poincaré. (Journal des Mathématiques pures et appliquées, 1901).

et si cette quantité n'est pas nulle, on aura

$$(22) \qquad |A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| > e^{-\lambda' n}$$

où λ et λ' sont des constantes indépendantes de n.

4. Application aux intégrales elliptiques et abéliennes.

Considérons l'intégrale elliptique correspondant à $z = \wp(u)$:

$$u = \int_z^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin d'intégration allant du point z a l'infini et évitant les points critiques, racines de l'équation $4y^3 - g_2 y - g_3 = 0$. Supposons de plus que le chemin d'intégration n'entoure ces points critiques qu'un nombre fini de fois.

Alors, comme on le sait, l'intégrale sera *finie* pour toutes les valeurs de z.

D'un autre côté, $u = 0$ est un pôle de second ordre pour la fonction $\wp(u)$, et dans le voisinage de $u = 0$, on aura

$$z = \frac{1}{u^2} + E_u,$$

E_u tendant vers zéro avec u. On en tire

$$(23) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{z}}(1 + E'_u) = \frac{1}{\sqrt{\wp(u)}}(1 + E'_u)$$

où E'_u tend vers zéro avec u, et où la racine carrée est choisie avec une détermination convenable.

Cela posé, supposons que g_2 et g_3 soient des nombres algébriques donnés ainsi que $z_1, z'_1, z_2, z'_2, \ldots, z_\nu, z'_\nu$, et considérons la somme

$$U = n_1 \cdot \int_{z_1}^{z'_1} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z'_2} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z'_\nu} \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

où $R = 4z^3 - g_2 z - g_3$

En posant

$$u_i = \int \frac{dz}{\sqrt{R}}, \qquad u_i' = \int \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

on aura

$$U = n_1 u_1 - n_1 u_1' + \ldots + n_\nu u_\nu - n_\nu u_\nu'.$$

Supposons que $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ soient des nombres entiers, non tous nuls, et soit n^2 la plus grande des quantités $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$. Cherchons une limite inférieure de $|U|$ dans le cas où U n'est pas nul. Alors pour U assez petit, on aura d'après l'équation (23):

$$|U| > \frac{K}{|\wp(U)|^{\frac{1}{2}}},$$

K étant une constante finie > 0.

Mais en choisissant dans le théorème 1, $A(u) = \wp(u)$ on a

$$|\wp(n_1 u_1 - n_1 u_1' + \ldots + n_\nu u_\nu - n_\nu u_\nu')| < e^{\lambda n^2}$$

ce qui donne

$$|U| > K e^{-\frac{\lambda}{2} n^2}$$

et nous avons ainsi démontré le théorème:

Théorème 2.

Soient $g_2, g_3, z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots, z_\nu, z_\nu'$ *des nombres algébriques donnés, parmi lesquels un ou plusieurs des nombres* $z_1', z_2', \ldots, z_\nu'$ *peuvent être infinis, et soit*

$$R = 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

Considérons la somme

$$n_1 \int \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sont des nombres entiers. Si cette somme n'est pas nulle, on aura

$$(24)\qquad \left| n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{R}} \right| > e^{-\lambda n^2}$$

où n^2 désigne le plus grand des nombres $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$ et où λ est indépendant de n.

En appliquant le théorème correspondant sur la fonction $\sin u$, on obtient de même le

Théorème 3.

Soient $z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots, z_\nu, z_\nu'$ des nombres algébriques, et soient $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ des nombres entiers. Alors

$$(25)\qquad \left| n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right| > e^{-\lambda n}$$

s'il n'est pas nul; n désigne le plus grand des nombres $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_\nu|$ et λ est indépendant de n.

En appliquant le théorème général I on pourrait étendre ces théorèmes aux *intégrales abéliennes dont la fonction inverse admet un théorème d'addition algébrique.* Comme une fonction analytique admettant un théorème d'addition algébrique n'aura qu'un nombre fini de déterminations dans tout le plan et comme elle est liée avec sa dérivée par une équation algébrique à coefficients constants, on voit quelle liaison intéressante il y a entre ces questions et le problème sur l'équation différentielle algébrique

$$F(y', y) = 0$$

dont nous avons parlé dans l'introduction.

Cependant, nous omettons ici ces recherches, qui nous entraîneraient trop loin.

Des théorèmes 2 et 3 on peut tirer des conséquences intéressantes pour de grandes classes de nombres incommensurables.

On en tire en effet:

Corollaire 1:

Soit α un nombre réel et incommensurable défini comme rapport de deux intégrales elliptiques:

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}{\displaystyle\int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}$$

où $g_2, g_3, z_1, z_1', z_2, z_2'$ sont des nombres algébriques donnés, $z_1' = \infty$ et $z_2' = \infty$ y compris. Soient de plus n_1 et n_2 deux nombres entiers qui ne sont pas nuls tous les deux et désignons par n^2 le plus grand de leurs carrés n_1^2 et n_2^2.

Alors on aura

$$|n_1 \alpha - n_2| > e^{-\lambda n^2} \tag{26}$$

λ étant une constante indépendante de n.

La même inégalité subsiste si

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}}{\displaystyle\int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}}$$

z_1, z_1', z_2, z_2' et k étant des nombres algébriques.

Du théorème 3 on tire de la même manière:

Corollaire 2:

Si α est un nombre réel et incommensurable défini comme le rapport entre deux arcs dont les sinus sont des nombres algébriques donnés, on a,

n_1 et n_2 étant des nombres entiers non nuls tous les deux et n désignant le plus grand des modules $|n_1|$ et $|n_2|$, que

$$|n_1\alpha - n_2| > e^{-\lambda n}, \tag{27}$$

λ étant une constante indépendante de n.

On en tire aisément que la même inégalité subsiste quand α est le rapport entre deux logarithmes de nombres algébriques, en particulier si α est le logarithme vulgaire d'un nombre algébrique[1].

En général, on pourrait étendre les résultats des deux corollaires à toutes les intégrales *abéliennes* définies plus haut.

Dans cet ordre d'idées, rappelons le résultat dû à Liouville[2], que si α est un nombre réel racine d'une équation irréductible de degré r $(r > 1)$ à coefficients entiers, on a l'inégalité

$$|n_1\alpha - n_2| > \frac{\lambda}{n^{r-1}}, \tag{28}$$

$n (> 0)$ désignant le plus grand des modules des nombres entiers n_1 et n_2 et λ étant indépendant de n.

D'après les indications de M. Borel[3], il sera possible d'établir des inégalités analogues quand α est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des polynômes à coefficients entiers en e ou bien en e^ρ, ρ étant algébrique. De même, si α est le logarithme népérien d'un nombre algébrique p. ex. si $\alpha = \pi$ etc.[4]

Les inégalités (26) et (27) donnent tout de suite des théorèmes analogues sur le développement de α en fraction continue

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}$$

[1] Voir mon mémoire: *Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques.* Bulletin de la Société Mathématique de France 1900.

[2] Voir p. ex. Borel: *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, p. 27.

[3] Voir les Comptes Rendus, 6 mars 1899 et le mémoire précédemment cité, dans les Annales de l'École Normale 1901, p. 236.

[4] Voir aussi diverses notes de M. E. Maillet dans les Comptes Rendus, 1900—1901.

En effet, en posant

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \ldots}$$

et

$$P_1 = a_0\,, \qquad P_2 = a_1 a_0 + 1\,, \quad \ldots\,, \quad P_n = a_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2}\,, \ \ldots$$
$$Q_1 = 1\,, \qquad Q_2 = a_1 \qquad\quad , \quad \ldots\,, \quad Q_n = a_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-2}\,, \ \ldots$$

on a comme on le sait:

$$a_n < \alpha_n + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{1}{Q_n \,|\, Q_n \alpha - P_n \,|}.$$

On en déduit que si le nombre incommensurable α est 1° *racine d'une équation irréductible de degré r à coefficients entiers*, ou 2° *défini par le corollaire* 2 ou bien 3° *défini par le corollaire* 1, on a respectivement les inégalités suivantes, dont la première est due à LIOUVILLE[1]:

$$a_n < \lambda Q_n^{r-2}\,, \qquad a_n < e^{\lambda' Q_n} \quad \text{et} \quad a_n < e^{\lambda'' Q_n^2}$$

λ, λ' et λ'' étant des constantes indépendantes de n. On en tire pour les nombres transcendants des conséquences analogues à celles dans mon mémoire précédemment cité[2].

5. Application à la théorie des fonctions entières transcendantes à distribution ordinaire des zéros.

Dans un mémoire récent[3], M. BOREL a introduit pour les fonctions entières transcendantes une notation importante. Soit $F(z)$ une telle fonction, de genre fini, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ses zéros, pour plus de simplicité supposés simples et rangés dans l'ordre des modules croissants.

Soit ρ *l'ordre réel* de la fonction $F(z)$, c'est à dire un nombre positif tel que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

[1] Journal de Liouville t. XVI.

[2] Voir l. c. p. 156.

[3] *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes.* Annales de l'École Normale 1901, p. 221 etc.

est convergente, tandis que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$$

est divergente quelque petit que soit ε.

Posons pour abréger $|a_n| = r_n$. Alors M. Borel dit, par définition, que la distribution des zéros est *ordinaire,* si l'on a

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon}} \tag{29}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, à partir du moins d'une certaine valeur de n[1]. Dans le cas où une telle inégalité n'aura pas lieu, la distribution est dite *extraordinaire.*

D'après M. Borel la distribution des zéros est ordinaire pour toutes les fonctions entières usuelles. Cependant la fonction très simple $\sin \pi z \,.\, \sin \alpha\pi z$ aura une distribution ordinaire ou extraordinaire selon *la nature arithmétique de la constante* α, comme il le fait voir par des exemples.

Nous nous permettons de citer les passages suivants qui terminent le mémoire de M. Borel et qui mettent en évidence l'utilité des recherches arithmétiques pour ce genre de questions:

»Parmi les sujets de recherches suggérés naturellement par ce qui précède il en est un sur lequel je n'insisterai pas, à cause de sa difficulté: la distribution des zéros est-elle ordinaire pour le produit de fonctions usuelles, par exemple pour le produit de deux fonctions σ correspondant toutes les deux à des invariantes g_2 et g_3 qui soient des nombres rationnels ou algébriques?»

Nous allons appliquer les résultats précédents pour aborder du moins des cas assez généraux de ce dernier problème.

Considérons en effet la fonction

$$F(z) = \sigma_{(1)}(z) \,.\, \sigma_{(2)}(z)$$

où nous avons posé:

$$\sigma_{(1)}(z) = \sigma(z \,|\, \omega_1, \omega_1')$$

$$\sigma_{(2)}(z) = \sigma(z \,|\, \omega_2, \omega_2')$$

[1] Dans le cas, où a_n est un zéro de multiplicité m, on aura seulement à remplacer dans l'inégalité $F'(a_n)$ par $F^{(m)}(a_n)$. (Borel).

la fonction entière transcendante σ de M. WEIERSTRASS étant définie comme d'ordinaire[1].

Pour plus de simplicité supposons que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha \text{ et } \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \beta$$

soient réels.

Nous allons trouver des conditions suffisantes pour que la distribution des zéros de la fonction $F(z)$ soit *ordinaire*. Comme nous allons le voir, ces conditions s'expriment exclusivement par *des propriétés arithmétiques des nombres α et β.*

Comme tous les zéros de la fonction σ sont simples, les zéros de $F(z)$ seront simples s'ils ne sont pas communs à $\sigma_{(1)}(z)$ et $\sigma_{(2)}(z)$ et doubles dans le cas contraire. Par conséquent, on aura pour un zéro simple $z = a$:

$$(30,1) \qquad F'(a) = \sigma'_{(1)}(a) \,.\, \sigma_{(2)}(a) \text{ ou bien } = \sigma_{(1)}(a)\sigma'_{(2)}(a)$$

et pour un zéro double

$$(30,2) \qquad F''(a) = 2\sigma'_{(1)}(a) \,.\, \sigma'_{(2)}(a).$$

Considérons d'abord la fonction $\sigma_{(1)}(z)$. On a comme on le sait:

$$(31) \qquad \sigma_{(1)}(z + 2\tilde{\omega}_1) = \pm e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 + 2\tilde{\eta}_1 z} \,.\, \sigma_{(1)}(z)$$

en posant

$$(32) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = m_1\omega_1 + n_1\omega_1' \\ \tilde{\eta}_1 = m_1\eta_1 + n_1\eta_1' \end{cases}$$

où η_1 et η_1' sont les valeurs de la dérivée logarithmique de $\sigma_{(1)}(z)$ pour $z = \omega_1$ et $z = \omega_1'$ respectivement, et où m_1 et n_1 sont entiers ou nuls. Comme on le sait tous les zéros de $\sigma_{(1)}(z)$ s'obtiennent en donnant à m_1 et n_1 toutes les valeurs entières ou nulles. On en tire, puisque $\sigma'_{(1)}(0) = 1$, que

$$\sigma'_{(1)}(2\tilde{\omega}_1) = \pm e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1}.$$

Posons $2\tilde{\omega}_1 = \mu + i\nu$, μ et ν étant réels, d'où $|2\tilde{\omega}_1|^2 = \mu^2 + \nu^2$. En substituant pour $2\tilde{\omega}_1$, sa valeur tirée de (32) et en remarquant que $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$ a

[1] Voir p. ex. HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques* I, p. 378.

sa partie purement imaginaire différente de zéro, on voit qu'on peut trouver pour m_1 et n_1 des expressions

$$(33)\qquad \begin{cases} m_1 = p\mu + q\nu, \\ n_1 = p'\mu + q'\nu \end{cases}$$

p, q, p' et q' étant finis.

Considérons maintenant $2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1$. En y substituant les valeurs de $\tilde{\eta}_1$ et $\tilde{\omega}_1$ tirées des équations (32) et en appliquant les relations (33) on voit que la partie réelle de $2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1$ aura la forme $A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2$, A, B et C étant indépendants de μ et de ν et finis. Comme d'autre part le quotient:

$$\frac{|A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2|}{|2\varpi_1|^2} = \left|\frac{A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}\right|$$

pour toutes les valeurs réelles de μ et ν ne surpasse pas une quantité fixe, on aura

$$(34)\qquad \left|\sigma'_{(1)}(2\tilde{\omega}_1)\right| = e^{A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2} > e^{-K_1 \cdot |2\tilde{\omega}_1|^2},$$

K_1 désignant un nombre fixe indépendant du zéro $2\varpi_1$ choisi [1].

De la même manière on trouve, si $2\varpi_2$ désigne un zéro de $\sigma_{(2)}(z)$:

$$(35)\qquad \left|\sigma'_{(2)}(2\tilde{\omega}_2)\right| > e^{-K_2 \cdot |2\tilde{\omega}_2|^2},$$

K_2 étant indépendant du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

On en tire immédiatement que *la distribution des zéros doubles de $F(z)$ est ordinaire.* En effet soit $a_n = 2\tilde{\omega}_1 = 2\tilde{\omega}_2$ un zéro double et posons $|a_n| = r_n$ alors la formule $(30,_2)$ donne

$$|F''(a_n)| > e^{-Kr_n^2} > e^{-r_n^{2+\varepsilon}}$$

quelque petit que soit ε, du moins à partir d'une certaine valeur de n. Comme d'autre part l'ordre réel de $F(z)$ est égal à l'ordre réel de σ, c'est à dire à 2, l'énoncé se trouve démontré.

Considérons maintenant les zéros simples et cherchons une limite inférieure des modules $|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)|$ et $|\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)|$. Prenons la fonction $\sigma_{(1)}(z)$ et posons

$$2\tilde{\omega}_2 = 2m_2\omega_2 + 2n_2\omega'_2 = 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega'_1 + \varepsilon$$

[1] On tire de l'inégalité (34) le résultat indiqué par M. Borel, que la distribution des zéros de la fonction σ est ordinaire.

où m_1, m_2, n_1 et n_2 sont entiers ou nuls et où ε est différent de zéro parceque $2\tilde{\omega}_2$ est supposé zéro simple de $F(z)$. Introduisons les notations

$$(36)\qquad \left|\begin{aligned} m_2\frac{\omega_2}{\omega_1} - m_1 &= m_2\alpha - m_1 = \varepsilon_m \\ n_2\frac{\omega_2'}{\omega_1'} - n_1 &= n_2\beta - n_1 = \varepsilon_n, \end{aligned}\right.$$

ce qui donne:

$$\varepsilon = 2\omega_1\varepsilon_m + 2\omega_1'\varepsilon_n .$$

La formule (31) nous donne

$$\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2) = \pm e^{2\eta_1\tilde{\omega}_1 + 2\eta_1\varepsilon}\,.\,\sigma_{(1)}(\varepsilon)\,.$$

Or, α et β étant supposés réels, les nombres entiers m_1 et n_1 peuvent être choisis tels que $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$ ne surpassent pas $\frac{1}{2}$. Par conséquent le point ε ne sortira pas du parallélogramme dont les sommets sont les points $\pm\,\omega_1 \pm \omega_1'$ et par suite on peut écrire:

$$\sigma_{(1)}(\varepsilon) > M\,.\,|\varepsilon|,$$

M étant une constante indépendante de ε.

D'un autre côté, $\frac{\omega_1'}{\omega}$ ayant sa partie purement imaginaire différente de zéro, on voit aisément que

$$|\varepsilon| > M'\,.\,\varepsilon',$$

où M' est indépendant de ε et où ε' désigne *la plus grande* des quantités $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$.

Enfin en tenant compte des relations (33) et (36) on trouve comme auparavant

$$|e^{2\eta_1\tilde{\omega}_1 + 2\eta_1\varepsilon}| > e^{-K'\,|2\tilde{\omega}_2|^2},$$

K' étant indépendant du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

En résumant ces résultats, il vient

$$(37)\qquad |\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)| > e^{-H_1\cdot|2\tilde{\omega}_2|^2}\,.\,\varepsilon',$$

H_1 étant une constante indépendante du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

Nous aurons à discuter trois cas différents:

1°. *α et β sont commensurables tous les deux.*

Alors $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$ sont nuls ou plus grands qu'un nombre fixe. Comme $2\tilde{\omega}_2$ est supposé zéro simple de $F(z)$, ils ne sont pas nuls tous les deux et par conséquent ε' sera plus grand qu'un nombre fixe μ_1 et

$$\left|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)\right| > \mu_1 \,.\, e^{-H_1 \cdot |2\tilde{\omega}_2|^2}$$

et de même on trouve

$$\left|\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)\right| > \mu_2 \,.\, e^{-H_2 \cdot |2\tilde{\omega}_1|^2}$$

si $2\tilde{\omega}_1$ est un zéro simple de $F(z)$ appartenant à $\sigma_{(1)}(z)$. En combinant ces inégalités avec les inégalités (34) et (35) on aura, si a_n est un zéro simple de $F(z)$ que

$$\left|F'(a_n)\right| > e^{-r_n^{2+\varepsilon}}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, du moins à partir d'une certaine valeur de n.

Dans ce cas, la distribution des zéros de $F(z)$ sera par conséquent ordinaire.

2°. *L'un des nombres α, β, p. ex. β est commensurable, l'autre incommensurable.*

Supposons que le nombre incommensurable α satisfasse à la condition

$$\left|m_2\alpha - m_1\right| > e^{-\theta(m)}$$

où m est le plus grand des nombres $|m_1|$ et $|m_2|$ et où $\theta(m)$ est une fonction positive non décroissante de $m (m > 0)$. Comme ε_n peut être nul on aura en tout cas

$$\varepsilon' > e^{-\theta(m)}.$$

D'un autre côté, les formules (32), (33) et (36) font voir que le rapport $\dfrac{m}{|2\tilde{\omega}_2|}$ ne surpasse pas une limite fixe λ de manière que

$$\theta(m) < \theta(\lambda r)$$

en désignant $|2\tilde{\omega}_2|$ par r. Cela donne

$$\left|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)\right| > e^{-H \text{[illegible]}}$$

et pour $\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)$ une inégalité pareille. Par conséquent si $\theta(m) < Am^2$ où A est une constante positive, on voit en combinant ces inégalités avec les inégalités (34) et (35), que la fonction $F(z)$ aura une distribution ordinaire de ses zéros.

3°. *Enfin soient α et β incommensurables tous les deux*, et soit $\theta_1(m)$ et $\theta_2(m)$ les fonctions correspondantes, de manière que

$$|m_2\alpha - m_1| > e^{-\theta_1(m)}$$
$$|m_2\beta - m_1| > e^{-\theta_2(m)}.$$

Alors on trouve sans difficulté que $F(z)$ aura une distribution ordinaire des zéros, si l'une des fonctions $\theta(m) < Am^2$, A étant une constante positive.

Par ces calculs, qui sont très simples en principe mais qui ont exigé des développements peut-être fatigants, nous sommes arrivés au théorème suivant:

Théorème 4.

Considérons le produit de deux fonctions σ de Weierstrass

$$F(z) = \sigma(z \mid \omega_1, \omega_1') \cdot \sigma(z \mid \omega_2, \omega_2')$$

où les rapports

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha \quad et \quad \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \beta$$

sont supposés réels et finis.

La distribution des zéros de $F(z)$ sera ordinaire:

A. *Si α et β sont commensurables.*

B. *Si l'un des nombres α, β, p. ex. β est commensurable et l'autre α incommensurable de manière que*

(38) $$|n_1\alpha - n_2| > e^{-\lambda n^2}$$

pour toutes les valeurs entières n_1, n_2 qui ne sont pas nuls à la fois, n désignant le plus grand des nombres $|n_1|$ et $|n_2|$ et λ désignant un nombre indépendant de n.

C. *Si α et β sont incommensurables tous les deux et l'un d'eux, p. ex. α, satisfait à l'inégalité (38).*

En appliquant les résultats des sections précédentes on aura ainsi le

Corollaire 3:

La distribution des zéros de la fonction $F(z)$ sera ordinaire, si l'un des nombres α, β, p. ex. α est incommensurable et

1° *égal à un nombre algébrique,*

2° *égal au rapport de deux logarithmes de nombres algébriques, en particulier égal au logarithme vulgaire d'un nombre algébrique,*

3° *égal au rapport de deux arcs dont les sinus ou les tangentes sont algébriques,*

4° *égal au rapport de deux intégrales elliptiques*

$$\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

z_1, z_1', z_2, z_2', g_2 *et* g_3 *étant des nombres algébriques, parmi lesquels* z_1' *et* z_2' *peuvent aussi être infinis.*

Les cas 2° et 3° peuvent être regardés comme cas particuliers du cas 4°. En appliquant un résultat dû à Hermite sur la fonction exponentielle[1], j'ai pu suppléer les cas précédents par les suivants

5° *égal au logarithme népérien d'un nombre commensurable,*

6° *égal à* e^ρ, ρ *étant commensurable;*

cependant, cela m'entraînerait trop loin d'en donner les démonstrations. En appliquant les recherches bien connues sur la fonction exponentielle de Hermite, de Lindemann et d'autres et en suivant un procédé indiqué par M. Borel[2] on arriverait sans doute à compléter les cas 5° et 6° par d'autres cas très généraux.

On voit nettement ici quel rôle joue la nature arithmétique des constantes α et β.

[1] *Cours lithographié*, IV[e] édition, p. 73.

[2] Comptes Rendus, 6 mars 1899.

ON THE INTEGRATION OF SERIES

BY

E. W. HOBSON

of CAMBRIDGE (England).

Since ABEL's researches in the theory of infinite series, some of the most important investigations on the subject have been concerned with the uniformity and non-uniformity of the convergence of such series. It was first pointed out by SEIDEL, and by STOKES independently, that a discontinuity in the sum of a convergent series, of which the terms are continuous functions of a real variable, is due to the non-uniform convergence of the series in the neighbourhood of points at which such discontinuity exists. It is further known that non-uniformity in the convergence of such a series does not necessarily involve discontinuity in the sum. The theory is of special importance in connection with the question regarding the conditions under which the series may be integrated term by term so that the series arising from such integration may have for its sum the integral of the sum of the original series.

If

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

is a series which converges everywhere in an interval (a, b) of the real variable x, and if $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x) \ldots$ are each continuous throughout the interval, it is well known that a sufficient condition that the sum of the integrals of the terms of the series taken through (a, b), or through an interval which is part of (a, b), may be represented by the integral of the sum-function $s(x)$ taken through the same interval, is that the series be uniformly convergent through the interval of integration. It

has been, however, shewn by OSGOOD,[1] that in the case in which the sum-function $s(x)$ is continuous through the interval (x_0, x_1) of integration, a sufficient condition for term by term integration is that there should be in the interval (x_0, x_1) no point at which the measure of non-uniform convergence is indefinitely great.

It has been shewn by BAIRE[2] that the sum-function $s(x)$ is at most a point-wise discontinuous function. In the present communication the properties of the remainder-function $R_n(x) = s(x) - s_n(x)$, are considered on the lines of BAIRE's memoir, and the results are applied to prove that for the most general function $s(x)$ which is the sum of a series of the above type, the series may be integrated term by term and gives a series of which the sum is the integral of $s(x)$, provided (1) that $s(x)$ is integrable through the interval of integration, and (2) that in that interval there is no point at which the measure of non-uniform convergence is indefinitely great.

If $n = \frac{1}{y}$, we may consider $s_n(x)$, $R_n(x)$ as functions of x and y, defined for all values of x in the interval (a, b), and for values of y which are the reciprocals of any positive integer m. Following BAIRE's procedure, the functions may be defined for values of y intermediate between the values $y_m = \frac{1}{m}$, and $y_{m+1} = \frac{1}{m+1}$, so that writing $s(x, y)$, $R(x, y)$ for $s_n(x)$, $R_n(x)$,

$$s(x, y) = \frac{y - y_m}{y_{m+1} - y_m} s(x, y_{m+1}) + \frac{y_{m+1} - y}{y_{m+1} - y_m} s(x, y_m)$$

$$R(x, y) = \frac{y - y_m}{y_{m+1} - y_m} R(x, y_{m+1}) + \frac{y_{m+1} - y}{y_{m+1} - y_m} R(x, y_m).$$

If we further define $s(x, 0)$, $R(x, 0)$ to be $s(x)$, and zero respectively, the two functions $s(x, y)$, $R(x, y)$ are defined for every point inside and on the boundary of the rectangle contained by the four straight lines $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = 1$.

The function $s(x, y)$ is everywhere continuous with regard to y, and is continuous with respect to x, everywhere except upon the bound-

[1] American Journal of Mathematics, Vol. XIX, 1897.

[2] See Annali di Math. (3) III, 1899.

ary $y = 0$. BAIRE has shewn that this function is at most a point-wise discontinuous function with respect to (x, y), on any continuous curve within the rectangle, and in particular on the boundary $y = 0$. We shall here consider the function $R(x, y)$, which does not come under BAIRE's general case, as although it is everywhere continuous with regard to y, it is in general a point-wise discontinuous function of x, for any constant value of y between 0 and 1, the value $y = 0$ excepted, for which the function vanishes.

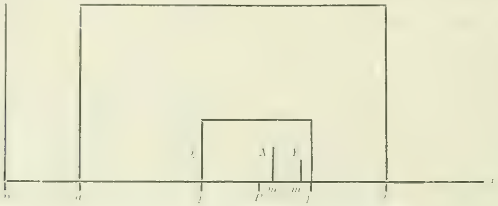
At any point $P(x, y)$, let a straight line of length 2ρ be drawn with P as middle point, and parallel to the y axis, and let $\omega(\rho)$ be the fluctuation (Schwankung) of the function $R(x, y)$ in the line 2ρ; the function $\omega(\rho)$ is a continuous function of ρ, and corresponding to an arbitrarily assigned positive number σ, let $\alpha_\sigma(x, y)$ be the upper limit of the values of ρ which are such that $\omega(\rho) \leq \sigma$; if P is in the boundary $y = 0$, it will be sufficient to take the straight line of length ρ within the rectangle. The function $\alpha_\sigma(x, y)$ is thus defined for every point in the rectangle and is an essentially positive function. Moreover since $R(x, y) = s(x) - s(x, y)$, and since $s(x)$ is independent of y, the function $\alpha_\sigma(x, y)$ is the same as the corresponding function introduced by BAIRE for the function $s(x, y)$.

It has been shewn by BAIRE that $\alpha_\sigma(x, y)$ is a semi-continuous function, that is, that corresponding to an arbitrarily assigned positive number ε, a neighbourhood of the point P can be found such that for all points P' in this neighbourhood $\alpha_\sigma(P') < \alpha_\sigma(P) + \varepsilon$.

If P be a point $(x, 0)$ in the boundary $y = 0$, and a semi-circle of radius ρ, and centre P, be drawn within the rectangle, the lower limit of $|R(x, y)|$ in this semi-circle is zero, and the upper limit may be denoted by $\beta(\rho)$. The limit of $\beta(\rho)$ when ρ is indefinitely diminished may be called the measure of the non-uniform convergence of the given series at the point P; if this limit is zero, the convergence of the series at P is uniform. If we divided the semi-circle into quadrants by means of a radius, the limits when $\rho = 0$, of the upper limits of $|R(x, y)|$ in the two quadrants, may be called the measures of non-uniform convergence at P, on the right and on the left, respectively; these two measures are equivalent to OSGOOD's indices of the point P, of which he gives a differrent definition. The measure of non-uniform convergence of the given

series is in accordance with the above definition, the saltus (Sprung) of the function $|R(x, y)|$ at the point $P(x, 0)$ with respect to the continuum (x, y).

The minimum of $\alpha_\sigma(x, y)$ at the point $P(x, 0)$, of the boundary $y = 0$, with respect to that boundary, is the limit when δ diminishes to zero, of the lower limit of α_σ in the neighbourhood $(x - \delta, x + \delta)$ of the point P. If this minimum at the point P is positive, a neighbourhood of P in the continuum (x, y) can be found, such that the fluctuation (Schwankung) of $R(x, y)$ in that neighbourhood is $\leq 2\sigma$, and hence the saltus of $|R(x, y)|$ at P is $\leq 2\sigma$. To prove this we observe that a neighbourhood pp' of P can be found such that β_σ at every point in pp'



is greater than a fixed number η which is less than the minimum of β_σ at P. Let X, Y be any two points in the rectangle whose base is pp' and height η, and let Xm, Ym' be perpendicular to the boundary. We have then

$$|R(X) - R(Y)| \leq |R(X) - R(m)| + |R(Y) - R(m')|$$
$$\leq 2\sigma$$

thus the required neighbourhood has been found.

It follows that if the saltus of $|R(x, y)|$ at P, is greater than 2σ, the minimum of $\alpha_\sigma(P)$ at P, must be zero.

Now it has been shewn by Baire that in every sub-interval of the boundary $y = 0$, points exist at which the minimum of $\alpha_\sigma(P)$ with respect to the straight line is positive, and this is the case however small σ may be.

It thus appears that in the interval (a, b) the points at which the given series is uniformly convergent are everywhere dense, and thus that

the function $|R(x, y)|$ is on the boundary $y = 0$, a point-wise discontinuous function with respect to the continuum (x, y). It follows that the points of (a, b) at which the measure of non-uniform convergence of the given series exceeds an arbitrarily fixed positive number form a closed and non-dense aggregate.

Let it now be assumed that the point-wise discontinuous function $s(x)$ is an integrable function. The condition that the series $\Sigma \int_{x_0}^{t} u_n(x)dx$ converges to the value $\int_{x_0}^{x_1} s(x)dx$, is that a value y_0 of y, can be found corresponding to a given positive number ε, such that $\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right| < \varepsilon$, for any fixed value of y which is $\leq y_0$.

It will be proved that this condition is satisfied, provided there is no point in the interval (x_0, x_1) at which the saltus of $|R(x, y)|$, the measure of non-uniform convergence, is indefinitely great. If the saltus of $|R(x, y)|$ is at every point finite, then $|R(x, y)|$ has a finite upper limit for every point within the fundamental rectangle; this follows from the fact proved above, that the points on $y = 0$, at which the saltus of $|R(x, y)|$ exceeds a fixed number, form a closed aggregate, and thus if at a converging series of points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ the values of this saltus formed a sequence of increasing numbers which had no finite upper limit, the saltus at the limiting point $\underset{n=\infty}{L}\, x_n$, would be indefinitely great.

Let A be a fixed positive number, then the aggregate G of points at which the saltus of $|R(x, y)|$ exceeds A, is closed and non-dense. It is well known that the aggregate G consists of the extremities of an enumerable aggregate of sub-intervals $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, together with the limiting points of these extremities. Let I be the content of G, then if $l = x_1 - x_0$, $l - I$ is the limit of $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots$

A number μ can be found corresponding to any fixed arbitrarily small number ε_1, such that $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\mu > l - I - \varepsilon_1$, and is $< l - I$. Inside each of the intervals θ, take an interval θ', this can be done so that $\sum_1^\mu \theta' = \sum_1^\mu \theta - \varepsilon_2$, where ε_2 is an arbitrarily assigned positive number. The sum $\Sigma\theta'$ lies between $l - I - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, and $l - I - \varepsilon_2$.

Let the interval l be devided into $\mu + s$ sub-intervals of which μ consist of the intervals θ', and the other s are $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s$; thus $l = \sum_1 t + \sum_1 \theta'$; all the points of G are in the intervals t.

We first consider the integral taken through the intervals θ'; on θ'_r as base a rectangle of height $\bar{y}_r$ can be drawn so that in that rectangle, $|R(x, y)| \leqq A + \eta$, when η is an arbitrarily small prescribed number. For if this is not the case, there would be points of the x-axis in θ'_r, such that the fluctuation of $|R(x, y)|$ in areas containing them are $> A$, however small y may be taken, contrary to the hypothesis that at every point of θ'_r the saltus of $|R(x, y)|$ is $< A$, hence $\bar{y}_r$ can be found corresponding to a given η; if $\bar{y}$ is the greatest of the μ numbers $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_\mu$, then if $y \overline{\overline{<}} \bar{y}$, for every x in the intervals θ', $|R(x, y)| \overline{\overline{<}} A + \eta$. It thus appears that $\left|\int^{x_1} R(x, y)dx\right|$, taken through the intervals θ', is $\leqq (A+\eta)\sum\theta'$ or $< (l - I - \varepsilon_2)(A + \eta)$, provided $y \leq \bar{y}$. The numbers $\bar{y}, y$ converge to zero together.

Next consider the s intervals $t_1, t_2, \ldots, t_s$; for any point x of G, there is a value of y such that for it and all smaller values, $|R(x, y)| < \sigma$, where σ is a fixed positive number which we take $< A$; this arises from the continuity of $R(x, y)$ with respect to y, at the point $(x, 0)$. Take y_1 a value of y, and let G_{y_1} be the aggregate of points belonging to G, such that $|R(x, y)| < \sigma$, provided $y \overline{\overline{<}} y_1$. The points of G_{y_1} may be put into a finite number of intervals $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_x$, where $\sum\tau < I_{y_1} + \delta$, I_{y_1} denoting the content of G_{y_1}, and δ an arbitrarily chosen positive number. The complementary intervals whose sum is $\sum t - \sum\tau$ contain only such points of G as do not belong to G_{y_1}. Since there are by hypothesis no points of G at which the upper limit of the fluctuation of $R(x, y)$ in (x, y) is not finite, and this upper limit is everywhere less than some fixed finite number, there exists a finite upper limit of $|R(x, y)|$ for all values of x which are in the intervals t but not in the intervals τ; let this be B. The integral taken through those parts of the intervals t which are not in the τ, is not greater than $B\left(\sum t - \sum\tau\right)$ or is $< B(I + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I_{y_1})$; B cannot increase as y is diminished.

It now remains to consider the integral taken through the intervals τ; since $R(x, y)$ or $s(x) - s(x, y)$ is integrable in (x_0, x_1), these intervals τ

may be divided into a finite number of sub-intervals such that the sum of those sub-intervals in which the fluctuation of R is $>$ an assigned number, is as small as we please. It thus appears that the intervals τ can be further sub-divided so that $\sum\tau = \sum\tau' + \sum\tau''$, where τ' are intervals in which the fluctuation of R for a fixed y, is $\geq \alpha$, and the τ'' are intervals in which the fluctuation is $< \alpha$, where α is an arbitrarily chosen number; this can be done so that $\sum\tau'$ is arbitrarily small. Let $\alpha + \sigma < A$, then $\left|\int R(x, y)dx\right|$ through the intervals τ', is not greater than $B\sum\tau'$. Of the intervals τ'', some contain points of G_{y_1}, and others may not do so; let χ be the sum of the latter, then through these intervals the integral is not greater than χB. For any interval τ'' which contains a point of G_{y_1} $|R(x, y)|$ is everywhere less than $\sigma + \alpha$, where $y < y_1$; hence the integral through these intervals τ'' is $< (\sigma + \alpha)\sum\tau'' < A\sum\tau''$. It has now been shewn that

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right| < (l - I - \varepsilon_2)(A + \eta) + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$
$$+ B(\sum\tau' + \chi) + A\sum\tau''$$

where A, y_1, y are fixed, and ε_2 is arbitrarily small; y is $\leq y_0$ where y_0 is the smaller of the numbers y_1, y.

Thus the value of $\left|\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx\right|$ is

$$< (A + \eta)\left(l - I + \sum\tau''\right) + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1) + B\left(\sum\tau' + \chi\right)$$

or, since $\sum\tau'$ is arbitrarily small,

$$< (A + \eta)\left(l - I + \sum\tau\right) + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1) + B\chi$$
$$< (A + \eta)(2l - I) + B(I - I_{y_1} + \varepsilon_1) + B\chi.$$

Now it has been shewn by Osgood, that y_1 may be chosen so small that $I - I_{y_1} < \lambda$, where λ is arbitrarily small; we have then also, $\chi < \lambda$. The integral is $< (A + \eta)2l + B(2\lambda + \varepsilon_1)$; let $A < \frac{p}{2l}$, and choose y so that $\eta < \frac{q}{2l}$, and y_1 so that $2B\lambda < r_1$, and let the θ' intervals be so chosen

that $B\varepsilon_1 < s_1$, where p, q, r_1, s_1 are positive numbers such that $p + q + r_1 + s_1 = \varepsilon$. We now see that y_0 can be found such that $\left| \int_{x_0}^{x_1} R(x, y)dx \right| < \varepsilon$, if $y \overline{\overline{<}} y_0$; it has thus been established that the term by term integration of the series gives the same result as the integration of the sum $s(x)$ provided $s(x)$ is integrable through the interval of integration, and also the measure of non-uniform convergence is everywhere finite in that interval.

ON SOLUBLE IRREDUCIBLE GROUPS OF LINEAR SUBSTITUTIONS IN A PRIME NUMBER OF VARIABLES

BY

W. BURNSIDE
of GREENWICH, England.

It is well known that if a transitive permutation group of prime degree is soluble it must be cyclical or metacyclical; so that if the degree be p, the order of the group is pr, where r is equal to or is a factor of $p-1$.

I propose here to consider the corresponding question for an irreducible group of linear substitutions in a prime number of variables; and in particular to determine the numbers which may be the order of such a group when it is soluble.

1. A group of linear substitutions in p variables is called irreducible when it is impossible to find $q(<p)$ linear functions of the variables which are transformed among themselves by every operation of the group. It has recently been shown by Herr FROBENIUS[1] that if a group G, of finite order, is isomorphic (simply or multiply) with an irreducible group of linear substitutions in p variables, then p must be a factor of the order of G.

A group of linear substitutions in p symbols, which is of finite order and ABELIAN, is always completely reducible[2]; *i. e.*, a set of p independent

[1] Berliner Sitzungsberichte, 1896, p. 1382.

[2] I am not aware whether a separate proof of this statement has been published; but it is contained as a special case in Herr FROBENIUS's investigations in the *Berliner Sitzungsberichte* on the representation of a group by means of linear substitutions.

linear functions of the variables can always be found each of which is changed into a multiple of itself by every operation of the group.

If an irreducible group G in p variables, where p is a prime, has a self-conjugate subgroup H, then H must be either irreducible or Abelian. In fact, if H is reducible, new variables may be chosen which are transformed among themselves in sets of $n_1, n_2, \ldots, n_r$ by H, where

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = p.$$

Since H is a self-conjugate subgroup of G, every operation of G must replace the variables of one of these sets by linear functions either of themselves or of the variables of another set; and since G is irreducible, it must contain operations replacing the variables of any one set by linear functions of those of any other set. Hence $n_1, n_2 \ldots, n_r$ must all be equal, and since p is prime they are all therefore unity; in other words H must be Abelian.

2. Suppose now that G is a soluble irreducible group in p variables, where p is a prime. Let I denote the self-conjugate subgroup of G which is constituted of its self-conjugate operations. Every operation of I replaces each variable by the same multiple of itself; and I is therefore necessarily cyclical. If n is its order, any one of its operations may be represented by

$$(\omega z_1, \omega z_2, \ldots, \omega z_p)$$

where ω is an n^{th} root of unity.

Let J be the greatest self-conjugate Abelian subgroup of G, so that J contains I, and suppose first that J contains operations which do not belong to I. Choose new variables so that J is represented as completely reduced, and let

$$(\varepsilon_1 z_1, \varepsilon_2 z_2, \ldots, \varepsilon_p z_p)$$

be any operation of J, which does not belong to I; so that $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ are roots of unity which are not all the same. If, for every operation of J,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_r,$$

while $\varepsilon_{r+s} (s = 1, 2, \ldots p - r)$ is not equal to ε_1 for every operation, then every operation of G must either transform $z_1, z_2, \ldots, z_r$ linearly among themselves, or must change them into linear functions of another distinct

set of r z's. Since p is a prime and G is irreducible, this is impossible if r is greater than unity. Hence no two ε's are the same for every operation of J. There is therefore no linear functions of the z's, except the p z's themselves, which is changed into a multiple of itself by every operation of J. Every operation of G must therefore permute the z's among themselves, at the same time multiplying them by certain constant factors. If S and T are two operations of G which, apart from these factors, give the same permutation of the z's, then ST^{-1} replaces each z by a multiple of itself and therefore belongs to J. Hence the factor group $G|J$ is simply isomorphic with a permutation group of the p z's. Since G is irreducible this permutation group must be transitive; and since G is soluble the permutation group must be soluble. It is therefore a cyclical or a metacyclical group of degree p. If the order of J be m, the order of G is prm, while r is equal to or is a factor of $p-1$.

Also, if G is transformed so that J shall be completely reduced, every operation of G is of the form

$$z_i' = \omega_i z_{ai+b},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

where the ω's are roots of unity, and the suffixes are reduced, mod. p. A group of linear substitutions in which every operation replaces each symbol by a multiple of itself or of another symbol, I call a permutation group *with factors*. The result of the present section then is that when I is not the greatest self-conjugate Abelian subgroup of G, it is possible to represent G as a cyclical or metacyclical permutation group with factors.

3. It remains to consider the case in which the group I, formed of the self-conjugate operations of G, is the greatest Abelian self-conjugate subgroup contained in G. Of the self-conjugate subgroups of G which contain I, let H be one whose order is as small as possible. The order of $H|I$ is then a power of a prime. Since by supposition H is not Abelian, it must be irreducible. The order of $H|I$ being a power of a prime, it must have self-conjugate operations other than identity. Hence H must have an Abelian self-conjugate subgroup containing and of greater order than I. Let J be the subgroup of greatest order of this kind contained in H. The operations of J cannot all multiply each z by the same

factor, for they would then all be self-conjugate in G. Hence the operations of J are not all self-conjugate in H; and therefore H is an actual subgroup of, and is not identical with, G.

Since H is irreducible and has an Abelian self-conjugate subgroup J, whose operations are not all self-conjugate, it can be represented as a cyclical or metacyclical permutation group with factors; and since the order of $H \mid I$ is the power of a prime, that of $H \mid J$, which is at once a factor of $p(p-1)$ and of the order of $H \mid I$, must be p. Hence H can be represented as a cyclical permutation group with factors.

Now G can certainly not be so represented. For in such a group the totality of the operations which replace each symbol by a multiple of itself constitute an Abelian self-conjugate subgroup; and if every one of these operations replaces each symbol by the same multiple of itself, G would not be irreducible. Hence since H, which is a self-conjugate subgroup of G, can be represented as a permutation group with factors while G cannot, it must be possible to represent H in more than one way as such a group.

Let
$$(\varepsilon_1 z_1, \varepsilon_2 z_2, \ldots, \varepsilon_p z_p)$$
represent any operation P of J which does not belong to I, so that $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ are roots of unity which are not all equal to each other. Further let
$$(\alpha_1 z_2, \alpha_2 z_3, \ldots, \alpha_{p-1} z_p, \alpha_p z_1)$$
be an operation S of H, not belonging to J. It may be assumed without loss of generality that $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ are all unity; for this is equivalent to taking $z_1, \alpha_1 z_2, \alpha_1\alpha_2 z_3, \ldots$ as variables in the place of $z_1, z_2, z_3, \ldots$, and does not affect the form of the operations of J. The operation S may therefore be written in the form
$$(z_2, z_3, \ldots, z_p, \gamma z_1).$$

Let
$$\zeta = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \ldots + \beta_p z_p$$
be one of a second set of p linear functions of the z's which are permuted among themselves with factors by H. When the operation P is carried out on the z's, ζ becomes
$$\zeta' = \beta_1 \varepsilon_1 z_1 + \beta_2 \varepsilon_2 z_2 + \ldots + \beta_p \varepsilon_p z_p.$$

and this is not a multiple of ζ. Hence when all the operations of J are carried out on the variables the number of distinct linear functions which arise from ζ, no one of which is a multiple of any other, is equal to the order of J/I. This is a power of p in any case, and must be equal to p if, as supposed, H can be represented as a permutation group with factors in the ζ's.

Since the order of J/I is p, the p^{th} power of P must belong to I. Hence P must be of the form

$$\left(\varepsilon_1 \alpha^{a_1} z_1,\ \varepsilon_1 \alpha^{a_2} z_2,\ \ldots,\ \varepsilon_1 \alpha^{a_p} z_p\right),$$

where α is a p^{th} root of unity.

Further $P^{-1}S^{-1}PS$ must for the same reason belong to I, and therefore $a_{i+1} - a_i$ is independent of i. The operation P is therefore of the form

$$\left(\varepsilon_1 z_1,\ \varepsilon_1 \alpha z_2,\ \varepsilon_1 \alpha^2 z_3,\ \ldots,\ \varepsilon_1 \alpha^{p-1} z_p\right).$$

The p linear functions that arise from ζ by the operations of J are therefore

$$\sum_{1}^{p} \beta_i \alpha^{(i-1)t} z_i\,.$$

$$(t = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1).$$

These must be permuted among themselves with factors by S. They are also permuted by P; and therefore it must be possible to determine m so that SP^m changes one of the ζ's, and therefore all of them, into a multiple of itself. The conditions that ζ may be changed into a multiple of itself by SP^m are

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_3}{\beta_2}\alpha^{-m} = \frac{\beta_4}{\beta_3}\alpha^{-2m} = \ldots = \frac{\beta_p}{\beta_{p-1}}\alpha^{2m} = \eta^{-1}\frac{\beta_1}{\beta_p}\alpha^{m}.$$

When m is assigned these equations determine the ratios of the β's uniquely, and give

$$\frac{\beta_{i}}{\beta_1} = \alpha^{-\frac{1}{2}mi(i-1)}\eta^{i}.$$

Hence if

$$\zeta_{m,n} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{\frac{1}{2}mi(i-1)+ni} \eta^{p} z_{i+1},$$

each of the p sets of p linear functions

$$\zeta_{m,0}, \zeta_{m,1}, \ldots, \zeta_{m,p-1},$$
$$(m = 0, 1, \ldots, p-1)$$

is such that H can be represented as a permutation group with factors in terms of them. Further, these and the z's themselves are the only sets of linear functions of the z's in respect of which H can be so represented. There are therefore just $p+1$ sets of linear functions in terms of which H can be represented as a permutation group with factors.

Since the p^{th} powers of both S and P belong to I, the factor group $H|I$ is a non-cyclical group of order p^2. H has therefore $p+1$ self-conjugate Abelian subgroups of index p containing I; and the $p+1$ sets of linear functions give the variables in terms of which each of these subgroups can be represented in completely reduced form.

4. To every operation of G there corresponds an isomorphism of H, and therefore also of $H|I$. The totality of the operations of G, which give the identical isomorphism of $H|I$, constitute a self-conjugate subgroup K of G; and I have shown elsewhere[1] that the order of $K|H$ is a power of p. But J is a self-conjugate subgroup of K, and from § 2 it follows that the order of $K|J$ is equal to or is a factor of $p(p-1)$. Moreover the order of $H|J$ has been shewn to be p. Hence K must be identical with H, and therefore the only operations of G which give the identical isomorphism of $H|I$ are those of H. The factor group $G|H$ is therefore simply isomorphic with a (soluble) subgroup of the group of isomorphisms of a non-cyclical Abelian group, order p^2. Moreover this group of isomorphisms can leave no subgroup of order p of the Abelian group, order p^2, invariant; for if it did, H would have a subgroup of index p, containing I, and self-conjugate in G, which is not the case. Hence the group of isomorphisms, with which $G|H$ is simply isomorphic, must contain at least one operation which permutes the $p+1$ subgroups

[1] Theory of Groups of finite order (Cambridge), p. 253.

of order p of the ABELIAN group, order p^2, regularly. Now the operations of the group of isomorphisms of a non-cyclical ABELIAN group of order p^2, may be divided into sets which (I) permute the $p + 1$ subgroups of order p regularly, (II) leave one such subgroup invariant and permute the remaining p cyclically, (III) leave every operation of one subgroup invariant, change every operation of a second subgroup into a power of itself and permute the remaining subgroups cyclically; and (IV) change every operation into its x^{th} $(x = 1, 2, \ldots, p-1)$ power.

GIERSTER's[1] discussion of the modular group shows that no group containing operations from sets (I) and (II) can be soluble. Hence, since $G | H$ contains operations belonging to (I), it can have none belonging to (II). Suppose now that G has an operation A, given by

$$z'_i = \sum_1^p a_{ij} z_j \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

which gives rise to an isomorphism of $H | I$ belonging to (III). We may then suppose that

$$A^{-1}PA = P^x R,$$

$$A^{-1}SA = SR',$$

where R and R' belong to I. The resulting conditions for the coefficients in A are found to be

$$a_{i,j}(\alpha^{x(i-1)} - k\alpha^j) = 0,$$

$$a_{i,j} - l a_{i+1,j+1} = 0,$$

where k and l are the same for all i's and j's. These conditions are inconsistent, unless x is unity; in which case the isomorphism is the identical isomorphism. Again if A gives rise to an isomorphism belonging to set (IV), we have

$$A^{-1}PA = P^x R,$$

$$A^{-1}SA = S^x R',$$

and the resulting conditions for the $a_{i,j}$'s are

$$a_{i,j}(\alpha^{x(i-1)} - k\alpha^j) = 0,$$

$$a_{i,j} - l a_{i+x,j+1} = 0.$$

[1] Math. Ann. Vol. XVIII, pp. 319—365.

These again are inconsistent unless $x^2 \equiv 1$, mod. p. Hence G/H contains no operation of set (III) and the only operation it can contain of set (IV) is the one which replaces every operation by its inverse. Finally therefore every operation of G/H must either permute the $p+1$ subgroups of order p regularly, or must leave them all invariant; and the subgroup of G/H which leaves them all invariant consists either of the identical operation only or is of order two. The order of G/H is therefore a factor of $2(p+1)$. The order of G itself is then p^2sn, where s is a factor of $2(p+1)$ and n is the order of the subgroup constituted by the self-conjugate operations of G. It should be noticed that n is necessarily divisible by p, since $P^{-1}S^{-1}PS$, which multiplies each z by α, belongs to I.

5. (*Summary*). Soluble irreducible groups of linear substitutions in a prime number of variables may, from the preceding investigation, be divided into two classes according as they do or do not contain self-conjugate Abelian subgroups other than that formed of their self-conjugate operations.

Those of the first class are multiply isomorphic with a cyclical or metacyclical permutation group of prime degree in respect of the self-conjugate Abelian subgroup of greatest order which they contain. The order of such a group is prm, where p is the number of variables, r a factor of $p-1$ and m the order of the greatest self-conjugate Abelian subgroup. It can be represented as a cyclical or metacyclical permutation group with factors. A group with no self-conjugate operations, except identity, necessarily belongs to this class.

Those of the second class are multiply isomorphic, in respect of the subgroup formed of their self-conjugate operations, with a soluble subgroup of the holomorph of a non-cyclical Abelian group, order p^2. The order of such a group is p^2sn; where p is the number of variables, s a factor of $2(p+1)$, and n (which must be divisible by p) is the order of the subgroup formed of the self-conjugate operations. Such a group cannot be represented as a permutation group with factors.

ÜBER ABEL'S SUMMATION ENDLICHER DIFFERENZENREIHEN.

VON

HEINRICH WEBER

in STRASSBURG.

In der Abhandlung *L'intégrale finie* $\sum^n \varphi(x)$ *exprimée par une intégrale définie simple* (Bd II, N° VII der HOLMBOE'schen Ausgabe von ABEL's Werken, Bd I, S. 34 der neuen Ausgabe) giebt ABEL einen häufig angewandten sehr eleganten Ausdruck für das Integral einer Differenzengleichung. Er benutzt bei der Ableitung dieser Formel gewisse bestimmte Integrale über reelle Variable. Aber schon die äussere Form des Resultates weisst uns auf die Integration über complexe Variable hin, und in der That erhält man auf diesem Wege die ABEL'sche Formel fast unmittelbar. Dieser Weg soll hier eingeschlagen und dann noch einige Anwendungen des Resultates hinzugefügt werden.

I.

Die Aufgabe, um die es sich handelt, lässt sich so aussprechen:

Es soll eine Function $f(x)$ der Variablen x gefunden werden, die, wenn $\varphi(x)$ eine gegebene Function derselben Variablen ist, der Gleichung

$$f(x + 1) - f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

genügt.

Wenn man x durch $x + 1, x + 2, \ldots, x + n - 1$ ersetzt und dann die Summe aller so gebildeten Gleichungen nimmt, so erhält man aus (1)

$$f(x + n) - f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(x + \nu). \tag{2}$$

Jede der Bedingung (1) genügende Function $f(x)$ heisst ein *Integral der Differenzengleichung* (1). Ist $f(x)$ ein solches Integral, und $P(x)$ eine willkürliche *periodische Function* mit der Periode 1, so ist $f(x) + P(x)$ das allgemeinste Integral dieser Gleichung.

Mit Hilfe des Cauchy'schen Satzes über die Integration auf einem geschlossenen Wege lässt sich nun ein solches Integral $f(x)$ leicht bilden.

Man markire in der Ebene einer complexen Variablen z den Punkt, der dem Werthe x, der auch complex sein kann, entspricht, und die Punkte $x \pm 1, x \pm 2, x \pm 3, \ldots$, die alle auf einer zur reellen Axe parallelen Geraden liegen, die ich die Linie X nennen will. Durch diese Linie X wird die Ebene z in zwei Halbebenen getheilt, die ich die negative und die positive nennen will, jenachdem sie die negativ oder die positiv unendlichen imaginären Werthe von z enthält.

Nun kann man auf folgende Weise ein Integral $f(x)$ bilden: Man nehme einen Punkt a auf der negativen, einen Punkt b auf der positiven Seite von X an, und verbinde diese beiden Punkte durch irgend einen Weg, der die Linie X in einem Punkt c schneidet, der zwischen x und $x - 1$ liegt. Dann ist

$$f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(z)\,dz}{1 - e^{2\pi i(z-x)}}. \tag{3}$$

Man erhält daraus $f(x + 1)$ wenn man denselben Integranden auf einem anderen Weg nimmt, der die Linie X in einem zwischen x und $x + 1$ gelegenen Punkt c' schneidet, und für $f(x + 1) - f(x)$ erhält man dann ein Integral, über einen geschlossenen Weg, der von den Polen des Integranden nur den einen, x, umschliesst, das also nach dem Cauchy'schen Satze den Werth $\varphi(x)$ hat, vorausgesetzt natürlich, dass man sich auf ein Gebiet der z-Ebene beschränkt, in dem $\varphi(x)$ stetig ist.

Wenn man in der Formel (3) die Punkte a, b verändert, ohne sie die Linie X überschreiten zu lassen, so ändert sich die Function (3) nur um eine periodische Function $P(x)$.

II.

Von dem gewonnenen Resultat soll zunächst eine Anwendung auf die Bestimmung der *Gauss'schen Summen* aus der Kreistheilungstheorie gemacht werden, die sich daraus in sehr einfacher Weise ableiten lässt.

Wenn es die Convergenz des Integrals gestattet, so können wir in (3) die Grenzen a und b nach der negativen und positiven Seite ins Unendliche hinaus rücken lassen, und erhalten

$$f(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z)dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}, \tag{4}$$

worin der Integrationsweg immer noch zwischen den Punkten x und $x - 1$ hindurchgehen muss, während z, mit endlichem reellem Theil nach der Seite des positiven und negativen Imaginären ins Unendliche geht. Für $f(x + 1)$ erhält man dieselbe Form, nur dass der Integrationsweg zwischen x und $x + 1$ hindurchgeht.

Macht man in dem Integral für $f(x)$ die Substitution

$$x - z = -it$$

und in dem für $f(x + 1)$ die Substitution

$$x - z = it$$

so erhält man

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t}\varphi(x + it)dt}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}, \\ f(x + 1) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi t}\varphi(x - it)dt}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}, \end{aligned} \right.$$

wobei aber die Integration nach t nicht auf reellem Wege genommen werden darf, weil sie sonst über den Pol $t = 0$ führen würde, sondern sie geht über eine Linie in der t-Ebene, die mit endlichem imaginärem

Theil von negativ unendlichen zu positiv unendlichen reellen Werthen führt, und dabei dem Nullpunkt nach der Seite der *positiv imaginären Werthe* ausweicht.

Nun ist aber nach (1)

$$2f(x) = f(x) + f(x+1) - \varphi(x),$$

und man erhält also aus (4):

$$(5)\qquad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\pi t}\varphi(x+it) - e^{\pi t}\varphi(x-it)}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}\,dt,$$

und da hierin der Punkt $t = 0$ nicht mehr Pol des Integranden ist, *so darf die Integration jetzt auf reellem Wege von $-\infty$ nach $+\infty$ gehen.*

Die Anwendung von (2) ergiebt, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$(6)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi(\nu) = -\frac{1}{2}(\varphi(n) - \varphi(0))$$

$$+\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\pi t}(\varphi(n+it) - \varphi(it)) - e^{\pi t}(\varphi(n-it) - \varphi(-it))}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}\,dt.$$

Setzen wir hierin

$$\varphi(x) = e^{\frac{-\pi i x^2}{n}},$$

so folgt unter der Voraussetzung dass n eine *gerade Zahl* ist:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\pi i\nu^2}{n}} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i t^2}{n}}\,dt,$$

und durch die Substitution von $\sqrt{n}\,t$ für t:

$$(7)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\pi i\nu^2}{n}} = -i\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2}\,dt,$$

worin $\sqrt{n}$ positiv zu nehmen ist.

Um das Integral, was hier noch steht, zu bestimmen, brauchen wir nur $n = 2$ zu nehmen, und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2}\,dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

woraus sich also

$$(8) \qquad \sum e^{\frac{\ldots}{n}} = \frac{1-i}{2}\sqrt{2n}$$

ergiebt.

Aus diesem speciellen Fall lässt sich der allgemeine Fall der *Gauss'schen Summe* $\sum e^{\frac{2h\pi i}{n}s^2}$, in der s ein volles Restsystem nach dem Modul n durchläuft und n eine beliebige gerade oder ungerade Zahl ist, wie Dirichlet gezeigt hat, durch elementare Hilfsmittel ableiten (Dirichlet's Werke, Bd I, S. 477, Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie,* Supplement I). Zu bemerken ist noch, dass sich schon Kronecker der Integration auf complexem Wege bedient hat, um den Werth der Gauss'schen Summe zu ermitteln (Crelle's Journal, Bd 105, S. 167).

III.

Der Übergang zu unendlichen Grenzen, von dem im Vorhergehenden Gebrauch gemacht ist, ist in der Formel (3) nur unter ganz besonderen Voraussetzungen über die Function $\varphi(x)$ gestattet, die in dem vorigen Beispiel erfüllt sind. Zu einer viel allgemeineren Anwendbarkeit dieses Verfahrens gelangt man aber durch eine kleine Umformung.

Ist wie früher c der Durchschnittspunkt des Integrationsweges mit der Linie X, so können wir den Ausdruck (3) so zerlegen:

$$f(x) = \int_a^c \varphi(z)dz - \int_a^c \frac{\varphi(z)dz}{1 - e^{-2\pi i(x-z)}} + \int_c^b \frac{\varphi(x)dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}},$$

und wir ändern nun $f(x)$ nur um eine additive Constante, wenn wir in dem ersten dieser drei Integrale die untere Grenze a durch einen beliebigen anderen festen Werth ersetzen. Dann können wir in den beiden anderen Integralen a nach $-i\infty$, b nach $+i\infty$ wachsen lassen, selbst dann noch wenn die Function $\varphi(z)$ mit unendlich wachsendem z wie irgend eine Potenz von z unendlich wird. Wir erhalten dann, wenn wir in dem ersten

Integral die untere Grenze, als ganz beliebig, in der Bezeichnung weglassen:

$$f(x) = \int^{c} \varphi(z)dz - \int_{-i\infty}^{c} \frac{\varphi(z)dz}{1 - e^{-2\pi i(x-z)}} + \int_{c}^{i\infty} \frac{\varphi(z)dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}},$$

oder wenn wir im zweiten und dritten Integral $z - x = -it$ und $z - x = it$ substituieren:

$$(9) \qquad f(x) = \int^{c} \varphi(z)dz - i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x-it)dt}{1 - e^{2\pi t}} + i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it)dt}{1 - e^{2\pi t}}.$$

Um $f(x+1)$ zu erhalten, haben wir den Punkt c durch den Punkt c' zu ersetzen, der zwischen x und $x+1$ liegt. Es hindert uns aber nichts, $c - x = x - c'$ d. h. c und c' gleich weit von x entfernt anzunehmen. Dadurch ergiebt sich

$$(10) \qquad f(x+1) = \int^{c'} \varphi(z)dz - i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x-it)dt}{1 - e^{2\pi t}} + i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it)dt}{1 - e^{2\pi t}},$$

und wenn man wieder $f(x+1) + f(x) = 2f(x) + \varphi(x)$ setzt, so ergiebt sich

$$2f(x) = -\varphi(x) + \int^{c} \varphi(z)dz + \int^{c'} \varphi(z)dz$$
$$+ i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1 - e^{2\pi t}} dt + i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1 - e^{2\pi t}} dt,$$

und hierin kann man nun, da $t = 0$ wieder kein Pol der Integranden ist, c und folglich auch c' mit x zusammenfallen lassen. So erhält man

$$(11) \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \int \varphi(x)dx + i \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1 - e^{2\pi t}} dt.$$

Dies ist die von Abel gegebene Formel. Von ihren zahlreichen Anwendungen sollen nur einige hier angeführt werden.

Macht man die Annahme $\varphi(x) = e^{vx}$, so wird nach (2)

$$f(x+n) - f(x) = e^{vx}\frac{e^{nv}-1}{e^v-1},$$

und aus (11) folgt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin vt\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{4}\frac{e^v+1}{e^v-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{v}.$$

Dieses von Cauchy auf anderem Wege abgeleitete Integral ist für Abel der Ausgangspunkt des Beweises.

Die Entwicklung nach dem Taylor'schen Lehrsatz ergiebt:

$$i\big(\varphi(x+it) - \varphi(x-it)\big) = 2\sum(-1)^n\frac{\varphi^{(2n-1)}(x)\,t^{2n-1}}{\Pi(2n-1)},$$

worin n die Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ durchläuft. Wenn man also noch

$$(12)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{B_n}{4n}$$

setzt, so folgt aus (11)

$$(13)\qquad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \int\varphi(x)dx + \sum(-1)^{n-1}B_n\frac{\varphi^{(2n-1)}(x)}{\Pi(2n)}.$$

Diese Reihe ist freilich im allgemeinen divergent, da die *Bernoulli'schen Zahlen* B_n, für die man aus (12) auch den Ausdruck

$$B_n = \frac{2\Pi(2n)}{(2\pi)^{2n}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^{2n}}$$

findet, mit unendlich wachsenden n wie $2\Pi(2n)(2\pi)^{-2n}$ unendlich werden. Will man also die Reihe (13) benutzen, so muss man sich auf eine endliche Anzahl von Gliedern beschränken und den dabei begangenen Fehler abschätzen, was für jede Function $\varphi(x)$ besonders geschehen muss.

In dem besonderen Fall aber, wenn $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, ist die Formel (13) genau richtig, denn die Reihe bricht dann, wenn m der Grad von $\varphi(x)$ ist, ab, sobald $2n - 1 > m$ wird.

Setzt man $\varphi(x) = x^m$, so ergiebt sich aus (11) und (13) ein Polynom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades $S_m(x)$, das nach (2) für ein ganzzahliges x den Werth

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (x-1)^m + S_m(0)$$

darstellt:

$$(14)\qquad S_m(x) = -\frac{1}{2}x^m + \frac{x^{m+1}}{m+1} + i\int_0^\infty \frac{(x+it)^m - (x-it)^m}{1-e^{2\pi t}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}x^m + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \sum^n (-1)^{n-1}\frac{\Pi(m)}{\Pi(2n)\Pi(m-2n+1)}B_n x^{m-2n+1},$$

worin die Summe so weit fortzusetzen ist, als $m-2n+1$ nicht negativ wird. Es ist daher

$$S_m(0) = 0 \quad \text{für ein gerades } m$$

$$(15)\qquad S_m(0) = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m+1}B_{\frac{m+1}{2}} \quad \text{für ein ungerades } m.$$

Aus der Formel

$$S_m(x+1) - S_m(x) = x^m$$

ergiebt sich, wenn man $x = 0$ setzt, $S_m(1) = S_m(0)$ und folglich aus (14) für $x = 1$,

$$(16)\qquad \sum (-1)^{n-1}\frac{\Pi(m)}{\Pi(2n)\Pi(m-2n+1)}B_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1},$$

worin aber die Summe nur so weit auszudehnen ist, als $m-2n+1$ positiv bleibt, also im Falle eines ungerades m das Glied $2n = m+1$ wegzulassen ist.

Hieraus ergeben sich, wenn man $m = 2n$ oder $= 2n+1$ annimmt, für jedes n zwei lineare Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,$$

aus denen man diese Zahlen successive berechnen kann, und zwar jedesmal zwei neue aus den schon gefundenen. Beispielsweise für $m = 4$ und $m = 5$:

$$2B_1 - B_2 = \frac{3}{10}, \qquad B_1 - B_2 = \frac{2}{15},$$

woraus man erhält:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}.$$

Wenn man in der Formel (13) $\varphi(x) = \log x$ setzt, so erhält man die STIRLING'sche Reihe

$$(17) \quad \log \Gamma(x) = -\frac{1}{2}\log\frac{x}{2\pi} + x(\log x - 1) + \sum (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n(2n-1)} \frac{1}{x^{2n-1}},$$

worin die additive periodische Function aus dem Verhalten von $\Gamma(x)$ im Unendlichen bestimmt wird.

Eine allgemeinere Entwicklung erhält man aus (11), wenn man $\varphi(x) = \log(x + c)$ setzt, worin c eine willkürliche Constante bedeutet, und dann nach fallenden Potenzen von x entwickelt.

Man erhält so zunächst

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log(x + c) + (x + c)\big(\log(x + c) - 1\big)$$

$$i \sum^{n} \frac{(-1)^n}{nx^n} \int_0^\infty \frac{dt}{1 - e^{2\pi t}} \big((c + it)^n - (c - it)^n\big)$$

und dies giebt nach (14)

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log(x + c) + (x + c)\big(\log(x + c) - 1\big)$$

$$- \sum \frac{(-1)^n}{nx^n}\left(S_n(c) + \frac{c^n}{2} - \frac{c^{n+1}}{n+1}\right).$$

Wenn man aber noch $\log(x + c)$ nach fallenden Potenzen von x entwickelt und ein additive Constante aus $x = \infty$ bestimmt, so folgt endlich:

$$(18) \qquad \log \Gamma(x + c) = -\log\sqrt{\frac{x}{2\pi}} + (x + c)\log x - x - \sum \frac{(-1)^n}{nx^n} S_n(c).$$

Die Abschätzung des Restes dieser Entwicklung, wenn man bei irgend einem Gliede abbricht, ist von HERMITE gegeben (Crelle's Journal, Bd. 115).

Strassburg, Weihnachten 1901.

ÜBER DIE MODULN DER THETAFUNCTIONEN

VON

F. SCHOTTKY

in MARBURG.

Die ABEL'schen Functionen von ρ Variabeln, welche durch die Thetafunctionen definirt werden, hängen ausser von den Variabeln ab von $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ Parametern, den Periodicitätsmoduln. Die ABEL'schen Functionen der RIEMANN'schen Theorie enthalten nur $3\rho - 3$ wesentliche Parameter. Sie sind demnach, sobald ρ den Werth 3 übersteigt, specieller Natur, und damit der RIEMANN'sche Fall eintritt, müssen zwischen den Periodicitätsmoduln eine Anzahl von Gleichungen stattfinden.

Für $\rho = 4$ besteht eine solche Relation. Diese habe ich in einer früheren Arbeit aufgestellt (CRELLE's Journal, Bd. 102). Auf einem andern Wege ist Herr POINCARÉ zu ihr gelangt (Journal de Math., (5) I), sodass für die merkwürdige Formel zwei Beweise vorliegen. Es ist natürlich eine transcendente Relation zwischen den 10 Periodicitätsmoduln, aber sie erscheint als algebraische Gleichung zwischen den Anfangswerthen von 24 geraden Thetafunctionen. Da diese 24 Functionen auf sehr verschiedene Arten gewählt werden können, so ist damit ein System von sehr vielen Gleichungen zwischen den Anfangswerthen der geraden Theta gegeben, charakteristisch für den RIEMANN'schen Fall der ABEL'schen Functionen von vier Variabeln.

Zunächst erwartete ich, nach der Analogie der Fälle $\rho = 2$ und $\rho = 3$, dass sich dieses Gleichungssystem würde auflösen lassen, dass sich für die einzelnen Moduln algebraische Ausdrücke aufstellen lassen würden, die das System identisch befriedigen. Diese Erwartung wurde nicht ohne weiteres

erfüllt. Um das Problem nicht ungelöst zulassen, war ich genöthigt, die Anzahl der unbestimmten Grössen zu vermehren, und nicht nur jedem geraden θ_m eine bestimmte Constante c_m zuzuordnen — das Anfangsglied in der Entwickelung von θ_m nach homogenen Functionen der Variabeln —, sondern ebenso auch jedem ungeraden Theta eine Constante u_m. Diese Constante u_m ist gleichfalls das Anfangsglied in der Entwickelung der ungeraden Function θ_m, aber es ist der Werth dieser linearen Function für specielle Werthe der vier Variabeln. Diese vier Werthe lassen sich so wählen, dass zwischen den c einerseits und den u andrerseits ein Gleichungssystem besteht, scheinbar complicirter als das, welches die c allein unter sich verbindet, für das sich aber eine algebraische Lösung ungezwungen darbietet. Allerdings werden die u und die c nicht durch unabhängige Hülfsgrössen ausgedrückt, aber sie werden in Verbindung gesetzt mit einem System von zehn Punkten im Raume, die durch eine geometrisch übersichtliche Bedingung verknüpft sind.

Es zeigen sich bei diesen Betrachtungen so viele Analogien mit den Abel'schen Functionen von zwei und drei Variabeln, sogar mit den elliptischen, dass ich es für richtig halte, die ganze Untersuchung im vollen Zusammenhange mit den Theorien der Functionen von weniger als vier Variabeln zu führen, auch wenn ich dadurch vielfach auf bekanntes Gebiet komme.

§ 1.

Für das System der geraden und ungeraden Theta, die einer Klasse Abel'scher Functionen zugeordnet sind, ist charakteristisch, dass in den Hälften der Perioden zugleich eine Gruppe von Permutationen der Grössen des Systems gegeben ist. Vermehrt man das Argument u — ich verstehe darunter das System der ρ Variabeln — um eine ganze Periode 2ω, so geht jede Thetafunction in sich selbst über, multiplicirt mit einem Exponentialfactor. Vermehrt man aber u nur eine halbe Periode ω, so entsteht eine Permutation. Da bei einer Addition mehrerer halben Perioden die Reihenfolge gleichgültig ist, da ferner die Addition zweier gleichen halben Perioden eine ganze Periode hervorbringt, so ist auch bei der Zusammensetzung der Permutationen die Reihenfolge gleichgültig, und die Wiederholung derselben Permutation führt zur ursprünglichen Gruppirung zurück.

Wir müssen mit diesen Permutationen so rechnen, als ob es Grössen wären. Die Grundgesetze sind sehr einfach. Es ist $\varkappa\lambda = \lambda\varkappa$, ferner $\varkappa\varkappa = 0$, wenn mit dem Symbol 0 bezeichnet wird, dass keine Änderung eintritt. Ist $\varkappa\lambda\mu = 0$, so ist $\varkappa = \lambda\mu$, $\lambda = \varkappa\mu$, etc. Wenn wir die Permutation »0« mit einrechnen, so ist die Anzahl der Permutationen ebenso gross, wie die der Theta.

Nun findet aber eine Complication statt, die daher rührt, dass die Thetafunctionen theils gerade theils ungerade sind. Es werde, wenn $\varkappa$ das Zeichen für eine beliebige Permutation, und θ_α irgend eins der 4^ρ Theta ist, mit $\theta_{\alpha\varkappa}$ dasjenige Theta bezeichnet, das aus θ_α durch die Permutation $\varkappa$ hervorgeht. Der Quotient

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa}}{\theta_\alpha} = f_\alpha$$

ist dann eine gerade oder ungerade Function von u, aber keine Abel'sche Function der Klasse — abgesehen natürlich von dem Falle $\varkappa = 0$. Dagegen gehört, wenn λ eine neue Permutation bedeutet, und man

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa\lambda}}{\theta_{\alpha\lambda}} = f_{\alpha\lambda}$$

bildet, der Quotient beider f:

$$\varphi_\alpha = \frac{f_\alpha}{f_{\alpha\lambda}} = \frac{\theta_{\alpha\varkappa}\,\theta_{\alpha\lambda}}{\theta_\alpha\,\theta_{\alpha\varkappa\lambda}}$$

zu den Functionen der Klasse. Ob diese Abel'sche Function φ_α gerade oder ungerade ist, hängt ab von den beiden Permutationen $\varkappa, \lambda$, aber nicht von der gewählten Function θ_α. Denn bildet man ebenso:

$$\varphi_\beta = \frac{\theta_{\beta\varkappa}\,\theta_{\beta\lambda}}{\theta_\beta\,\theta_{\beta\varkappa\lambda}},$$

so entspringt φ_β aus φ_α durch Vermehrung des Arguments um eine halbe Periode. Es geht aber offenbar durch Vermehrung von u um eine halbe Periode eine gerade Function wieder in eine gerade über, und eine ungerade in eine ungerade.

Zwei Permutationen können sich demnach verschieden zu einander verhalten; wir führen das Zeichen

$$(\varkappa, \lambda) = (\lambda, \varkappa)$$

ein, welches $+1$ oder -1 sein soll, jenachdem die oben gebildeten Quotienten $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ gerade oder ungerade Functionen sind, und nennen im ersten Falle, mit FROBENIUS, die Permutationen $\varkappa, \lambda$ syzygetisch, im andern azygetisch.

Das Zeichen $(\varkappa, \lambda)$ entscheidet noch eine andre Frage. Es sei ω die halbe Periode, die der Permutation λ entspricht. Es ist dann, bis auf einen constanten Faktor, $f_{\alpha\lambda}$ mit $f_\alpha(u + \omega)$ identisch. Aus der Gleichung

$$\varphi_\alpha(-u) = (\varkappa, \lambda)\varphi_\alpha(u)$$

folgt demnach:

$$\frac{f_\alpha(-u)}{f_\alpha(-u + \omega)} = (\varkappa, \lambda)\frac{f_\alpha(u)}{f_\alpha(u + \omega)}.$$

Da andrerseits offenbar

$$\frac{f_\alpha(-u)}{f_\alpha(-u + \omega)} = \frac{f_\alpha(u)}{f_\alpha(u - \omega)}$$

ist, so ergiebt sich:

$$f_\alpha(u + 2\omega) = (\varkappa, \lambda)f_\alpha(u).$$

Dies sagt aus: Bei der Vermehrung um eine ganze Periode bleibt der Quotient

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa}}{\theta_\alpha}$$

ungeändert oder er wechselt sein Zeichen, je nachdem die Hälfte dieser ganzen Periode, oder die entsprechende Permutation, sich syzygetisch oder azygetisch zur Permutation $\varkappa$ verhält. Hieraus ziehen wir zwei Folgerungen:

Erstens dass, wenn $\varkappa, \lambda, \mu$ drei Permutationen sind,

$$(\varkappa, \mu)(\lambda, \mu) = (\varkappa\lambda, \mu)$$

ist. Wir können hinzufügen, dass auch

$$(\varkappa, \lambda)(\varkappa, \mu) = (\varkappa, \lambda\mu)$$

ist, da ja $(\varkappa, \lambda)$ mit $(\lambda, \varkappa)$ identisch ist. Allgemein, wenn ω, ω' irgendwelche Combinationen gegebener Permutationen sind, ist:

$$(\omega, \omega') = \prod(\varkappa, \varkappa'),$$

wobei sich das Product erstreckt über alle Elemente $\varkappa$ von ω und $\varkappa'$ von ω'. Ferner ist offenbar stets

$$(0, \varkappa) = 1; \qquad (\varkappa, \varkappa) = 1,$$

wenn 0 wieder das Zeichen für die identische Permutation bedeutet.

Eine zweite Folgerung ist die, dass die identische Permutation 0 die einzige ist, die sich zu allen andern syzygetisch verhält. Denn ist $\varkappa$ von 0 verschieden, so ist der Quotient f_a keine Abel'sche Function der Klasse und es muss daher ganze Perioden geben, die f_a in $-f_a$ überführen.

§ 2.

Es seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ die Zeichen für eine Reihe von Permutationen oder halben Perioden. Fügen wir zu dieser Reihe noch alle aus ihnen combinirten Permutationen hinzu: $\varkappa_1\varkappa_2, \varkappa_1\varkappa_3, \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$ etc., und ausserdem, als Combination 0^ter^ Ordnung, die Permutation 0 oder die ganze Periode, so erhalten wir eine Gruppe. Die gegebene Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ soll unabhängig heissen, wenn die 2^n Combinationen lauter verschiedene Permutationen darstellen; n ist dann die Ordnung der Gruppe, und $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine Basis.

Wir können so für die ganze Gruppe der 4^p Permutationen eine Basis

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{2p}$$

aufstellen. Wenn wir dann eine beliebige Permutation ω nehmen, und das Verhalten von ω zu den Elementen der Basis feststellen durch die Werthe der $2p$ Vorzeichen

$$(\omega, \varkappa_a) = \varepsilon_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, 2p)$$

so ist umgekehrt ω eindeutig fixirt durch die Angabe dieser $2p$ Vorzeichen. Denn wäre ω' eine zweite Permutation, die derselben Gleichungen genügt, so wäre offenbar $\omega\omega'$ syzygetisch zu allen Elementen der Basis und somit zu allen 4^p Permutationen überhaupt. Dann muss aber nach dem letzten Satz in § 1 $\omega\omega' = 0$, d. h. $\omega' = \omega$ sein. Es folgt hieraus, dass auch jeder Wahl der $2p$ Vorzeichen ε immer eine und nur eine Permutation ω entsprechen muss.

Nehmen wir jetzt eine unabhängige Reihe, die aus weniger als 2ρ Elementen besteht:

$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \qquad (n < 2\rho).$$

Wenn wir dann die n Gleichungen aufstellen:

$$(\omega, \chi_\alpha) = \varepsilon_\alpha, \qquad (\alpha=1,2,\ldots,n)$$

in denen die ε beliebig gewählte Vorzeichen bedeuten sollen, so giebt es genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die diesen n Bedingungen genügen. Denn wenn wir die gegebene Reihe durch Hinzufügung von $2\rho-n$ neuen Elementen $\chi_{n+1}, \ldots, \chi_{2\rho}$ zu einer Basis des ganzen Systems vervollständigen, so können wir über die $2\rho-n$ hinzutretenden Vorzeichen (ω, χ_α) willkürlich verfügen.

Speciell giebt es hiernach genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die sich zur Basis einer gegebenen Gruppe n^{ter} Ordnung, und damit zu dieser ganzen Gruppe G, syzygetisch verhalten. Diese bilden ihrerseits wieder eine Gruppe G', und offenbar steht G zu G' in derselben Beziehung, wie G' zu G.

Wenn alle Elemente einer Gruppe G sich gegenseitig syzygetisch verhalten, so nennt man sie eine syzygetische oder Göpel'sche Gruppe. Dazu genügt offenbar, dass die Elemente der Basis sich paarweise syzygetisch verhalten:

$$(\chi_\alpha, \chi_\beta) = +1.$$

Die Ordnung einer solchen Gruppe kann nicht grösser als ρ sein. Denn wir haben gesehen: es giebt genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die zu allen Elementen von G syzygetisch sind. Dazu gehören aber die Elemente von G selbst. Folglich ist $2^n \leq 2^{2\rho-n}$, d. h. $n \leq \rho$. Wenn $n < \rho$ ist, so giebt es Permutationen, die zu allen Elementen von G syzygetisch sind, ohne in dieser Gruppe selbst enthalten zu sein. Folglich lässt sich jede Göpel'sche Gruppe von niedrigerer als der ρ^{ten} Ordnung zu einer Gruppe von der ρ^{ten} Ordnung ergänzen.

Denken wir uns wieder eine beliebige Reihe von Permutationen: χ_1, $\chi_2, \ldots, \chi_n$ gegeben. Wenn je zwei Glieder dieser Reihe sich syzygetisch verhalten, so entspringt hieraus eine Göpel'sche Gruppe. Nehmen wir aber jetzt im Gegentheil an, dass je zwei der Glieder sich azygetisch verhalten:

$$(\chi_\alpha, \chi_\beta) = -1 \qquad (\alpha \lessgtr \beta),$$

dann wollen wir die Reihe eine azygetische nennen. — Wir fügen noch

eine Definition hinzu. Wenn durch die Zusammensetzung der einzelnen Permutationen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ die identische Permutation entsteht, also $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n = 0$ ist, soll die Reihe eine geschlossene heissen.

Fragen wir uns zunächst, ob eine azygetische Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ zugleich eine geschlossene sein kann. Dann muss

$$\varkappa_n = \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{n-1}$$

und deshalb

$$(\varkappa_n, \varkappa_n) = (\varkappa_1, \varkappa_n)(\varkappa_2, \varkappa_n) \ldots (\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$$

sein. Nun ist aber $(\varkappa_n, \varkappa_n) = 1$, während alle Faktoren der rechten Seite gleich -1 sind. Es ergiebt sich also:

$$1 = (-1)^{n-1},$$

d. h.: n muss eine ungerade Zahl sein. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass solche geschlossene Reihen wirklich existiren. Denn nehmen wir an dass eine gerade Zahl von Permutationen: $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$ gegeben ist, die sich gegenseitig azygetisch verhalten. Fügen wir der Reihe hinzu: $\varkappa_n = \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{n-1}$, so verhält sich offenbar $\varkappa_n$ azygetisch zu $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$.

Es sei jetzt $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine geschlossene azygetische Reihe, und ω eine beliebige Permutation. Da $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n = 0$ ist, so ist

$$(\omega, \varkappa_1)(\omega, \varkappa_2) \ldots (\omega, \varkappa_n) = 1.$$

Da n eine ungerade Zahl ist, so können nicht alle Factoren der linken Seite -1 sein; es giebt demnach keine Permutation ω, die sich gleichzeitig zu $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ azygetisch verhält. Mit andern Worten: Eine geschlossene azygetische Reihe kann nicht erweitert werden. Es folgt hieraus weiter, dass eine nicht geschlossene azygetische Reihe nothwendig unabhängig ist. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste sich aus einer Anzahl ihrer Glieder eine geschlossene Reihe bilden lassen, und dies ist unmöglich, weil eine geschlossene azygetische Reihe nicht erweitert werden kann.

Eine nicht geschlossene azygetische Reihe kann dagegen stets erweitert werden. Wenn $n = 2\rho$ ist, kann allerdings nur noch das Glied

$$\varkappa_{2\rho+1} = \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{2\rho}$$

hinzugefügt werden, wodurch sie zu einer geschlossenen azygetischen Reihe

ergänzt wird. Ist aber $n < 2\rho$, so giebt es $2^{2\rho-n}$ Permutationen ω, die zu $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ azygetisch sind, also mindestens 2, und somit auch sicher eine, die von $\chi_1\chi_2\ldots\chi_n$ verschieden ist.

Man kann demnach azygetische Reihen aufstellen, die aus 2ρ Gliedern bestehen, und die eine Basis bilden für die ganze Gruppe der 4^ρ Permutationen. Jede solche Reihe lässt sich durch Hinzufügung eines letzten Gliedes noch zu einer geschlossenen azygetischen Reihe ergänzen. Jede beliebige Permutation wird dann durch zwei complementäre Combinationen der Elemente $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2\rho+1}$ dargestellt.

Denken wir uns wieder eine beliebige unabhängige Reihe $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ gegeben und bilden die Reihe der Thetafunktionen, die aus einer, θ_α, durch die Reihe dieser Permutationen hervorgehn:

$$\theta_\alpha, \; \theta_{\alpha\chi_1}, \; \ldots, \; \theta_{\alpha\chi_n},$$

so gilt zunächst der Satz: Die Function θ_α kann so gewählt werden, dass alle Glieder dieser Reihe gleichartige, d. h. entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade Functionen sind.

Denn nehmen wir an, die Glieder seien nicht gleichartig. Wir verstehen dann unter ε_ν den Werth $+1$ oder -1, je nachdem die Function mit dem Index $\alpha\chi_\nu$ gleichartig oder ungleichartig ist mit θ_α, und bestimmen eine Permutation ω, die den n Bedingungen

$$(\omega, \chi_\nu) = \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Alsdann ist der Quotient

$$\frac{\theta_\alpha\,\theta_{\alpha\chi_\nu}}{\theta_{\alpha\omega}\,\theta_{\alpha\omega\chi_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \nu)$$

gerade oder ungerade, jenachdem ε_ν gleich $+1$ oder -1 ist. Deshalb muss $\theta_{\alpha\omega\chi_\nu}$ in jedem Falle denselben Charakter haben wie $\theta_{\alpha\omega}$.

Ist $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ eine geschlossene Reihe von Permutationen, und n eine ungerade Zahl, so nennen wir auch die Reihe der $n+1$ Functionen:

$$\theta_\alpha, \; \theta_{\alpha\chi_1}, \; \ldots, \; \theta_{\alpha\chi}$$

eine geschlossene. Sie ist dadurch charakterisirt, dass der Quotient den wir enthalten, wenn wir die Hälfte dieser Functionen als Faktoren in den Zähler, die andere Hälfte in den Nenner aufnehmen, immer eine Abel'sche Function der Klasse ist.

Die Reihe θ_α, $\theta_{\alpha\varkappa}$, $\theta_{\alpha\lambda}$ wird geschlossen durch $\theta_{\alpha\varkappa\lambda}$, und ebenso gehört zu jeder ungeraden Anzahl von Thetafunctionen ein bestimmtes Theta, das die Reihe schliesst.

Wir wollen mit $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ dasjenige Theta bezeichnen, das die Reihe θ_α, θ_β, θ_γ schliesst, ebenso mit $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ das Schlussglied zu θ_α, θ_β, θ_γ, θ_δ, θ_ε, etc. Jede Combination ungerader Ordnung von Theta-Indices bezeichnet auf diese Weise wieder ein Theta. Dagegen bezeichnen die geraden Combinationen dieser Indices Permutationen. $\alpha\beta$ ist diejenige Permutation, die θ_α in θ_β überführt, $\alpha\beta\gamma\delta$ die, welche sich aus $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zusammensetzt, u. s. f. Wir sagen ferner: die drei Functionen θ_α, θ_β, θ_γ verhalten sich syzygetisch oder azygetisch, je nachdem die Abel'sche Function

$$\frac{\theta_\alpha\,\theta_\beta}{\theta_\gamma\,\theta_{\alpha\beta\gamma}}$$

gerade oder ungerade ist, und von einer Anzahl von Functionen

$$\theta_\alpha\,,\ \theta_\beta\,,\ \theta_\gamma\,,\ \theta_\delta \text{ etc.}$$

sagen wir, dass sie eine azygetische Reihe bilden, wenn je drei Glieder sich azygetisch verhalten.

Es ist leicht zu sehen, dass, wenn $\varkappa$, λ, μ etc. eine azygetische Reihe von Permutationen ist, dann

$$\theta_\alpha\,,\ \theta_{\alpha\varkappa}\,,\ \theta_{\alpha\lambda}\,,\ \theta_{\alpha\mu} \text{ etc.}$$

eine azygetische Reihe von Functionen darstellt. Falls die Reihe nicht geschlossen ist, ist sie auch unabhängig; wir können daher θ_α so wählen dass alle diese Functionen denselben Charakter haben. Daraus folgt dass sich die Thetafunctionen des ganzen Systems in folgender Weise anordnen lassen: Es kann zunächst eine azygetische Reihe von $2\rho+1$ gleichartigen Theta aufgestellt werden:

$$\theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \ldots\,,\ \theta_{2\rho+1}\,.$$

Alle übrigen Theta werden dann bezeichnet durch die Combinationen ungerader Ordnung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2\rho+1$. Da θ_1, θ_2, θ_3 sich azygetisch verhalten, so ist der Quotient

$$\frac{\theta_1\,\theta_2}{\theta_3\,\theta_{123}}$$

eine ungerade Function; folglich hat θ_{123} den entgegengesetzten Charakter wie θ_1, θ_2, θ_3 etc. Alle Functionen, die durch dreigliedrige Indices bezeichnet sind, haben demnach unter einander denselben, aber zu denen der Hauptreihe entgegengesetzten Charakter. Ebenso schliesst man, dass die Theta mit fünfgliedrigem Index wieder denselben Charakter haben, wie die der Hauptreihe, u. s. f. Am grössten ist die Anzahl der Combinationen von der mittleren Ordnung: ρ oder $\rho + 1$. Diese müssen gerade Functionen bezeichnen, da die Anzahl der geraden überwiegt; demnach sind gerade alle Functionen θ_m, bei denen die Ordnung der Combination m congruent ρ oder $\rho + 1$ mod. 4 ist, ungerade die übrigen.

Die Functionen der Hauptreihe sind gerade, wenn $1 \equiv \rho$ oder $\equiv \rho + 1$ mod. 4 ist, d. h. für $\rho \equiv 0$ und $\equiv 1$ mod. 4; in den andern Fällen sind sie ungerade.

Statt der nicht geschlossenen azygetischen Reihe kann man auch die geschlossene Reihe der Bezeichnung zu Grunde legen, die man erhält, wenn man der Hauptreihe noch als letztes Glied die Function

$$\theta_{2\rho+2} = \theta_{123\ldots2\rho+1}$$

hinzufügt. Jedes Theta wird dann durch zwei complementäre Combinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$ bezeichnet. Indess kann hier insofern eine Unregelmässigkeit eintreten, als $\theta_{2\rho+2}$ nicht nothwendig von derselben Art ist, wie $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2\rho+1}$. Wenn ρ gerade ist, so haben alle $2\rho + 2$ denselben Charakter, weil dann $2\rho + 1 \equiv 1$ mod. 4 ist; wenn aber ρ ungerade ist, so ist $\theta_{2\rho+2}$ von entgegengesetzter Art.

Es kann allerdings auch in diesem letzteren Falle die volle Symmetrie in Bezug auf die Indices $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$ gewahrt werden, wenn man eine leichte Modification der Bezeichnung eintreten lässt. Durch die Reihe $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2\rho+2}$ ist die Bezeichnung der Permutationen festgelegt; jeder Permutation entsprechen zwei complementäre Combinationen gerader Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$. Nun bevorzugen wir die Function $\theta_{2\rho+2}$, indem wir sie ohne Index lassen, und allen übrigen geben wir den Index derjenigen Permutation, durch die sie aus θ hervorgehen. Dann ist leicht zu sehen, dass Combinationen derselben Ordnung auch wieder Functionen von gleichem Charakter bezeichnen. Nehmen wir z. B. $\rho = 1$. Die geraden elliptischen Theta würden bei dieser Festsetzung zu bezeichnen

sein als θ_{12} oder θ_{34}, θ_{13} oder θ_{24}, etc., während $\theta = \theta_{1234}$ das ungerade Theta ist. Für $\rho = 3$ würden

$$\theta_{12}\,,\ \theta_{12}\,,\ \ldots,\ \theta_{78}$$

die 28 ungeraden, θ und $\theta_{1234} = \theta_{5678}$ etc. die geraden Functionen sein.

Die Existenz der gleichartigen azygetischen Reihen war schon Riemann bekannt. Es ist noch ein Punkt zu besprechen, der für unsere algebraische Untersuchung von grosser Wichtigkeit ist, und auf den Noether und Frobenius aufmerksam gemacht haben. Nehmen wir eine Göpel'sche Gruppe G, und bilden die Produkte

$$P_{\alpha} = \prod_{\varkappa} \theta_{\alpha\varkappa}\,,$$

jedes dieser Produkte erstreckt über die 2^n Elemente von G. Die Mehrzahl dieser Produkte enthält gerade und ungerade Faktoren gemischt, und zwar sind dann jedesmal soviel gerade wie ungerade Faktoren vorhanden. Denn nehmen wir an, dass ein Faktor $\theta_{\alpha\varkappa'}$ existirt, der von entgegengesetzter Art ist wie θ_{α}, dann müssen, wenn $\theta_{\alpha\varkappa}$ irgend einen andern Faktor bedeutet, auch $\theta_{\alpha\varkappa}$ und $\theta_{\alpha\varkappa\varkappa'}$ von entgegengesetzter Art sein, weil der Quotient

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa}\,\theta_{\alpha\varkappa'}}{\theta_{\alpha}\,\theta_{\alpha\varkappa\varkappa'}}$$

eine gerade Function ist. Die Faktoren von P_{α} lassen sich also paarweise zusammenfassen, sodass immer der eine gerade, der andere ungerade ist.

Wären nur solche Produkte vorhanden, so wäre die Anzahl der geraden Theta gleich der der ungeraden, was nicht der Fall ist.

Beschränken wir uns jetzt auf diejenigen P_{α}, welche nur gleichartige Faktoren enthalten, so haben wir ein System, das, was die Gruppierung anbetrifft, genau analog ist dem System der Thetafunctionen von $\rho - n = \sigma$ Variabeln.

Gehört $\varkappa$ der Gruppe G an, so ist $P_{\alpha\varkappa} = P_{\alpha}$. Eine solche Permutation ist demnach für unser System als identische anzusehen.

Damit $P_{\alpha\lambda}$, ebenso wie P_{α}, ein Produkt gleichartiger Faktoren sei, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass λ sich zur ganzen Gruppe G syzygetisch verhält. Dieser Bedingung genügt eine Gruppe von $2^{2\rho-n}$ Permutationen, unter denen aber die der Gruppe G mit enthalten sind. Wir können also eine zweite Gruppe g' definiren, von der Ordnung $2\rho - 2n = 2\sigma$,

in der Weise, dass jede zur Gruppe G syzygetische Permutation sich darstellt in der Form $\varkappa\lambda$, wo $\varkappa$ der Gruppe G, λ der Gruppe G' angehört.

Die Permutationen der Gruppe G sind dann die einzigen, welche syzygetisch sind zu beiden Gruppen G und G'. Folglich giebt es in der Gruppe G' ausser der Permutation o keine andere, die zu allen Elementen von G' syzygetisch wäre.

Damit sind für das System derjenigen P_α, die Produkte von lauter gleichartigen Theta sind, dieselben Grundlagen aufgestellt, von denen wir ausgegangen sind bei der Gruppierung der 4^ρ Functionen Theta. Die Anzahl der P_α beträgt 4^σ, und es giebt zwei Arten der P_α: Produkte gerader, und Produkte ungerader Theta. Wir können sagen, dass drei Produkte P_α, P_β, P_γ sich syzygetisch oder azygetisch verhalten, jenachdem der Quotient

$$\frac{\Theta_\alpha\,\Theta_\beta}{\Theta_\gamma\,\Theta_{\alpha\beta\gamma}}$$

gerade oder ungerade ist. Wir können dann geschlossene azygetische Reihen der P aufstellen, die immer aus einer geraden Anzahl von Gliedern bestehen, und speziell für die Bezeichnung der P eine Hauptreihe

$$P_1\,,\;P_2\,,\;\ldots,\;P_{2\sigma+1}$$

zu Grunde legen, die aus P-Functionen der gleichen Art besteht, während

$$P_{123}\,,\;P_{124}\;\text{ etc.}$$

von der entgegengesetzten Art sind wie die Functionen der Hauptreihe.

Nehmen wir z. B. $n = \rho - 1$, also $\sigma = 1$, so besteht das System der P aus vier Grössen: P_1, P_2, P_3 und P_{123}; die drei ersten sind Produkte gerader, das letzte ein Produkt ungerader Theta.

Für $n = \rho - 2$ existiren 16 Functionen P. Die sechs Produkte ungerader Theta bilden eine geschlossene azygetische Reihe:

$$P_1\,,\;P_2\,,\;\ldots,\;P_6\,;$$

die Produkte gerader sind dann:

$$P_{123} = P_{456}\,,\qquad P_{124} = P_{356}\,,\quad\text{etc.}$$

Für $n = \rho$ reduzirt sich das System der P auf eine einzige Function, und diese ist ein Produkt gerader Theta.

§ 3.

Die Aufstellung der quadratischen Relationen unter den Thetafunctionen beruht auf sehr einfachen Sätzen.

Erstens: Von den Quadraten der Theta sind nur 2^ρ linear-unabhängig.

Zweitens: Auch von den Produkten

$$P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha\varkappa},$$

die zu einer bestimmten Permutation oder halben Periode $\varkappa$ gehören, sind nur 2^ρ linear-unabhängig. Diese Produkte sind aber theils gerade, theils ungerade Functionen. Beschränkt man sich auf die geraden, so sind nur $2^{\rho-1}$ unabhängig; dasselbe gilt von den ungeraden.

Drittens: Jede der Gleichungen, die sich hiernach zwischen den Thetafunctionen ergiebt, bleibt richtig, abgesehen von den Vorzeichen der einzelnen Glieder, bei sämmtlichen 4^ρ Permutationen des Systems. Aus

$$\sum (A_\alpha \theta_\alpha^2) = 0$$

folgt demnach

$$\sum (\pm A_\alpha \theta_{\alpha\lambda}^2) = 0,$$

und aus

$$\sum (A_\alpha P_\alpha) = 0,$$

$$\sum (\pm A_\alpha P_{\alpha\lambda}) = 0.$$

Auf die Vorzeichen wollen wir im folgenden wenig Rücksicht nehmen, um die Untersuchung nicht zu complicieren.

Wir bezeichnen durchweg mit c_α den constanten Werth, den eine gerade Function θ_α für $u = 0$ annimmt, und wenn θ_α ungerade ist, mit u_α ihr lineares Anfangsglied.

Fangen wir an mit dem Falle $\rho = 1$. Hier existieren drei gerade Theta: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Sie bilden eine azygetische Reihe, die geschlossen wird durch Hinzufügung des ungeraden Theta. Letzteres kann ohne Index bleiben.

Zwischen den Quadraten von je drei der Theta besteht eine lineare Relation, deren Coefficienten sicht leicht bestimmen lassen. Nehmen wir z. B.:

$$A_1\theta_1^2 + A_2\theta_2^2 + A_3\theta_3^2 = 0.$$

Dies wird durch die Permutation 12 übergeführt in:

$$A_1\theta_2^2 \pm A_2\theta_1^2 \pm A_3\theta^2 = 0.$$

Daraus folgt, wenn man $u = 0$ setzt:

$$A_1 c_2^2 = \pm A_2 c_1^2.$$

Hiernach erhält die Gleichung zwischen θ_1, θ_2, θ_3 die Form

$$(1)\qquad \sum_{\alpha=1}^{3}(\pm c_\alpha^2\theta_\alpha^2) = 0,$$

und daraus wiederum ergiebt sich für $u = 0$ die bekannte Constantenrelation:

$$(2)\qquad \sum_{\alpha=1}^{3}(\pm c_\alpha^4) = 0.$$

Für $\rho = 2$ haben wir 6 ungerade und 10 gerade Theta. In den 6 ungeraden:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$$

liegt eine geschlossene azygetische Reihe vor. $\theta_{123} = \theta_{456}$, etc. sind die 10 geraden Functionen.

Die übrigen sechsgliedrigen azygetischen Reihen gehen aus der Reihe der ungeraden hervor durch die 15 Permutationen 12, 13, ..., 56. Sie enthalten jedesmal vier gerade und zwei ungerade Functionen; z. B.:

$$\theta_{156}, \theta_{256}, \theta_{356}, \theta_{456};\ \theta_5, \theta_6.$$

Aus den geraden Theta allein lassen sich demnach 15 verschiedene viergliedrige azygetische Reihen bilden.

Zwischen den Quadraten von je fünf Thetafunctionen besteht eine lineare Gleichung. Ist aber eins dieser fünf Theta gerade, die übrigen ungerade, so muss offenbar der Coefficient des geraden Theta gleich 0 sein. Es besteht also z. B. eine Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4}(A_\alpha\theta_\alpha^2) = 0.$$

Wendet man hier die Permutation $34 = 1256$ an, und setzt dann $u = 0$, so folgt:

$$A_1 c^2_{1\varkappa} \quad + A_4 c^2_{4\varkappa}.$$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten A_α; es ergiebt sich:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm c^2_{\alpha\varkappa} \theta_\alpha^2) = 0.$$

Wir können sagen, dass hiermit die Relation gegeben ist, die zwischen vier ungeraden Theta besteht, oder auch, allgemeiner, zwischen irgend vier Theta, die eine azygetische Reihe bilden; sie hat die Form

$$\sum (\pm c^2_{\alpha\varkappa} \theta^2_\alpha) = 0,$$

wo $\varkappa$ diejenige Permutation bedeutet, durch die alle vier Theta in gerade übergeführt werden.

Nehmen wir speciell die vier Functionen als gerade an, so haben wir:

$$(3) \qquad \sum (\pm c^2_\alpha \theta^2_\alpha) = 0,$$

und für $u = 0$:

$$(4) \qquad \sum (\pm c^4_\alpha) = 0.$$

Diese viergliedrige Gleichung stellt ein System von 15 verschiedenen Relationen zwischen den Anfangsgliedern der 10 geraden Theta dar, da sich aus den geraden Theta 15 verschiedene viergliedrige azygetische Reihen bilden lassen.

Gehen wir jetzt über zu den Produkten

$$P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha\varkappa},$$

die zu einer der 15 halben Perioden gehören. Unter diesen acht Produkten giebt es vier, deren Faktoren gleichartig sind, und zwar drei Produkte gerader, ein Produkt ungerader Theta. Zwischen je drei dieser vier Functionen besteht eine lineare Gleichung; alle vier bilden eine geschlossene azygetische Reihe. Nennen wir, allerdings abweichend von der zuerst gewählten Bezeichnung der Theta, P_1, P_2, P_3 die drei Produkte erster Art, so können wir, da die Verhältnisse genau so liegen, wie bei den

Quadraten der Thetafunctionen von einer Variabeln, die beiden Formeln aufstellen:

(5) $$\sum_{a=1}^{3}(\pm p_a P_a) = 0,$$

(6) $$\sum_{a=1}^{3}(\pm p_a^2) = 0,$$

wo p_a den Werth von P_a für $u = 0$ bedeutet.

Kehren wir zurück zur ursprünglichen Bezeichnung und wählen etwa für $\varkappa$ die Permutation 56. Es sind dann

$$\theta_{145}\theta_{146}\,,\ \theta_{245}\theta_{246}\,,\ \theta_{345}\theta_{346}$$

die drei zugehörigen Produkte gerader Theta. Somit bestehen die Relationen:

$$\sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a45}c_{a46}\,\theta_{a45}\,\theta_{a46}) = 0,$$

$$\sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a45}^2 c_{a46}^2) \qquad = 0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ziehn wir eine weitere Folgerung. Wir wenden die Permutation 46 an, wodurch θ_{a46} in θ_a, θ_{a45} in θ_{a56} übergeführt wird, und beschränken uns auf die Anfangsglieder. So ergiebt sich:

(7) $$\sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a45}c_{a46}c_{a56}u_a) = 0.$$

Wir können dieser Gleichung auch die Form geben:

$$\sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a\varkappa}c_{a\lambda}c_{a\varkappa\lambda}u_a) = 0;$$

$\varkappa, \lambda$ und $\varkappa\lambda$ bedeuten hier diejenigen drei Permutationen, die gleichzeitig θ_1, θ_2, θ_3 in gerade Functionen überführen. Da θ_1, θ_2 und θ_3 irgend drei der sechs ungeraden Functionen sein können, so ist hiermit allgemein die Beziehung zwischen den Anfangsgliedern dreier ungeraden Theta dargestellt.

Bilden wir jetzt die entsprechenden Gleichungen für $\rho = 3$. Zunächst kann man sagen, dass zwischen den Quadraten von neun Thetafunctionen immer eine lineare Gleichung bestehen muss. Es gilt aber der Satz, dass

schon sechs Theta durch eine solche Gleichung verbunden sind, falls sie eine geschlossene azygetische Reihe bilden. Wenn dies zugleich lauter gerade Functionen sind, so hat die Relation die einfache Form:

$$\sum_{\alpha=1}^{6} (\pm c_\alpha^2 \theta_\alpha^2) = 0. \tag{8}$$

Um dies zu beweisen, denken wir uns zunächst für die Bezeichnung der 64 Theta eine azygetische Reihe $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_7$ von lauter ungeraden Theta zu Grunde gelegt. Die Functionen $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ sind dann gerade, $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ wiederum ungerade, der Combination $12\ldots7$ entspricht eine gerade Function. Wir fügen diese letztere, als θ_8, der Hauptreihe hinzu. Eine dreigliedrige Combination, die das Element 8 enthält, bezeichnet dann nicht eine gerade, sondern eine ungerade Function.

Nehmen wir nun die acht Functionen der Hauptreihe und ausserdem irgend eine andere Function, etwa θ_{678}. Wir können dann die Gleichung aufstellen:

$$A\theta_{678}^2 = \sum_{\alpha=1}^{8} (A_\alpha \theta_\alpha^2).$$

Da θ_8 die einzige gerade Function ist, die in dieser Gleichung vorkommt, so muss der Coefficient A_8 gleich 0 sein. Dasselbe gilt von A_6 und A_7; denn durch die Permutationen 68, 78 gehen alle Functionen in ungerade über, ausgenommen das eine Mal θ_6, das andre Mal θ_7. Demnach lautet die Gleichung so:

$$A\theta_{678}^2 = \sum_{\alpha=1}^{5} (A_\alpha \theta_\alpha^2).$$

Wendet man die Permutation 18 an, und setzt dann $u = 0$, so ergiebt sich:

$$Ac_{167}^2 = \pm A_1 c_8^2.$$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten folgendermassen:

$$c_8^2 \theta_{678}^2 = \sum_{\alpha=1}^{5} (\pm c_{\alpha 67}^2 \theta_\alpha^2),$$

und dies ist in Übereinstimmung mit dem aufgestellten Satze. Denn θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_5$ und $\theta_{678} = \theta_{12345}$ bilden eine geschlossene azygetische Reihe, und 67 ist diejenigen Permutation, die alle sechs Functionen in gerade überführt.

Der Satz ist damit auch allgemein bewiesen. Denn nehmen wir an, es liege eine geschlossene azygetische Reihe von sechs Theta vor. Wenn wir das letzte Glied fortlassen, so können die fünf übrigen zu einer siebengliedrigen azygetischen Reihe ergänzt werden, und es giebt eine Permutation, die diese sieben Theta in lauter ungerade überführt.

Gehen wir zu den Produkten

$$P_a = \theta_a \theta_{a\varkappa}$$

über, die einem bestimmten $\varkappa$ entsprechen. Unter diesen sind 16 gerade Functionen, davon 6 Produkte ungerader Theta. Die letzteren bilden wieder eine geschlossene azygetische Reihe. Ausserdem sind von den 16 P_a nur $2^{\rho-1} = 4$ linear-unabhängig. Hiernach ist klar, dass zwischen ihnen genau dieselben Relationen bestehen wie zwischen den Quadraten der 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln. Sind speciell P_1, P_2, P_3, P_4 vier der 16 Functionen, die eine nicht geschlossene azygetische Reihe bilden, so muss

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_{a\lambda} P_a) = 0 \tag{9}$$

sein, wobei λ diejenige Permutation bedeutet, die alle vier Functionen in Produkte gerader Theta überführt. $p_{a\lambda}$ bedeutet, wie früher, den Werth von $P_{a\lambda}$ für $u = 0$.

Nehmen wir jetzt eine Göpel'sche Gruppe zweiter Ordnung: $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$, und bilden die Produkte

$$Q_a = \theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda}.$$

Es existieren drei solche Produkte — nennen wir sie Q_1, Q_2, Q_3 —, die aus lauter geraden Faktoren bestehen, und ein Produkt ungerader Faktoren, Q_{123}. Die Werthe der drei ersteren für $u = 0$ bezeichnen wir mit q_1, q_2, q_3.

So gehört zu jeder Göpel'schen Gruppe zweiter Ordnung ein System von drei Constanten. Diese sind jedesmal durch eine Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm q_a) = 0 \tag{10}$$

verbunden, welche entspricht der Gleichung

$$\sum_{a=1} (\pm p) = 0$$

für $p = 2$, und der Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm c_\alpha^4) = 0$$

für $p = 1$. Die Formel ist leicht zu beweisen, wenn man die Produkte Q_α auflöst in $P_\alpha P_{\alpha\lambda}$. P_1, P_2, P_3 sind dann drei Produkte gerader Theta, und sie verhalten sich azygetisch; man kann noch ein viertes Produkt gerader Theta P_4 hinzufügen, sodass P_1, P_2, P_3, P_4 eine nicht geschlossene azygetische Reihe bilden. Alsdann besteht die Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm p_\alpha P_\alpha) = 0,$$

und aus ihr folgt:

$$\sum_{\iota=1}^{4} (\pm p_\alpha P_{\alpha\lambda}) = 0.$$

Nun kann Q_4 nicht aus lauter geraden Faktoren bestehen; $P_{4\lambda}$ verschwindet demnach für $u = 0$, und wir erhalten:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm p_\alpha p_{\alpha\lambda}) = 0,$$

oder:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm q_\alpha) = 0.$$

Die Anfangsglieder u_α der ungeraden Theta sind homogene lineare Functionen von drei unabhängigen Veränderlichen und es muss deshalb zwischen je vier dieser Grössen u_α eine lineare Gleichung bestehen. In einfacher Form lassen sich diese linearen Gleichungen nur dann darstellen, wenn die vier entsprechenden Functionen eine azygetische Reihe bilden. Aber diese speciellen linearen Relationen, die man azygetische nennen könnte, genügen vollständig, um sämmtliche 28 u_α durch drei unter ihnen auszudrücken.

Nehmen wir demnach irgend vier ungerade Theta an: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, die sich gegenseitig azygetisch verhalten. Wir können dann diese Reihe durch Hinzufügung dreier neuen ungeraden Functionen: $\theta_5, \theta_6, \theta_7$ zu einer Hauptreihe ergänzen.

Stellen wir die Ausdrücke auf

$$\theta_{\alpha 56}\,\theta_{\alpha 57}. \qquad (\alpha=1,2,3,4)$$

Dies sind Produkte gerader Theta, gehörig zur Permutation $\varkappa = 67$. Es besteht also zwischen ihnen die Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha 56} c_{\alpha 57}\, \theta_{\alpha 56}\, \theta_{\alpha 57}) = 0,$$

welche durch die Permutation 56 übergeführt wird in:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha 56} c_{\alpha 57}\, \theta_{\alpha}\, \theta_{\alpha 67}) = 0,$$

und hieraus folgt, wenn wir uns auf die Anfangsglieder beschränken:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha 56} c_{\alpha 57} c_{\alpha 67}\, u_{\alpha}) = 0.$$

Die Gleichung hat die Form:

$$(11) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha\varkappa} c_{\alpha\lambda} c_{\alpha\varkappa\lambda}\, u_{\alpha}) = 0,$$

wo $\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ die Permutationen 56, 57, 67 bedeuten, die gleichzeitig alle vier ungeraden Functionen θ_1, θ_2, θ_3 und θ_4 in gerade überführen. Es sind dies nicht die einzigen Permutationen welche diese Eigenschaft haben; es gehört dazu auch noch die Permutation 1234. Wir müssen daher sagen: Zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Theta, die sich zu einander azygetisch verhalten, besteht die Gleichung (11), in der $\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ die drei von 1234 verschiedenen Permutationen bedeuten, die θ_1, θ_2, θ_3 und θ_4 in gerade Functionen überführen.

Alles dies sind Identitäten. Es giebt aber, schon für $\rho = 3$, Systeme von nicht-identischen Gleichungen, die auf der Riemann'schen Theorie beruhn und doch in sehr enger Beziehung zu den hier entwickelten Identitäten stehn.

Betrachten wir einen Augenblick die Abel'schen Functionen von ρ Variabeln in der Riemann'schen Theorie. Sie werden ausgedrückt als rationale symmetrische Functionen von ρ Werthepaaren

$$(x_a\,,\, y_a), \qquad (a=1,2,\ldots,\rho)$$

die alle derselben Gleichung $G(x, y) = 0$ vom Range oder Geschlechte ρ genügen; ihre Klasse ist identisch mit der Gesammtheit dieser rationalen Functionen. Die Variabeln und damit auch die Anfangsglieder u_α der ungeraden Theta werden, gleichfalls symmetrisch, ausgedrückt durch Integrale erster Gattung, und zwar in der Form:

$$u_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\rho} \int^{x_\nu, y_\nu} H_\alpha(x, y)\, dx.$$

Offenbar müssen die H_α denselben linearen Gleichungen genügen wie die u_α, ausserdem aber einer Anzahl nicht-linearer Gleichungen, da sie algebraische Functionen einer Variabeln sind.

Setzt man specieller:

$$u = \int_{x', y'}^{x, y} H_\alpha(x, y)\, dx,$$

indem man beide Grenzen als variabel ansieht, so gehen die Abel'schen Functionen über in rationale Functionen von (x, y) und (x', y'), die geraden in symmetrische, die ungeraden in alternirende. Der Quotient zweier ungeraden Theta aber wird ein Produkt zweier Faktoren, von denen der eine nur von (x, y) abhängt, der andere dieselbe Function von (x', y') ist. Die Faktoren bestimmen sich, indem man beide Punkte zusammenfallen lässt; man findet leicht:

$$\frac{\theta_\alpha(u)}{\theta_\beta(u)} = \frac{\sqrt{H_\alpha(x, y)}\,\sqrt{H_\alpha(x', y')}}{\sqrt{H_\beta(x, y)}\,\sqrt{H_\beta(x', y')}}.$$

Daraus geht hervor, dass man im Geltungsbereich der Riemann'schen Theorie — die aber, wenn $\rho > 3$ ist, nicht die allgemeinen Abel'schen Functionen umfasst — den Thetarelationen genügen kann, indem man für jedes ungerade Theta setzt:

$$\theta_\alpha = \varphi \cdot \sqrt{H_\alpha(x, y)}\,\sqrt{H_\alpha(x', y')},$$

oder, wenn wir die H_α mit u_α und u'_α bezeichnen:

$$\theta_\alpha = \varphi \cdot \sqrt{u_\alpha}\,\sqrt{u'_\alpha}.$$

Zwischen diesen u_α bestehen dieselben linearen Relationen wie zwischen

den Anfangsgliedern der ungeraden Theta. Die Aufgabe ist jetzt, die nicht-linearen homogenen Gleichungen zwischen den u_α zu finden.

Für $\rho = 3$ existirt im Wesentlichen nur eine solche Gleichung, die vom vierten Grade ist. Wenn wir sie in einer grossen Anzahl verschiedener Formen aufstellen, so müssen aus einer alle übrigen folgen, indem man die linearen Gleichungen zwischen den u_α und den c_α zu Hülfe nimmt.

Wir stützen uns auf einen bekannten algebraischen Satz. Sind x_1, $x_2, \ldots, x_{2n}$ lineare homogene Functionen von n Veränderlichen, welche identisch einer Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} (g_\alpha x_\alpha^2) = 0$$

genügen, und ist

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} (A_\alpha x_\alpha) = 0$$

die Gleichung, durch die $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ verbunden sind, so ist nothwendig:

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \left(\frac{A_\alpha^2}{g_\alpha}\right) = 0.$$

Ist ferner

$$\sum (B_\alpha x_\alpha) = 0$$

die Gleichung, welche $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und x_{n+2} verbindet, so ist auch

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{A_\alpha B_\alpha}{g_\alpha}\right) = 0.$$

Diesen Satz können wir anwenden auf die Relationen zwischen den Produkten $P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha\varkappa}$. Es giebt sechs P_α, die Produkte ungerader Theta sind; nennen wir sie $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Durch die Permutation 56 werden die ersten vier in Produkte gerader Theta übergeführt. Es besteht also die Gleichung

$$\sum_{\iota=1}^{4} (\pm\, p_{\alpha 56} P_\alpha) = 0.$$

Den Gleichungen wird genügt, wenn wir θ_α durch $\sqrt{u_\alpha}\sqrt{u'_\alpha}$, also P_α durch $\sqrt{w_\alpha}\sqrt{w'_\alpha}$ ersetzen, wo

[illegible]

ist, und w'_α dieselbe Function von x', y' bedeutet. Dies giebt:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \pm p_{\alpha 56} \sqrt{w_\alpha} \sqrt{w'_\alpha}) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die vier Grössen $\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \sqrt{w_3}, \sqrt{w_4}$ durch zwei lineare Gleichungen verbunden sind, und dass, wenn wir

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (A_\alpha \sqrt{w_\alpha}) = 0$$

setzen, nothwendig

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\pm \frac{A_\alpha^2}{p_{\alpha 56}} \right) = 0.$$

sein muss.

Wir sind offenbar berechtigt, in dieser Gleichung die Combination 56 auch durch 45 oder 46 zu ersetzen. Somit haben wir drei Gleichungen, die mehr als ausreichen, um die Verhältnisse von A_1^2, A_2^2 und A_3^2 zu bestimmen. Sie werden erfüllt, wenn man A_α^2 proportional

$$p_{\alpha 45}\, p_{\alpha 46}\, p_{\alpha 56} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

annimmt;[1] denn es besteht die Gleichung:

$$\sum_{=1}^{3} (\pm\, p_{\alpha 45}\, p_{\alpha 46}) = 0,$$

die zur Kategorie der Formeln $\sum (\pm\, q_\alpha) = 0$ gehört. Wir erhalten demnach:

$$(12) \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{\alpha 45}\, p_{\alpha 46}\, p_{\alpha 56}\, w_\alpha}) = 0.$$

[1] Eigentlich folgt aus unsern Formeln nur, dass diese Produkte proportional $\pm A_\alpha^2$ sind. Dass $A_\alpha^2 = + p_{\alpha 45}\, p_{\alpha 46}\, p_{\alpha 56}$ gesetzt werden darf, ergiebt sich daraus, dass die Vorzeichen in der Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm\, p_{\alpha 45}\, p_{\alpha 46}) = 0$$

übereinstimmen mit den drei ersten Vorzeichen der Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, p_{\alpha 56}\, P_\alpha) = 0,$$

was leicht zu beweisen ist.

Vergleichen wir dies mit Formel (7). Wir sehen dann, dass die Relationen zwischen den sechs Wurzelfunctionen

$$\sqrt{w_\alpha} = \sqrt{u_\alpha u_{\alpha\varkappa}}$$

genau dieselben sind wie die, welche für $\rho = 2$ zwischen den Anfangsgliedern der ungeraden Theta bestehen, nur dass an die Stelle der c_α die Quadratwurzeln

$$\sqrt{p_\alpha} = \sqrt{c_\alpha c_{\alpha\varkappa}}$$

treten. Aber diese Grössen $\sqrt{p_\alpha}$ sind auch ihrerseits durch dieselben Gleichungen verbunden, wie die 10 Grössen c_α im Falle $\rho = 2$.

Da die u_α lineare Functionen von drei Variabeln sind, so haben wir hier, in verschiedenen irrationalen Formen, die Gleichung einer Curve vierten Grades. Die Anzahl der verschiedenen Formen beträgt 63 . 20, als Coefficienten treten auf die Werthe, welche die geraden Theta und die Ableitungen der ungeraden für $u = 0$ annehmen.

§ 4.

Für die ABEL'schen Functionen von vier Variabeln besteht unsre Aufgabe vorläufig nur darin, diejenigen Gleichungssysteme aufzustellen, die den für $\rho = 3$ gefundenen genau analog sind.

Die Relationen zwischen den Quadraten der Theta übergehen wir und gehen bald zu den Produkten

$$P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha\varkappa}$$

über. Halten wir $\varkappa$ fest; dann existiren 64 solche Produkte, welche gerade Functionen sind, und von diesen sind nur $2^{\rho-1} = 8$ linear unabhängig. Hieraus allein folgt schon, dass zwischen den P_α genau dieselben Relationen bestehen, wie zwischen den Quadraten der Thetafunctionen von drei Variabeln. Speciell gilt also der Satz:

Zwischen je sechs Functionen P_α die eine geschlossene azygetische Reihe bilden, besteht die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1} (\pm\, p_{\alpha\lambda} P_\alpha) = 0, \tag{13}$$

wo λ diejenige Permutation bedeutet, die alle 6 Functionen in Produkte gerader Theta überführt.

Die Beziehungen zwischen den 136 Constanten c lassen sich in folgender Weise zusammenfassen. Wir nehmen eine GÖPEL'sche Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ und denken uns die Produkte gebildet:

$$Q_a = \theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda}.$$

Es giebt 16 solche Produkte, die lauter gleichartige Faktoren enthalten, davon 10 Produkte gerader Theta. Die Werthe, welche diese letzteren annehmen für $u = 0$, bezeichnen wir mit q_a.

Aus diesen 10 Grössen q_a lassen sich auf 15 verschiedene Arten vier auswählen, die eine azygetische Reihe bilden; diese vier sind jedesmal durch eine Gleichung

$$\Sigma(\pm q_a) = 0 \tag{14}$$

verbunden. Es ist dies dasselbe Gleichungssystem welches besteht zwischen den 10 Grössen p_a^2 für $\rho = 3$, und den c_a^4 für $\rho = 2$.

Der Beweis ist leicht zu führen. Sei q_1, q_2, q_3, q_4 eine der 15 azygetischen Reihen. Wir können

$$Q_a = P_a P_{a\lambda} \qquad {\scriptstyle (a=1,2,3,4)}$$

setzen. P_1, P_2, P_3, P_4 sind dann Produkte gerader Theta, die ebenfalls eine azygetische Reihe bilden. Ergänzen wir diese zu einer geschlossenen durch Hinzufügung zweier Glieder P_5, P_6, die auch Produkte gerader Theta sein sollen. Dann besteht die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_a P_a) = 0,$$

und daraus folgt:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_a P_{a\lambda}) = 0.$$

Dies giebt für $u = 0$:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_a p_{a\lambda}) = 0,$$

oder:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm q_{\alpha\lambda} \ldots) = 0;$$

denn Q_5 und Q_6 können nicht Produkte von 4 geraden Theta sein.

Von jetzt ab machen wir die Voraussetzung, dass es sich nicht um die allgemeinen Abel'schen Functionen von vier Variabeln handle, sondern um die, welche der Riemann'schen Theorie entsprechen. Wir können dann, genau wie im Falle $\rho = 3$, sagen: Es muss möglich sein, den sämmtlichen Thetarelationen zu genügen, indem man für jedes ungerade Theta den Ausdruck

$$\theta_\alpha = \varphi \cdot \sqrt{u_\alpha}\sqrt{u'_\alpha}$$

substituirt. Dabei bedeuten die u_α lineare Functionen von vier Variabeln, die, was ihre Coefficienten anbetrifft, übereinstimmen mit den Anfangsgliedern der entsprechenden Theta. Aber die Variabeln sind nicht unabhängig, sondern proportional algebraischen Functionen einer Veränderlichen x, sodass zwei verschiedene homogene aber nicht lineare Gleichungen zwischen den u_α bestehn. Die u'_α sind dieselben Functionen von einer zweiten Variabeln x'.

An die Stelle von P_α tritt, wenn P_α das Produkt zweier ungeraden Theta ist:

$$P_\alpha = \varphi^2 \cdot \sqrt{w_\alpha}\sqrt{w'_\alpha},$$

wo

$$w_\alpha = u_\alpha u_{\alpha\chi}$$

ist. Nun nehmen wir an, wir hätten eine sechsgliedrige geschlossene azygetische Reihe von Produkten ungerader Theta:

$$P_1, P_2, \ldots, P_6.$$

λ sei diejenige Permutation, die alle sechs Grössen in Produkte gerader Theta verwandelt. Aus der Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{6} (\pm p_{\alpha\lambda} P_\alpha) = 0$$

folgt dann:

$$\sum_{\alpha=1}^{6} (\pm p_{\alpha\lambda} \sqrt{w_\alpha}\sqrt{w'_\alpha}) = 0.$$

Da die w'_α von einer andern Variabeln abhängen, als die w_α, so müssen wir hieraus schliessen, dass je vier der sechs Grössen $\sqrt{w_\alpha}$ durch eine lineare Gleichung verbunden sind. Setzen wir demnach an:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left(A_\alpha \sqrt{w_\alpha}\right) = 0,$$

so folgt aus dem algebraischen Hülfssatz den wir im vorigen Paragraph aufgestellt haben, dass die Coefficienten A_α die Bedingung erfüllen müssen

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left(\pm \frac{A_\alpha^2}{p_{\alpha\lambda}}\right) = 0.$$

Wenn ferner B_1, B_2, B_3, B_5 die Coefficienten derjenigen Gleichung sind, die zwischen $\sqrt{w_1}$, $\sqrt{w_2}$, $\sqrt{w_3}$ und $\sqrt{w_5}$ besteht, so muss

$$\sum_{\alpha=1}^{5} \left(\pm \frac{A_\alpha B_\alpha}{p_{\alpha\lambda}}\right) = 0$$

sein.

Die 64 Grössen P_α verhalten sich so, wie die Thetafunctionen von drei Argumenten. Denken wir uns nur P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, so können wir diese Reihe durch Hinzufügung von drei neuen Produkten ungerader Theta: P_μ, P_ν und P_ρ, zu einer Hauptreihe ergänzen. Verstehen wir dann unter P_5 die Function P_μ, so ist $\lambda = \nu\rho$ diejenige Permutation, die alle sechs Functionen $P_1, P_2, \ldots, P_6$ in Produkte gerader Theta überführt. Ebenso können wir aber P_ν und P_ρ für P_5 nehmen. Zur Bestimmung der Coefficienten in der Relation

$$A_1\sqrt{w_1} + \ldots + A_4\sqrt{w_4} = 0$$

haben wir demnach die drei Gleichungen:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left(\pm \frac{A_\alpha^2}{p_{\alpha\lambda}}\right) = 0. \qquad (\lambda = \mu\nu, \mu\rho, \nu\rho)$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, indem man

$$A_\alpha^2 = p_{\alpha\mu\nu}\, p_{\alpha\mu\rho}\, p_{\alpha\nu\rho}$$ [1]

---

[1] In Bezug auf die Vorzeichen gilt hier dasselbe wie in der entsprechenden Betrachtung für $\rho = 3$.

setzt; denn die Formel

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, p_{\alpha\mu\rho}\, p_{\alpha\nu\rho}) = 0$$

gehört in die Kategorie der Gleichungen

$$\Sigma(\pm\, q_\alpha) = 0.$$

Die Gleichung zwischen den vier Wurzelgrössen lautet demnach:

$$(15) \qquad \sum_{1}^{4} (\pm \sqrt{p_{\alpha\mu\nu}\, p_{\alpha\mu\rho}\, p_{\alpha\nu\rho}\, w_\alpha}) = 0.$$

Es sind dabei $\mu\nu$, $\mu\rho$ und $\nu\rho$ diejenigen drei von 1234 verschiedenen Permutationen, die gleichzeitig P_1, P_2, P_3 und P_4 in Produkte gerader Theta überführen. Vergleicht man dies mit der Formel (11) im vorigen Paragraphen, so sieht man:

Zwischen den 28 Wurzelgrössen $\sqrt{w_\alpha} = \sqrt{u_\alpha u_{\alpha\varkappa}}$, die zu einer halben Periode $\varkappa$ gehören, bestehn genau dieselben linearen Relationen, wie zwischen den Anfangsgliedern der 28 ungeraden Thetafunctionen von drei Variabeln; allerdings mit der Modification, dass an Stelle von c_α überall $\sqrt{p_\alpha}$ zu setzen ist.

Die Frage ist jetzt: Sind die 36 Grössen $\sqrt{p_\alpha}$ auch genau durch dieselben Gleichungen verbunden, wie die c_α für $\rho = 3$? Dass dies der Fall ist, geht ebenfalls aus unsern Betrachtungen hervor.

Denken wir uns eine Hauptreihe gewählt:

$$P_1, P_2, \ldots, P_7$$

und bezeichnen mit A die Coefficienten der Gleichung, die zwischen $\sqrt{w_1}$, $\sqrt{w_2}$, $\sqrt{w_3}$ und $\sqrt{w_4}$ besteht, mit B die der Gleichung, die besteht zwischen den drei ersten Grössen und $\sqrt{w_5}$. Diese Coefficienten sind uns bekannt:

$$A_\alpha = \pm \sqrt{p_{\alpha 56}\, p_{\alpha 57}\, p_{\alpha 67}}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$B_\alpha = \pm \sqrt{p_{\alpha 46}\, p_{\alpha 47}\, p_{\alpha 67}}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 5)$$

Nun ist aber:

$$\sum_{\alpha=1}^{5} \left(\pm \frac{A_\alpha B_\alpha}{p_{\alpha 67}}\right) = 0.$$

denn 67 ist diejenige Permutation, welche die geschlossene Reihe

$$P_1\,,\ P_2\,,\ \ldots\,,\ P_5\,,\ P_{12345}$$

in Produkte gerader Theta überführt. Daher folgt:

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\pm\sqrt{p_{\alpha 46}\,p_{\alpha 47}\,p_{\alpha 56}\,p_{\alpha 57}}\right)=0.$$

Wenn man hier die Grössen $\sqrt{p}$ durch c ersetzt, so bekommt man eine der Relationen $\sum(\pm q_\alpha)=0$, die für $\rho=3$ bestehen. Dass hier die q_α zu der speciellen syzygetischen Gruppe $(0\,,\,45\,,\,67\,,\,4567)$ gehören, ist unwesentlich; denn man kann für $\rho=3$ die Hauptreihe $\theta_1\,,\,\theta_2\,,\,\ldots\,,\,\theta_7$ so wählen, dass θ_4 in θ_5, und ebenso θ_6 in θ_7 durch vorgeschriebene Permutationen $\lambda\,,\,\mu$ übergehn, vorausgesetzt nur, dass $\lambda\,,\,\mu$ sich syzygetisch verhalten. Demnach können wir sagen dass für $\rho=4$ im Riemann'schen Falle zwischen den Grössen $\sqrt{p}$ genau dieselben Relationen bestehen, wie im Falle $\rho=3$ zwischen den c.

Lösen wir jetzt die Produkte p_α auf in $c_\alpha c_{\alpha\varkappa}$, so haben wir folgenden Satz:

Wenn G irgend eine Göpel'sche Gruppe dritter Ordnung ist, so existiren drei zugehörige Produkte

$$R_\alpha=\prod_\varkappa(\theta_{\alpha\varkappa}) \qquad (\alpha=1,2,3)$$

(erstreckt über die 8 Elemente $\varkappa$ von G), die lauter gerade Faktoren enthalten, und somit drei Constanten $r_1\,,\,r_2\,,\,r_3$, die Werthe der R_α für $u=0$. Diese drei Constanten sind stets durch eine Gleichung

$$\sqrt{r_1}\pm\sqrt{r_2}\pm\sqrt{r_3}=0 \tag{16}$$

verbunden.

Wir haben demnach ein System von so vielen Gleichungen, als verschiedene Göpel'sche Gruppen dritter Ordnung existiren, d. h.

$$(4^4-1)(4^3-1)(4^2-1)=240975.$$

Sie sind nicht erfüllt bei willkürlichen Werthen der 10 Periodicitätsmoduln, stellen aber nur eine Beziehung zwischen ihnen dar, sodass eine einzige solche Gleichung mit Nothwendigkeit alle übrigen nach sich zieht.

Diese Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{r_a}) = 0$$

entspricht den Gleichungen

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm q_a) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 3,$$

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_a^2) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 2,$$

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_a^4) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 1.$$

Wir wollen die vier Gleichungen zusammenfassen. Bezeichnen wir die vierten Potenzen der Moduln durchweg mit C_a. Es sei jetzt, bei beliebigem ρ, eine GÖPEL'sche Gruppe von der Ordnung $\rho - 1$ gegeben. Wenn wir uns dann die Produkte gebildet denken

$$\prod_{x} (\theta_{a\lambda})$$

erstreckt über die $2^{\rho-1}$ Elemente von G, so giebt es darunter genau drei, die aus lauter geraden Faktoren bestehn. Diesen entsprechen drei Constanten:

$$\pi_a = \prod (C_{ax}) \qquad (a=1,2,3)$$

und zwischen diesen drei Constanten besteht, für $\rho = 1$, $\rho = 2$, $\rho = 3$, und für $\rho = 4$ im RIEMANN'schen Falle, die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{3} \left(\pm \sqrt[2^{\rho-1}]{\pi_a}\right) = 0.$$

Wir haben gesehen, dass zwischen den 28 Wurzelfunctionen $\sqrt{w_a}$, die zu einem bestimmten x gehören, genau dieselben Relationen bestehen, wie zwischen den Anfangsgliedern der 28 ungeraden Thetafunctionen von drei Variabeln, mit dem Unterschied, dass an die Stelle von c_a überall $\sqrt{p_a}$ tritt. Aber diese 36 Grössen $\sqrt{p_a}$ genügen ebenfalls genau denselben Gleichungen wie die c_a.

Nun hatten wir für $\rho = 3$ ein System nicht linearer Gleichungen aufgestellt, repräsentirt durch die Formel

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{a15}\, p_{a16}\, p_{a56}\, w_a}) = 0.$$

Dies sind 20.63 Gleichungen, da wir einerseits die Indices $1, 2, \ldots, 6$ beliebig vertauschen können, andrerseits $\varkappa$ eine beliebige von 63 Permutationen bedeutet. Aber alle diesen Formeln stellen, wenn wir uns die linearen Beziehungen zwischen den u_α gegeben denken, im Wesentlichen nur eine hinzutretende neue Beziehung dar; eine einzige zieht alle übrigen mit Nothwendigkeit nach sich.

Stellen wir nun die entsprechende Formel auf für $\rho = 4$. Wir wählen eine Permutation λ, die zu $\varkappa$ syzygetisch ist, und setzen

$$p_\alpha = c_\alpha c_{\alpha\varkappa},$$

$$q_\alpha = p_\alpha p_{\alpha\lambda} = c_\alpha c_{\alpha\varkappa} c_{\alpha\lambda} c_{\alpha\varkappa\lambda}.$$

Entsprechend:

$$w_\alpha = u_\alpha u_{\alpha\varkappa},$$

$$x_\alpha = w_\alpha w_{\alpha\lambda} = u_\alpha u_{\alpha\varkappa} u_{\alpha\lambda} u_{\alpha\varkappa\lambda}.$$

Zur Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehören 16 Produkte gleichartiger Theta, wovon 6 lauter ungerade, 10 lauter gerade Theta enthalten. Die 6 ersteren mögen durch $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ bezeichnet werden. Wenn wir dann die Gleichung aufstellen:

$$(17) \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\pm \sqrt[4]{q_{\alpha 45}\, q_{\alpha 46}\, q_{\alpha 56}\, x_\alpha}\right) = 0,$$

und damit zugleich alle die ins Auge fassen, die aus ihr entstehen ein mal durch Vertauschung der Indices $1, 2, \ldots, 6$, zweitens dadurch, dass wir zwar $\varkappa$ festhalten, aber λ variiren, dann können wir sagen, dass eine dieser Gleichungen alle übrigen nach sich zieht. Da nun der Ausdruck links völlig symmetrisch von $\varkappa$ und λ abhängt, so muss für die Variation von $\varkappa$ dasselbe gelten. Wenn wir demnach das Gleichungssystem (17) gelten lassen für jede Göpel'sche Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$, so tritt damit zu den beiden Gleichungen zwischen den Variabeln u, u', u'', u''', die durch die Relationen zwischen den Wurzelfunctionen definirt werden, nur eine neue Gleichung hinzu. Allerdings sind die u_α dann nicht mehr lineare Functionen von vier unabhängigen Grössen, und auch nicht mehr algebraische Functionen einer Veränderlichen, sondern Constanten. Wir haben damit auch jedem ungeraden Theta eine bestimmte Constante, u_α, zugeordnet.

Bezeichnen wir diese constanten Grössen der Gleichmässigkeit wegen ebenfalls mit c_α, so nimmt die Gleichung (17) die Form an:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\pm \sqrt[4]{q_\alpha\, q_{\alpha 45}\, q_{\alpha 46}\, q_{\alpha 56}}\right) = 0.$$

Da jedes q ein Produkt von vier Grössen c ist, so haben wir hier eine Relation von der Gestalt

$$\sqrt[4]{s_1} \pm \sqrt[4]{s_2} \pm \sqrt[4]{s_3} = 0.$$

Die drei s sind Produkte von je 16 Faktoren, die zu einer und derselben Gruppe mit der Basis

$$(\varkappa\,,\,\lambda\,,\,45\,,\,46)$$

gehören. Diese Gruppe ist nicht rein syzygetisch, da die Permutationen $45\,,\,46$ sich azygetisch verhalten.

Die Anzahl dieser Gleichungen beträgt:

$$(4^4 - 1)(4^3 - 1)\,.\,20 = 321300.$$

§ 5.

Ehe wir zur Auflösung der Modulgleichungen übergehen, wollen wir einen Satz aufstellen, aus dem sich die Möglichkeit einer vereinfachenden Transformation ergiebt.

Wenn wir irgend eine der Thetafunctionen ins Auge fassen, so lassen sich die Permutationen scheiden in solche, die den Charakter der Function ändern, und solche, die ihn nicht ändern; von den ersteren sagen wir, dass sie kritisch sind für das betreffende Theta. Hiernach giebt es für jede ungerade Thetafunction von ρ Argumenten

$$\frac{1}{2}(4^\rho + 2^\rho),$$

für jede gerade

$$\frac{1}{2}(4^\rho - 2^\rho)$$

kritische Permutationen.

Es sei nun G eine beliebige Gruppe. Wir bilden das Produkt

$$P_a = \prod_{x} (\theta_{ax})$$

erstreckt über alle Elemente von G. Durch eine Permutation ω geht P_a über in

$$P_{a\omega} = \prod_{x} (\theta_{ax\omega}).$$

Wenn ω sich syzygetisch verhält zur ganzen Gruppe G, so ist ω kritisch für alle Faktoren von P_a oder für keinen. Denn der Quotient

$$\frac{\theta_{ax}\theta_{a\omega}}{\theta_a \theta_{ax\omega}} = \varphi$$

ist dann eine gerade Function; wenn also θ_a und $\theta_{a\omega}$ entgegengesetzten Charakter haben, so muss von θ_{ax} und $\theta_{ax\omega}$ dasselbe gelten.

Wenn sich aber ω nicht zu allen Elementen von G syzygetisch verhält, so ist ω kritisch genau für die Hälfte der Faktoren von P_a. Denn angenommen, x sei ein Element von G, das sich zu ω azygetisch verhält. Alsdann ist der Quotient φ eine ungerade Function. Daraus folgt, dass ω kritisch ist für einen der beiden Faktoren θ_a, θ_{ax}, für den andern nicht, und dasselbe gilt offenbar für je zwei Faktoren von P_a, die durch die Permutation x in einander übergeführt werden.

Davon machen wir folgende Anwendung. Es sei ein System von 4^ρ Grössen C gegeben, die den einzelnen Thetafunctionen zugeordnet sind. Mit diesen setzen wir in Verbindung ein zweites System von $4^\rho - 1$ Grössen e, die den einzelnen Permutationen entsprechen, und einen Faktor r, indem wir setzen

$$C_m = r \prod_{\mu} (e_\mu).$$

Das Produkt soll erstreckt werden über alle Permutationen μ, die für θ_m kritisch sind. Wir haben so ein System von 4^ρ Gleichungen; die Faktoren e sind nicht rational durch die C bestimmt. Wenn wir uns aber nicht nur die C, sondern auch die Werthe ihrer Logarithmen gegeben denken, so können wir das Gleichungssystem durch ein lineares zwischen den Logarithmen ersetzen und auf diese Weise die e eindeutig bestimmen.

Bilden wir jetzt das Produkt

$$\pi_m = \prod_{x} (C_{mx})$$

erstreckt über die Elemente $\varkappa$ einer Gruppe n^{ter} Ordnung, und denken uns für jedes $C_{m\varkappa}$ seinen Ausdruck eingesetzt. π_m wird dann zunächst den Faktor r in der 2^nten Potenz enthalten. Wenn ferner μ eine Permutation ist, die nicht zur ganzen Gruppe syzygetisch ist, so ist μ genau für die Hälfte der 2^n Functionen $\theta_{m\varkappa}$ kritisch; infolge dessen wird der Faktor e_μ 2^{n-1} mal in π_m vorkommen. Ist endlich μ syzygetisch für die ganze Gruppe, so ist μ kritisch für alle Functionen $\theta_{m\varkappa}$ oder für keine: im ersten Fall kommt e_μ vor in der Potenz 2^n, im zweiten gar nicht. Das Resultat ist demnach:

$$\pi_m = r^{2^n}\left[\Pi(e_\nu)\right]^{2^{n-1}}\left[\Pi(e_\mu)\right]^{2^n},$$

wo das eine Produkt sich erstreckt über alle Permutationen ν, die nicht zur ganzen Gruppe syzygetisch sind, das andre über die Permutationen μ, die zu allen 2^n Functionen $\theta_{m\varkappa}$ kritisch sind.

Indem wir

$$r\sqrt{\Pi(e)} = R$$

setzen, können wir das Resultat so darstellen:

$$\sqrt[2^n]{\pi_m} = R\,\Pi(e_\mu).$$

Der Faktor R hängt zwar ab von der Wahl der Gruppe, aber nicht von dem speciellen Index m; er fällt also fort bei homogenen Relationen zwischen den π_m, die zu derselben Gruppe gehört. Das Produkt $\Pi(e_\mu)$ enthält um so weniger Faktoren, je grösser die Ordnung der Gruppe ist.

Damit ist zugleich die Auflösung des Gleichungssystems gewonnen. Es sei e_μ irgend einer der Faktoren e. Wir wählen zunächst zwei Functionen θ_m, θ_n in der Weise, dass μ kritisch ist für θ_m, nicht kritisch für θ_n. Dann bilden wir die Produkte:

$$\pi_m = \Pi(C_{m\varkappa}), \qquad \pi_n = \Pi(C_{n\varkappa}),$$

erstreckt über die Gruppe derjenigen Permutationen $\varkappa$, die zu μ syzygetisch sind. Diese Gruppe ist von der Ordnung $2\rho - 1$. Kritisch für sämmtliche Functionen $\theta_{m\varkappa}$ oder sämmtliche $\theta_{n\varkappa}$ kann nur eine Permutation sein, die zur ganzen Gruppe syzygetisch ist, also nur μ; nun ist μ kritisch für θ_m, aber nicht für θ_n; folglich erhalten wir:

$$\sqrt[2^{2\rho-1}]{\pi_m} = \rho e_\mu, \qquad \sqrt[2^{2\rho-1}]{\pi_n} = \rho,$$

oder:

$$e_\mu = \sqrt[2^{\rho-1}]{\frac{\pi_m}{\pi_n}}.$$

§ 6.

Wir wollen die elliptischen Functionen nicht übergehen. Unter c_1, c_2, c_3 verstehen wir wie früher die Anfangswerthe der geraden Theta; der ungeraden Function θ ordnen wir gleichfalls eine Constante c zu, die willkürlich gewählt sein kann. Die Faktoren e_α definiren wir dann durch die Gleichungen:

$$c_1^4 = re_{23}, \qquad c_2^4 = re_{31}, \qquad c_3^4 = re_{12},$$

$$c^4 = re_{12}\, e_{13}\, e_{23}.$$

In der letzten Formel kommen drei Faktoren e vor, weil für das ungerade Theta alle drei Permutationen kritisch sind.

Die Gleichung $c_1^4 \pm c_2^4 \pm c_3^4 = 0$ geht dadurch über in

$$e_{23} \pm e_{31} \pm e_{12} = 0.$$

Dies zeigt, dass man für die e_μ substituiren kann die Differenzen dreier Werthe e_1, e_2, e_3:

$$e_{12} = \pm (e_1 - e_2), \quad \text{etc.}$$

e_1, e_2, e_3 selbst dürfen als unabhängige Werthe angesehen werden.

Sondert man von den Thetafunctionen die Constanten c ab, indem man

$$\theta_\alpha = c_\alpha \,.\, \sigma_\alpha, \qquad \theta = c \,.\, \sigma$$

setzt, so nehmen die Relationen zwischen den Quadraten der σ die einfache Form an:

$$(e_2 - e_3)\sigma_1^2 + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 = 0,$$

$$\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2 + (e_\alpha - e_\beta)\sigma^2 = 0.$$

Schärfer treten diese Verhältnisse hervor im Falle $\rho = 2$. Zehn Constanten, die Anfangswerthe der geraden Theta, sind unmittelbar gegeben; den sechs ungeraden Functionen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$ ordnen wir ebenfalls bestimmte Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_6$ zu, und zwar sollen dies die Werthe der

linearen Anfangsglieder sein für irgend welche beliebig gewählte constante Werthe u_0, u'_0 der beiden Variabeln u, u'.

Wir haben dann ein System von 16 Constanten c; diese sind durch ein System von 20 Gleichungen verbunden, das repräsentirt wird durch die Formel:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\pm\, c_\alpha c_{\alpha 45} c_{\alpha 46} c_{\alpha 56}\right) = 0.$$

Diesen 16 Constanten c stellen wir 15 Faktoren e_μ gegenüber, die den 15 Permutationen 12, 13, ..., 56 entsprechen, indem wir allgemein setzen:

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

wobei das Produkt zu erstrecken ist über die für θ_m kritischen Permutationen. Danach ist z. B.

$$c_1^4 = re_{23}\, e_{24} \ldots e_{56},$$

$$c_{123}^4 = c_{456}^4 = re_{12}\, e_{13}\, e_{23}\, e_{45}\, e_{46}\, e_{56}.$$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung zwischen den c in die viel einfachere:

$$e_{23} \pm e_{31} \pm e_{12} = 0.$$

Denn 23 ist offenbar die einzige Permutation, welche für die vier Faktoren des Produkts

$$\theta_1\, \theta_{145}\, \theta_{146}\, \theta_{156}$$

kritisch ist.

Die Bedeutung der Relation zwischen den $e_{\alpha\beta}$ ist ohne weiteres klar: sie sagt aus, dass die $e_{\alpha\beta}$ nichts andres sind als die 15 Differenzen von sechs Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_6$:

$$e_{\alpha\beta} = \pm(e_\alpha - e_\beta).$$

Es ist bekannt dass sich auch hier die Thetarelationen sehr vereinfachen, wenn man von den einzelnen Functionen die entsprechenden Faktoren c absondert. Setzen wir allgemein

$$\theta_m = c_m \cdot \sigma_m.$$

Die Gleichung zwischen vier ungeraden Theta:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left(\pm\, c_{\alpha 56}^2\, \theta_\alpha^2\right) = 0$$

geht über in

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c^2_{\alpha 56}\, c^2_\alpha \sigma^2_\alpha) = 0$$

oder:

$$e_{23}\, e_{24}\, e_{34}\, \sigma^2_1 \pm \ldots \pm e_{12}\, e_{13}\, e_{23}\, \sigma^2_4 = 0,$$

da $23, 24, 34$ und 56 die einzigen Permutationen sind, die gleichzeitig für θ_{156} und θ_1 kritisch sind.

In ähnlicher Weise geht die Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm\, c_{\alpha 45}\, c_{\alpha 46}\, \theta_{\alpha 56}\, \theta_\alpha) = 0$$

über in:

$$e_{23}\, \sigma_1\, \sigma_{156} \pm e_{31}\, \sigma_2\, \sigma_{256} \pm e_{12}\, \sigma_3\, \sigma_{356} = 0;$$

denn kritisch für die vier Functionen

$$\theta_{145}\,,\ \theta_{146}\,,\ \theta_{156}\,,\ \theta_1$$

ist nur die Permutation 23.

Endlich geht die Gleichung zwischen vier geraden und zwei ungeraden Functionen:

$$c_{145}\, c_{146}\, \theta_{245}\, \theta_{246} - c_{245}\, c_{246}\, \theta_{145}\, \theta_{146} = \pm\, c_{345}\, c_{346}\, \theta_5\, \theta_6$$

über in:

$$\sigma_{245}\, \sigma_{246} - \sigma_{145}\, \sigma_{146} = \pm\, e_{12}\, e_{34}\, \sigma_5\, \sigma_6,$$

wie ebenfalls ohne jede Rechnung zu erkennen ist.

Für $\rho = 3$ tritt die Schwierigkeit ein, dass man zunächst im Zweifel ist, welches System von Constanten man den ungeraden Theta zuordnen soll. Wir beschränken uns zunächst auf die Relationen zwischen den Anfangswerthen der geraden Theta.

Legen wir eine Hauptreihe

$$\theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \ldots,\ \theta_7$$

der Bezeichnung zu Grunde. Wir müssen dann eigentlich die übrigen Theta bezeichnen durch die Combinationen dritter, fünfter und siebenter Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$. Statt dessen lassen wir die Thetafunction, die eigentlich der Combination aller sieben Zahlen entspricht, ohne

Index und ersetzen jede Combination von höherer als der dritten Ordnung durch die complementäre. Es sind dann $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_7, \theta_{12} \ldots \theta_{67}$ die 28 ungeraden Functionen; die übrigen: $\theta_{123} \ldots \theta_{567}$ und θ sind gerade. Die Indices der Theta können wir auch zur Bezeichnung der Permutationen verwenden; die Permutation m ist diejenige, welche θ in θ_m überführt.

Die Relationen zwischen den 36 Grössen c sind gegeben durch den Satz: Zu jeder Göpel'schen Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehören drei Produkte

$$\theta_\alpha \theta_{\alpha\varkappa} \theta_{\alpha\lambda} \theta_{\alpha\varkappa\lambda},$$

die aus lauter geraden Faktoren bestehen; die Werthe dieser Produkte für $u = 0$ genügen der Gleichung:

$$\Sigma(\pm q_\alpha) = 0.$$

Nehmen wir speciell die Gruppe $(0, 56, 7, 567)$. Die drei Constanten q sind hier:

$$c_{145}\, c_{146}\, c_{235}\, c_{236},$$

$$c_{245}\, c_{246}\, c_{315}\, c_{316},$$

$$c_{345}\, c_{346}\, c_{125}\, c_{126}.$$

Die Summe dieser Produkte ist also gleich 0. Wir können der Gleichung eine einfachere Form geben, nämlich:

$$D_{237} D_{147} \pm D_{317} D_{247} \pm D_{127} D_{347} = 0,$$

wenn wir die Bezeichnung:

$$C_{\alpha\beta\gamma}\, C_{\alpha\beta\delta}\, C_{\alpha\gamma\delta}\, C_{\beta\gamma\delta} = D_{\varkappa\lambda\mu}$$

einführen; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sollen hierbei irgend vier der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ bedeuten, $\varkappa, \lambda, \mu$ die drei übrigen.

Die Gleichung zwischen den Grössen D sagt offenbar aus, dass sie sich als Determinanten darstellen lassen müssen. Wir können sieben Werthsysteme $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha)$ aufstellen, sodass allgemein:

$$D_{\varkappa\lambda\mu} = \begin{vmatrix} A_\varkappa & B_\varkappa & C_\varkappa \\ A_\lambda & B_\lambda & C_\lambda \\ A_\mu & B_\mu & C_\mu \end{vmatrix}.$$

ist. Damit wir es nur mit unabhängigen Grössen zu thun haben, sondern wir von jedem Werthsystem $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha)$ einen Faktor l_α ab und schreiben demnach:

$$D_{\varkappa\lambda\mu} = \pm l_\varkappa l_\lambda l_\mu \begin{vmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa & c_\varkappa \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\ a_\mu & b_\mu & c_\mu \end{vmatrix}.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, sämmtliche Grössen c auszudrücken als Functionen der Werthsysteme (a, b, c), die wir als homogene Coordinaten von sieben Punkten der Ebene auffassen können.

Die Determinante

$$\pm \begin{vmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa & c_\varkappa \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\ a_\mu & b_\mu & c_\mu \end{vmatrix}$$

bezeichnen wir mit $f_{\varkappa\lambda\mu}$, sodass

$$c_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta\delta} c_{\alpha\gamma\delta} c_{\beta\gamma\delta} = l_\varkappa l_\lambda l_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}$$

ist. Wir stellen zunächst eine Gleichung auf, bei der die Faktoren l eliminirt sind:

$$\frac{c_{145} c_{146} c_{235} c_{236}}{c_{245} c_{246} c_{135} c_{136}} = \frac{f_{147} f_{237}}{f_{247} f_{137}}.$$

Berücksichtigt man, dass die Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ beliebig unter einander vertauscht werden können, so ist damit ein Gleichungssystem gegeben zur Bestimmung der Grössen c. Allerdings sind die c dadurch allein noch nicht völlig bestimmt. Wenn wir allgemein

$$c_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{durch} \quad r_\alpha r_\beta r_\gamma c_{\alpha\beta\gamma}$$

ersetzen, wo $r_1, r_2, \ldots, r_7$ beliebig gewählte Faktoren bedeuten, so bleiben die Gleichungen bestehn. Dies ist aber die einzige Unbestimmtheit, welche übrig bleibt.

Die Lösung des Gleichungssystems liegt nahe, wenn man die Indices der Grössen C und f berücksichtigt, die auf beiden Seiten vorkommen. 147 und 237 sind Permutationen, welche kritisch sind für die Faktoren des Produkts

$$\vartheta_{145} \vartheta_{146} \vartheta_{235} \vartheta_{236}.$$

Dasselbe kann man sagen von den Permutationen 14 und 23, aber von keiner andern. Daraus allein folgt, dass die Gleichungen erfüllt werden, wenn man setzt:

$$C_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

das Produkt erstreckt über die für θ_m kritischen Permutationen μ, und dabei unter e_μ den Ausdruck $f_{\alpha\beta\gamma}$ versteht wenn μ eine dreigliedrige Combination $\alpha\beta\gamma$ ist, dagegen den Werth 1, wenn μ ein zweigliedriger Index $\alpha\beta$ ist. Die Werthe der e mit eingliedrigem Index: $e_1, e_2, \ldots, e_7$, sind vorläufig willkürlich. Darin ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystem enthalten, und es bleiben nur $e_1, e_2, \ldots, e_7$ als Functionen der Werthsysteme a, b, c zu bestimmen.

Wir können die Gleichung

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu)$$

auch gelten lassen für den Anfangswerth c der Function ohne Index, da wir die Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_7$ noch mit einem Faktor multipliciren können. Sie lautet für diesen Fall offenbar:

$$c^4 = r \,.\, e_1 e_2 \ldots e_7 \,.$$

Fassen wir jetzt allgemein die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{3} (\pm q_\varrho) = 0$$

ins Auge, die zu einer beliebigen GÖPEL'schen Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehört. Die drei Grössen q_1, q_2, q_3 entsprechen drei Produkten gerader Theta: Q_1, Q_2, Q_3. Zu derselben Gruppe gehört noch ein Produkt ungerader Theta: dieses ist Q_{123}. Kritisch für die Faktoren von Q_1 sind nur diejenigen Permutationen, die Q_1 in Q_{123}, oder, was dasselbe ist, die Q_2 in Q_3 überführen. Die Gleichung erhält demnach durch Einführung der Faktoren e die Gestalt:

$$A + B + C = 0,$$

wo A, B, C Produkte von je vier Grössen e sind. Eine Vereinfachung tritt insofern ein, als ein Theil der Faktoren e den Werth 1 hat.

Nehmen wir jetzt die specielle Gruppe:

$$(0, 45, 67, 123).$$

Die zugehörigen Produkte gerader Theta sind:

$$\theta_{\alpha 46}\,\theta_{\alpha 56}\,\theta_{\alpha 47}\,\theta_{\alpha 57}. \qquad (\alpha=1,2,3)$$

Die Permutationen die das zweite Produkt in das dritte überfahren sind:

$$23\,,\ 2345 = 167\,,\ 2367 = 145\,,\ 1.$$

Da $e_{23} = 1$ ist, so erhalten wir:

$$\sum_{\alpha=1} (\pm\, e_\alpha f_{\alpha 45} f_{\alpha 67}) = 0.$$

Nehmen wir ferner die Gruppe:

$$(0\,,\ 127\,,\ 347\,,\ 567),$$

oder:

$$(0\,,\ 3456\,,\ 1256\,,\ 1234).$$

Die drei Functionen Q sind:

$$\theta_{135}\,\theta_{146}\,\theta_{236}\,\theta_{245},$$
$$\theta_{235}\,\theta_{246}\,\theta_{136}\,\theta_{145},$$
$$\theta\quad \theta_{127}\,\theta_{347}\,\theta_{567}.$$

Damit sind auch ohne weiteres die Permutationen gegeben, welche die drei Produkte in einander überführen. Wenn wir berücksichtigen, dass e_{12}, e_{34} und e_{56} gleich 1 sind, so können wir die Formel hinschreiben:

$$\pm\, f_{135} f_{146} f_{236} f_{245} \pm f_{235} f_{246} f_{136} f_{145} = e_7,$$

oder:

$$e_7 = \pm \begin{vmatrix} f_{135} f_{146} & f_{136} f_{145} \\ f_{235} f_{246} & f_{236} f_{245} \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung definirt die Faktoren $e_1, e_2, \ldots, e_7$ als Functionen der Werthsysteme (a, b, c); offenbar ist e_α diejenige quadratische Determinante, welche verschwindet, wenn die sechs von (α) verschiedenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen.

Damit sind jetzt die Grössen c und $c_{\alpha\beta\gamma}$ dargestellt als Functionen unabhängiger Parameter. Abgesehen vom Faktor r, sind die vierten Potenzen der c ganze homogene Functionen der sieben Werthsysteme $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$.

Ordnen wir jetzt auch jeder ungeraden Function θ_m eine Constante c_m zu, indem wir die Formel

$$c_m^4 = r\,\Pi(e_\mu)$$

auch für diesen Fall gelten lassen. Wenn wir an Stelle der Theta wieder σ-Functionen einführen, indem wir setzen

$$\theta_m = c_m\,\sigma_m\,,$$

so treten in den σ-Relationen nur die Faktoren $f_{\alpha\beta\gamma}$ und e_α als Coefficienten auf. Wir wollen uns aber darauf beschränken, die Relationen zwischen den Anfangsgliedern der ungeraden Sigma, und die zwischen den Wurzelfunctionen aufzustellen.

Zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Theta hatten wir die Gleichung aufgestellt:

$$\sum_{a=1}^{4} \left(\pm\, c_{a56}\, c_{a57}\, c_{a67}\, u_a\right) = 0.$$

Voraussetzung war dabei, dass θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 eine azygetische Reihe bilden, und dass θ_5, θ_6, θ_7 diese Reihe ergänzen. Wir setzen

$$u_a = c_a \,.\, v_a\,,$$

sodass jetzt v_a das Anfangsglied einer Sigmafunction ist. Um die entsprechende Gleichung zwischen v_1, v_2, v_3, v_4 in ihrer reducirten Form darzustellen, handelt es sich nur darum, die kritischen Permutationen der Produkte

$$\theta_1\,\theta_{156}\,\theta_{157}\,\theta_{167}\,, \quad \text{etc.}$$

festzustellen. Kritisch für das hingeschriebne Produkt sind nur diese:

$$1\,,\ 23\,,\ 24\,,\ 34\,,\ 234 \quad \text{und} \quad 567.$$

Da wir den Faktor e_{567} fortlassen können, so erhalten wir als Coefficienten von v_1:

$$e_1\, e_{23}\, e_{24}\, e_{34}\, e_{234}\,.$$

Entsprechende Werthe haben die Coefficienten von v_2, v_3, v_4. Es bleibt nur noch die Bedeutung der einzelnen Indices festzustellen.

23, 24 und 34 sind die Permutationen die die drei Functionen θ_2, θ_3, θ_4 in einander überführen. 1 und 234 sind diejenigen, welche θ_1 in

θ und in θ_{567} überführen. In welcher Beziehung stehen θ und θ_{567} zu der Reihe $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$? Es sind dies die einzigen geraden Functionen, die der Reihe hinzugefügt werden können, ohne dass sie ihren azygetischen Charakter verliert, und sie ergänzen die Reihe zu einer geschlossenen. Demnach können wir sagen:

Um die Relation zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Sigmafunctionen: $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \sigma_\delta$, die eine azygetische Reihe bilden, aufzustellen, ergänze man diese Reihe zu einer geschlossenen durch Hinzufügung zweier geraden Functionen $\sigma_\varkappa, \sigma_\lambda$. Die gesuchte Relation lautet alsdann:

$$e_{\beta\gamma} e_{\beta\delta} e_{\gamma\delta} e_{\alpha\varkappa} e_{\alpha\lambda} v_\alpha \pm \ldots \pm e_{\alpha\beta} e_{\alpha\gamma} e_{\beta\gamma} e_{\delta\varkappa} e_{\delta\lambda} v_\delta = 0.$$

Es ist bei dieser Formel durchaus nicht nöthig, dass die vier Functionen der Hauptreihe angehören. Wenn dies aber der Fall ist, so vereinfacht sie sich bedeutend. Die Faktoren $e_{\alpha\beta}, e_{\alpha\gamma}, \ldots, e_{\gamma\delta}$ erhalten den Werth 1. Ferner sind θ und $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die beiden Functionen $\theta_\varkappa$ und θ_λ. Wir erhalten daher in diesem Falle:

$$e_\alpha f_{\beta\gamma\delta} v_\alpha \pm \ldots \pm e_\delta f_{\alpha\beta\gamma} v_\delta = 0.$$

Diese Gleichung sagt folgendes aus:

Durch eine lineare Transformation der Variabeln u, u', u'' kann man bewirken, dass

$$e_\alpha v_\alpha = a_\alpha u + b_\alpha u' + c_\alpha u'' \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 7)$$

wird.

Nehmen wir statt $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ die folgende Reihe

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad \text{und} \quad \theta_{15}.$$

In diesem Falle sind θ_{456} und θ_{457} die beiden geraden Functionen, durch welche die Reihe ergänzt werden kann. Demnach ergiebt sich:

$$e_6 e_7 v_{45} = \pm f_{236} f_{237} f_{245} f_{345} v_1 \pm \ldots \pm f_{126} f_{127} f_{145} f_{245} v_3.$$

Aus diesen Formeln geht die Richtigkeit unsrer früheren Behauptung deutlich hervor, dass die azygetischen Relationen zwischen den 28 Anfangsgliedern ausreichen, um alle durch drei unter ihnen auszudrücken.

Viel einfacher gestalten sich die Relationen zwischen den Wurzelfunctionen. Wir hatten diese zunächst so dargestellt: Zu jedem $\varkappa$ gehören

sechs Wurzelfunctionen $\sqrt{w_\alpha} = \sqrt{u_\alpha v_{\alpha\varkappa}}$; je drei unter ihnen sind durch eine Gleichung:

$$A_\alpha \sqrt{w_\alpha} + A_\beta \sqrt{w_\beta} + A_\gamma \sqrt{w_\gamma} = 0$$

verbunden, und die Coefficienten haben die Werthe:

$$A_\alpha = \pm \sqrt{p_{\alpha\lambda\mu}\, p_{\alpha\lambda\nu}\, p_{\alpha\mu\nu}}, \quad \text{etc.},$$

wenn λ, μ, ν die Indices der drei übrigen Wurzelfunctionen sind.

Ersetzt man u_α durch $c_\alpha v_\alpha$, so tritt zu A_α noch der Faktor $\sqrt{p_\alpha} = \sqrt{c_\alpha c_{\alpha\varkappa}}$ hinzu. Die Gleichung nimmt dann die Form an:

$$\sqrt{r_\alpha v_\alpha v_{\alpha\varkappa}} \pm \sqrt{r_\beta v_\beta v_{\beta\varkappa}} \pm \sqrt{r_\gamma v_\gamma v_{\gamma\varkappa}} = 0,$$

wo die r Produkte bedeuten aus je 8 Grössen c, gehörig zu der Gruppe mit der Basis $(\varkappa, \lambda\mu, \lambda\nu)$.

Jetzt ist es leicht, die Coefficienten durch die Grössen e auszudrücken. Kritisch für die Faktoren von r_α sind nur die Permutationen, die $\theta_\beta \theta_{\beta\varkappa}$ in $\theta_\gamma \theta_{\gamma\varkappa}$ überführen, also $\beta\gamma$ und $\beta\gamma\varkappa$. Daher ergiebt sich:

$$e_{\beta\gamma}\, e_{\beta\gamma\varkappa} \sqrt{v_\alpha v_{\alpha\varkappa}} \pm \ldots \pm e_{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta\varkappa} \sqrt{v_\gamma v_{\gamma\varkappa}} = 0.$$

Speciell werden diese Relationen zum Theil äusserst einfach. Nehmen wir z. B. die drei Wurzelfunctionen

$$\sqrt{v_{14} v_{23}}, \quad \sqrt{v_{24} v_{31}}, \quad \sqrt{v_{34} v_{12}},$$

die zu $\varkappa = 1234$ gehören. Hier sind alle Coefficienten gleich ± 1. Denn es geht z. B. die zweite in die dritte über durch die Permutationen 23 und 14; es ist aber $e_{23} = e_{14} = 1$.

Ähnlich sind in der Gleichung zwischen

$$\sqrt{v_1 v_{23}}, \quad \sqrt{v_2 v_{31}}, \quad \sqrt{v_3 v_{12}}$$

die Coefficienten einfach: e_1, e_2 und e_3. Denn die zweite geht in die dritte über durch die Permutation 1 und 23.

Zwischen

$$\sqrt{v_1 v_{17}}, \quad \sqrt{v_2 v_{27}}, \quad \sqrt{v_3 v_{37}}$$

besteht die Gleichung:

$$e_{237} \sqrt{v_1 v_{17}} \pm e_{317} \sqrt{v_2 v_{27}} \pm e_{127} \sqrt{v_3 v_{37}} = 0.$$

Endlich: zwischen den Wurzelgrössen, die $\varkappa = 1234$ gehören:

$$\sqrt{v_{13}v_{24}}\,,\quad \sqrt{v_{23}v_{14}}\,,\quad \sqrt{v_5 v_{67}}$$

können wir die Relation aufstellen:

$$\pm f_{235} f_{145} \sqrt{v_{13} v_{24}} \pm f_{135} f_{245} \sqrt{v_{23} v_{14}} = \sqrt{v_5 v_{67}}\,.$$

Denn die zweite geht in die dritte über durch die Permutationen 235 und 145, die erste aber in die zweite durch die Permutationen 12 und 34; es sind aber e_{12} und e_{34} gleich 1.

An die beiden letzten Formeln knüpft sich die Bemerkung, dass man die Grössen $\sqrt{u_\alpha}$ oder $\sqrt{v_\alpha}$ selbst in ähnlicher Weise darstellen kann, wie die Constanten c_α. Indem man

$$v_1 v_2 \ldots v_7 = \pi,$$

$$\sqrt{v_\alpha v_\beta v_{\alpha\beta}} = F_{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{\frac{\pi v_{\alpha\beta}}{v_\alpha v_\beta}} = G_{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{\pi}\, v_\alpha = H_\alpha$$

setzt, kann man die erste Gleichung so schreiben:

$$f_{237} F_{17} \pm f_{317} F_{27} \pm f_{127} F_{37} = 0,$$

die zweite aber in die beiden Formen setzen:

$$G_{67} = \pm \begin{vmatrix} F_{13} F_{24} & F_{23} F_{14} \\ f_{135} f_{245} & f_{235} f_{145} \end{vmatrix},$$

$$H_5 F_{67} = \pm \begin{vmatrix} G_{13} G_{24} & G_{23} G_{14} \\ f_{135} f_{245} & f_{235} f_{145} \end{vmatrix}.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass man:

$$F_{\alpha\beta} = \pm \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix}$$

setzen kann, wonach $F_{\alpha\beta}$ ausgedrückt ist als lineare Function von drei Grössen x, y, z. $F_{\alpha\beta} = 0$ ist die Bedingung, dass der Punkt x, y, z auf der Geraden liegt, die durch (α) und (β) hindurchgeht.

Die zweite sagt aus, dass $G_{\alpha\beta}$ diejenige quadratische Function von x, y, z ist, welche in allen sieben Punkten ausser (α) und (β) verschwindet. Die dritte endlich definirt H_α als kubische Function, die in allen sieben Punkten verschwindet, und zwar im Punkte (α) von der zweiten Ordnung.

x, y, z sind selbst durch eine Gleichung sechsten Grades $L = 0$ verbunden. Diese kann man in sehr vielen Formen darstellen, z. B.:

$$F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} G_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} - F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} G_{\alpha\beta} G_{\gamma\delta} = 0.$$

Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{F_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{v_\alpha v_\beta}{\sqrt{\pi}}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, dass diese verschiedenen Gleichungen auf die eine geometrische Bedingung hinaus kommen: Die Curve $L = 0$ ist der geometrische Ort der Doppelpunkte aller Curven dritten Grades, die durch sieben feste Punkte hindurchgehn und einen Doppelpunkt besitzen.

Für $\rho = 4$ sind analoge Resultate noch nicht bekannt, ausser in dem speciellen Falle, wo eins der c gleich 0 ist.

§ 7.

Wir versuchen jetzt auch bei den Abel'schen Functionen von vier Variabeln die 136 Constanten c in Beziehung zu setzen mit einem Punktsystem der Geometrie. Den allgemeinen Fall, wo 10 unabhängige Parameter vorhanden sind, müssen wir allerdings beiseite lassen; es handelt sich nur um den Riemann'schen Specialfall, der durch die Gleichung

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

charakterisirt ist. Wir gehen aber nicht von diesem Gleichungssystem aus, sondern von dem, das am Schluss von § 4 aufgestellt war:

$$\sqrt[4]{s_1} \pm \sqrt[4]{s_2} \pm \sqrt[4]{s_3} = 0.$$

Zu jeder GÖPEL'schen Gruppe zweiter Ordnung gehörten 20 solche Gleichungen. Wenn man zunächst die Reihe der Functionen Q aufstellt:

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_6,$$

die Produkte ungerader Theta sind, so sind

$$Q_{123} = Q_{456}, \qquad Q_{124} = Q_{356}, \quad \text{etc.}$$

die 10 Produkte gerader Theta, die zu der gegebenen Gruppe gehören. Jeder der 256 Functionen θ entspricht eine bestimmte Constante c, jeder Function Q somit ein constanter Werth q, und die 20 Gleichungen, welche zwischen den 16 Constanten

$$q_1, q_2, \ldots, q_6, q_{123} \quad \text{etc.}$$

bestehen, können durch die eine Formel

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm \sqrt[4]{q_\alpha q_{\alpha 45} q_{\alpha 46} q_{\alpha 56}}) = 0$$

repräsentirt werden.

Da hier jedem Theta eine bestimmte Constante zugeordnet ist, so können wir nach der Methode von § 5 verfahren. Den vierten Potenzen der c_m — als den Grössen C_m — stellen wir ein System von Faktoren e_μ gegenüber, die den Permutationen entsprechen und die mit den c verbunden sind durch die Gleichungen

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

wo sich das Produkt erstreckt über alle für θ_m kritischen Permutationen μ.

Alsdann geht unsre Gleichung über in:

$$E_1 \pm E_2 \pm E_3 = 0,$$

wo E_α wiederum ein Produkt $\Pi(e_\mu)$ bedeutet, aber nur erstreckt über diejenigen Permutationen μ, die für sämmtliche 16 Faktoren des Ausdrucks

$$Q_\alpha Q_{\alpha 45} Q_{\alpha 46} Q_{\alpha 56}$$

kritisch sind. Eine solche Permutation muss Q_α in ein Produkt gerader Theta, $Q_{\alpha 45}$, $Q_{\alpha 46}$ und $Q_{\alpha 56}$ in Produkte ungerader Theta überführen. Die einzigen Permutationen, welche diese Eigenschaft haben, sind $\beta\gamma$ und die

welche aus $\beta\gamma$ entstehen durch Hinzufügung eines Elements der gegebenen Göpel'schen Gruppe. Das Resultat ist demnach

$$\pi_{\beta\gamma} \pm \pi_{\gamma\alpha} \pm \pi_{\alpha\beta} = 0,$$

wo

$$\pi_{\cdot} = \prod_{\nu} (e_{\mu\nu})$$

ist, das Produkt erstreckt über die vier Elemente der gegebenen Gruppe.

Nachdem soweit die Untersuchung allgemein geführt ist, legen wir von jetzt ab für die Bezeichnung der Theta eine geschlossene azygetische Reihe von 10 gleichartigen Functionen:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_9 \quad \text{und} \quad \theta_0$$

zu Grunde. Alle Combinationen ungerader Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 9, 0$ bezeichnen Functionen, die von gerader Ordnung dagegen Permutationen. Da zwei complementäre Combinationen jedesmal dasselbe Theta oder dieselbe Permutation bezeichnen, so können wir uns für die Theta auf die Combinationen erster, dritter und fünfter Ordnung beschränken, für die Permutationen auf die Combinationen zweiter und vierter Ordnung. Die Functionen θ_α der Hauptreihe sind gerade, $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ ist eine ungerade, $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ wiederum eine gerade Function. Das System der e_μ zerfällt in die Grössen $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Wir haben hier nicht mehr die volle Symmetrie der Voraussetzungen, da 10 Functionen vor den übrigen bevorzugt sind. Aber es muss jede Gleichung die wir zwischen den $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aufstellen, richtig bleiben, wenn wir die Zahlen $1, 2, 3$ etc. beliebig unter einander vertauschen. Deshalb genügt es, einzelne Typen aufzustellen. Die Anzahl dieser Typen beträgt sechs, und da sie ohne Zweifel ein interessantes Gleichungssystem bilden, so wollen wir diese Typen vollständig angeben.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass es nur drei Typen giebt für die Göpel'sche Gruppe zweiter Ordnung. Es dürfen nämlich zwei Combinationen, die in der Gruppe vorkommen, immer nur eine gerade Anzahl von Elementen gemeinsam haben. Diese drei Typen sind:

I. (0, 78, 90, 7890),

II. (0, 1234, 5678, 90),

III. (0, 5678, 5690, 7890).

Für jede der definirten Gruppen haben wir eine Reihe von 6 Functionen Q aufzustellen, die Produkte ungerader Theta sind.

Dies sind für die erste Gruppe:

$$Q_{179}\,,\; Q_{279}\,,\; Q_{379}\,,\; Q_{479}\,,\; Q_{579}\,,\; Q_{679}\,;$$

für die zweite:

$$Q_{140}\,,\; Q_{240}\,,\; Q_{340}\,;\; Q_{580}\,,\; Q_{680}\,,\; Q_{780}\,;$$

für die dritte:

$$Q_{156}\,,\; Q_{256}\,,\; Q_{356}\,,\; Q_{456}\,;\; Q_{570}\,,\; Q_{670}\,.$$

Bei der ersten Gruppe ist es gleichgültig, welche der drei Glieder wir auswählen. Nehmen wir die drei ersten:

$$Q_{179}\,,\; Q_{279}\,,\; Q_{379}\,.$$

Q_{279} geht in Q_{379} über durch die Permutationen:

$$23\,,\; 2378\,,\; 2390\,,\; 237890 = 1456.$$

Wir haben demnach die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad \sum_{1,2,3} (\pm\, e_{23}\, e_{2378}\, e_{2390}\, e_{1456}) = 0.$$

Die Summe auf der linken Seite besteht aus drei Gliedern; das zweite und dritte entstehen aus dem hingeschriebenen durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3.

Bei der zweiten Gruppe sind zwei Typen aufzustellen. Wir können entweder auswählen:

$$Q_{140}\,,\; Q_{240}\,,\; Q_{340}\,.$$

Q_{240} geht in Q_{340} über durch die Permutationen:

$$23\,,\; 14\,,\; 2390\,,\; 1490.$$

Dies führt zu der Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad \sum_{1,2,3} (\pm\, e_{23}\, e_{14}\, e_{2390}\, e_{1490}) = 0.$$

Oder wir können wählen:

$$Q_{140}\,,\; Q_{240}\,,\; Q_{780}\,.$$

Da Q_{240} in Q_{780} übergeht durch die Permutationen

$$2356\,,\ 2378\,,\ 1456\,,\ 1478,$$

so erhalten wir eine Gleichung, der wir die Form geben können:

$$\text{(c)}\qquad \begin{vmatrix} e_{1456}e_{1478} & e_{1356}e_{1378} \\ e_{2456}e_{2478} & e_{2356}e_{2378} \end{vmatrix} = \pm\, e_{12}e_{34}e_{1290}e_{3490}.$$

Die dritte Gruppe liefert drei verschiedne Typen, je nachdem wir aus der Reihe der sechs Functionen Q auswählen:

$$Q_{157}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{356},$$

oder:

$$Q_{156}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{570},$$

oder endlich:

$$Q_{156}\,,\ Q_{570}\,,\ Q_{670}.$$

Diese drei Gleichungen sind:

$$\text{(d)}\qquad \sum_{1,2,3}(\pm\, e_{23}e_{1456}e_{1478}e_{1490}) = 0,$$

$$\text{(e)}\qquad e_{12}e_{3456}e_{3478}e_{3490} = \sum_{1,2}(\pm\, e_{1679}e_{1589}e_{1570}e_{1680}),$$

$$\text{(f)}\qquad e_{56}e_{78}e_{90}e_{1234} = \pm \begin{vmatrix} e_{1579}e_{1580} & e_{1589}e_{1570} \\ e_{1679}e_{1680} & e_{1689}e_{1670} \end{vmatrix}.$$

Von den Formeln dieses Systems ist zunächst die zweite, (b), die wichtigste. Sie lässt sich noch vereinfachen. Wenn man statt der $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ einführt:

$$e_{\alpha\beta}e_{\alpha\gamma}e_{\alpha\delta}e_{\beta\gamma}e_{\beta\delta}e_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

so geht sie über in:

$$\sum_{1,2,3}(\pm D_{2390}D_{1490}) = 0,$$

und dies zeigt, dass die $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ Determinanten sind. Es müssen sich zehn Werthsysteme

$$(A_\alpha\,,\ B_\alpha\,,\ C_\alpha\,,\ D_\alpha) \qquad\qquad {\scriptstyle(\alpha=1,2,\ldots,0)}$$

oder besser:

$$(l_\alpha a_\alpha\,,\ l_\alpha b_\alpha\,,\ l_\alpha c_\alpha\,,\ l_\alpha d_\alpha)$$

angeben lassen, sodass allgemein:

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm\, l_\alpha l_\beta l_\gamma l_\delta \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha & d_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta & d_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma & d_\gamma \\ a_\delta & b_\delta & c_\delta & d_\delta \end{vmatrix}$$

ist. Die 10 Werthsysteme $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha)$ fassen wir auf als die Coordinaten von 10 Punkten im Raume, und setzen jetzt:

$$e_{\alpha\beta}\, e_{\alpha\gamma} \ldots e_{\gamma\delta}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta} = l_\alpha l_\beta l_\gamma l_\delta f_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

$f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist dann diejenige lineare Determinante, deren Verschwinden ausdrückt, dass vier der 10 Punkte in einer Ebene liegen.

Man kann nun in sämmtlichen Gleichungen die Faktoren $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ durch die neu eingeführten Grössen $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrücken. Die Gleichungen enthalten dann ausser den f noch die Grössen $e_{\alpha\beta}$ und l_α. Es ist vortheilhaft, auch diese durch andere zu ersetzen.

Wir führen zunächst folgende Abkürzungen ein:

Mit e soll das Produkt aller 45 Grössen $e_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden;

mit e_α das Produkt derjenigen neun, deren Index die Zahl α enthält (sodass z. B. $e_0 = e_{01} e_{02} \ldots e_{09}$ ist);

endlich mit l das Produkt der 10 Grössen $l_1, l_2, \ldots, l_0$.

Wir setzen dann:

$$\xi_\alpha = \frac{l_\alpha^7}{e_\alpha^2}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 9, 0)$$

$$f_{\alpha\beta} = \frac{l}{e} \frac{e_\alpha^3 e_\beta^3}{l_\alpha^7 l_\beta^7 l_{\alpha\beta}^2}. \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 9, 0;\ \alpha \lesseqgtr \beta)$$

Am leichtesten lassen sich diese Substitutionen durchführen bei den Gleichungen (a) und (d). Sie gehen über, wie man ohne Mühe erkennt, in:

(a′) $$\sum_{1,2,3} (\pm\, \xi_1^4 f_{14} f_{15} f_{16} f_{2378} f_{2390} f_{1456}) = 0$$

und:

(d′) $$\sum_{1,2,3} (\pm\, \xi_1^2 f_{14} f_{1456} f_{1478} f_{1490}) = 0.$$

Die letztere Gleichung ist leicht zu deuten. Wir können sie zunächst so schreiben:

$$\sum_{1,2,\ldots,0} \left(\pm\, \xi_\alpha^2 f_{\alpha\varkappa} f_{\alpha\varkappa\lambda\mu} f_{\alpha\varkappa\nu\rho} f_{\alpha\varkappa\sigma\upsilon}\right) = 0,$$

indem wir berücksichtigen, dass $f_{\alpha\varkappa\lambda\mu}$ eine lineare Function der Coordinaten des Punktes (α) ist, welche verschwindet, wenn dieser Punkt mit $(\varkappa)$, (λ) oder (μ) zusammenfällt. Alle diese Gleichungen haben die Form:

$$\sum_\alpha \left(\pm\, \xi_\alpha^2 f_{\alpha\varkappa}\, H(a_\alpha\,, b_\alpha\,, c_\alpha\,, d_\alpha)\right) = 0,$$

wo $H(x, y, z, t)$ eine Function dritten Grades bedeutet, die im Punkte $(\varkappa)$ von der dritten Ordnung verschwindet. Es ist leicht zu sehen, dass diese Formel gelten muss, welche besondere derartige Function wir auch für H nehmen mögen. Denken wir uns nun, $H = 0$ sei die Gleichung einer Kegelfläche dritten Grades, deren Spitze im Punkte $(\varkappa)$ liegt und die durch 8 der übrigen Grundpunkte hindurchgeht; dann zeigt die Formel, dass auch der letzte Punkt auf diesem Kegel liegt. Wir können daher unser System von 10 Punkten in folgender Weise geometrisch charakterisiren:

Zieht man von irgend einem der 10 Punkte aus Strahlen nach den neun übrigen, so bilden diese neun Geraden immer den vollständigen Durchschnitt zweier Kegel dritten Grades.

Es giebt auch eine geometrische Relation, welche die gegenseitige Lage von acht der zehn Punkte charakterisirt. Nehmen wir die Gleichung (f) unsres Systems und drücken auch in dieser die Grössen $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $e_{\alpha\beta}$ durch $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $f_{\alpha\beta}$ und die ξ_α aus. Nach einer kleiner Rechnung ergiebt sich:

$$\text{(f}'\text{)} \qquad \begin{vmatrix} f_{1579} f_{1580} & f_{1589} f_{1570} \\ f_{1679} f_{1680} & f_{1689} f_{1670} \end{vmatrix} = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4}{\xi_5 \xi_6 \xi_7 \xi_8 \xi_9 \xi_0} f_{12} f_{13} f_{14} f_{1234}.$$

Der Ausdruck links ist hier nichts andres als diejenige aus den Werthsystemen (a, b, c, d) gebildete quadratische Determinante, deren Verschwinden anzeigt, dass ein Kegel zweiten Grades existirt, mit der Spitze im Punkt (1), der durch die Punkte 5, 6, 7, 8, 9, 0 hindurchgeht. Für diese Function wählen wir die Bezeichnung

$$g_{234,1}\,.$$

(2), (3) und (4) sind diejenigen Punkte, deren Coordinaten in dem

Ausdruck nicht vorkommen. Wir haben dann die eigenthümliche Relation:

$$g_{..} = \frac{\xi\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,f_{12}\,f_{13}\,f_{14}\,f_{1234}}{\xi\;\xi\;\xi\;\xi\;\xi\;\xi}\,,$$

welche natürlich bestehen bleibt bei jeder Vertauschung der 10 Zahlen.

Durch sie ist ein Mittel gegeben, auch die Faktoren $f_{\alpha\beta}$ und ξ_α auszudrücken als Functionen der Werthsysteme (a, b, c, d). Aber sie giebt zugleich die Möglichkeit, eine Relation zwischen je acht der 10 Punkte aufzustellen. Diese Relation ist:

$$g_{145,2}\,g_{245,3}\,g_{345,1} = g_{245,1}\,g_{345,2}\,g_{145,3}\,.$$

In ihr kommen die Coordinaten der Punkte (4) und (5) nicht vor, und man sieht ohne weiteres, dass sie richtig ist, wenn man vermöge der obigen Formel $g_{\alpha\beta\gamma,\delta}$ durch $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrückt.

Es ist dies eine Relation zwischen acht Punkten, die ich schon in einer früheren Arbeit (Crelle's Journal, Bd. 105, S. 273) besprochen habe; sie sagt aus, dass eine Fläche vierten Grades existirt, welche die acht Punkte zu Doppelpunkten hat. Eine solche Fläche kann noch zwei weitere Doppelpunkte besitzen: dies müssen offenbar die beiden übrigen Punkte sein. Daher lässt sich das System der zehn Punkte charakterisiren als das der zehn Doppelpunkte einer Fläche vierten Grades.

Es hat vielleicht noch ein gewisses Interesse, die Gleichungen

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

umzusetzen in Relationen zwischen den e oder den f.

Es ist klar, dass für die Faktoren von r_1 nur die Permutationen kritisch sind, die r_2 in r_3 überführen. Die Gleichung geht daher über in

$$\pi_{23} \pm \pi_{31} \pm \pi_{12} = 0,$$

wo $\pi_{\alpha\beta}$ ein Produkt von acht Faktoren e bedeutet, nämlich:

$$\pi_{..} = \Pi(e_{..});$$

es erstreckt sich über alle Elemente z der Göpel'schen Gruppe dritter Ordnung, die der Gleichung zu Grunde liegt.

Demnach sind diese Gleichungen zwischen den e weniger einfach als die vorhin betrachteten. Erleichtert wird allerdings ihre Aufstellung da-

durch, dass für die Göpel'sche Gruppe dritter Ordnung nur zwei Typen existieren, nämlich:

$$(0, 56, 78, 90, 5678, 5690, 7890, 1234),$$

und:

$$(0, 1234, 1256, 1278, 3456, 3478, 5678, 90).$$

Für die erste der beiden Gruppen sind

$$\vartheta_{14579}, \vartheta_{24579}, \vartheta_{34579}$$

drei gerade Theta, die gerade bleiben bei den sämmtlichen Permutationen der Gruppe; für die zweite haben

$$\vartheta_{9}, \vartheta_{13579}, \vartheta_{23579}$$

dieselbe Eigenschaft. Dies führt zu den beiden Gleichungen:

$$\sum_{1,2,3} (\pm\, e_{23} e_{14} e_{2356} e_{1456} e_{2378} e_{1478} e_{2390} e_{1490}) = 0,$$

und:

$$e_{12} e_{34} e_{56} e_{78} e_{1290} e_{3490} e_{5690} e_{7890} = \pm \begin{vmatrix} e_{1357} e_{1467} e_{1458} e_{1368} & e_{1457} e_{1367} e_{1358} e_{1468} \\ e_{2357} e_{2467} e_{2458} e_{2368} & e_{2457} e_{2367} e_{2358} e_{2468} \end{vmatrix}.$$

Wenn man nun in diesen beiden Gleichungen die Faktoren $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrückt durch die entsprechenden Grössen $f_{\alpha\beta}$ und $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$, so ergiebt sich das Resultat dass für die f genau dieselben Gleichungen bestehen, wie für die e.

Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die Ausdrücke für die Anfangswerthe der 136 geraden Theta

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu)$$

richtig bleiben, wenn man jeden Faktor e durch das entsprechende f ersetzt. Wir können die Gleichungen aufstellen:

$$c_m^4 = R\Pi(f_\mu);$$

das Produkt erstreckt sich jedesmal über alle 120 Permutationen μ, die ϑ_m in eine ungerade Function überführen. Damit sind die Grössen c_m^4 ausgedrückt durch Produkte von Faktoren, deren Haupttheil durch die linearen Determinanten $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gebildet wird.

NOTE SUR LES ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN

PAR

J.-P. GRAM

à COPENHAGUE.

Le génie d'ABEL se manifesta non seulement dans la force gigantique qu'il sût appliquer pour approfondir les problèmes qu'il prit pour objets de ses recherches, mais aussi bien dans l'intuition remarquable qui lui fit saisir précisement ces problèmes dont la solution devait conduire à des résultats féconds pour l'avenir. Il ne doit donc pas nous étonner de trouver ABEL dans la liste des analystes qui ont préparé la terre pour la théorie de la fonction Zéta, une des plus remarquables acquisitions de l'analyse moderne.

A la vérité les Oeuvres d'ABEL renferment plusieurs mémoires concernant cette matière; surtout ceux qui portent les numéros II et IV du Tome 1, et I du Tome 2 de l'édition nouvelle contiennent assez de choses dignes d'intérêt. Sans entrer dans des détails je rappellerai particulièrement l'attention sur deux formules fondamentales qu'on y trouve.

La première est l'égalité qui sous sa forme moderne s'écrit comme suit:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx, \tag{I}$$

sur laquelle ABEL est conduit en cherchant une expression des nombres de BERNOULLI au moyen d'intégrales définies. Comme on sait, c'est cette intégrale que RIEMANN a prise pour départ de sa théorie générale et plus

tard feu M. HERMITE[1] montra comment on en peut déduire une expression qui conserve sa validité sur le plan tout entier. Il suffit de faire la décomposition $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$ pour établir la formule générale:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{B_3}{4} \cdot \frac{1}{s+3} + \ldots$$

$$+ \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x(e^x-1)} \left(1 + \frac{s}{1} lx + \frac{s^2}{2}(lx)^2 + \ldots\right) dx = I_1 + I_2 \,,$$

B_1, B_3, ... désignant les nombres de BERNOULLI, I_1 et I_2 les parties correspondantes à chaque intégrale respectivement.

L'integrale (I) n'a aucun sens que quand la partie réelle de s surpasse l'unité positive. Quand $0 < R(s) < 1$ l'intégrale

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) x^{s-1} dx$$

reste finie et a la valeur $I_1 - \frac{1}{s-1}$. En même temps $I_2 + \frac{1}{s-1}$ peut s'écrire

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) x^{s-1} dx \,,$$

donc

$$(\mathrm{I}') \qquad \Gamma(s)\zeta(s) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) x^{s-1} dt, \quad \text{pour } 0 < R(s) < 1 \,.$$

Également

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) x^{s-1} dx, \qquad \text{pour } -1 < R(s) < 0,$$

etc.

[1] Comptes rendus 1885, p. 112.

Evidemment cette transposition simple qui nous a donné l'extension de la formule (I) est d'une plus grande portée. Appliquée à la fonction $\Gamma(s)$ elle nous donne:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty (e^{-x} - 1) x^{s-1} dx \qquad (-1 < R(s) < 0),$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(e^{-x} - 1 + \frac{x}{1}\right) x^{s-1} dx \qquad (-2 < R(s) < -1),$$

et ainsi de suite.

Une autre formule de grande valeur pour la théorie de la fonction Zéta et qui tout-à-fait appartient à ABEL est la formule remarquable de sommation qu'il écrit ainsi:

$$\text{(II)} \qquad \sum \varphi(x) = \int \varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) + 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + ti) - \varphi(x - ti)}{2i}.$$

En posant $\varphi(x) = x^{-s} (s > 1)$ et en prenant la somme de $x = n$ à $x = \infty$, on en déduit

$$(n + 1)^{-s} + (n + 2)^{-s} + \ldots$$

$$= \int_n^\infty x^{-s} dx - \frac{1}{2} n^{-s} + 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{(n + ti)^{-s} - (n - ti)^{-s}}{2i},$$

la forme particulière de (II) qu'il faut appliquer dans la recherche de $\zeta(s)$. En outre, la valeur principale de cette formule consiste en ce qu'elle donne le moyen pour évaluer la reste dans la formule générale de sommation de EULER et MACLAURIN, qui fournit le procédé le plus expéditif pour le calcul de $\zeta(s)$.

Il ne semble donc pas mal à propos dans ce volume des Acta Mathematica, déstiné à honorer le nom immortel de ABEL, d'insérer la note suivante qui certainement touche un des problèmes les plus intricats du jour mais dont la méthode se rattache assez étroitement aux recherches

d'Abel lui-même. Le mémoire qui suit a été présenté a l'Académie de Copenhague le 7 février de cette année et est inséré dans le premier fascicule du Bulletin de cette Académie pour 1902.

Malgré les nombreuses études qui ont paru dans ces dernières années sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, la question de ses racines imaginaires attend toujours une solution. Les difficultés qu'elle présente, et qui proviennent de ce fait qu'on ne possède pas une expression pratique, explicite ou implicite, pouvant être prise comme point de départ d'une étude approfondie générale de la dite fonction, ont été jusqu'ici presque insurmontables.

Pour obtenir des résultats qui puissent au moins servir à donner des renseignements utiles pour guider dans les recherches théoriques, je me suis occupé depuis quelque temps des calculs numériques dont le but principal était de créer une table numérique donnant les valeurs de la fonction $\xi(t)$ pour une série de valeurs réelles de l'argument.

J'ai publié en 1895[1] les valeurs numériques des coefficients qui entrent dans les séries représentant les fonctions $\xi(t)$ et $\zeta(s)$, et j'en ai tiré quelques conclusions préalables sur les plus petites racines α de $\xi(t) = 0$, qui furent déterminées ainsi:

$$\alpha_1 = 14.135, \qquad \alpha_2 = 20.82, \qquad \alpha_3 = 25.1.$$

Mais quoique les coefficients eussent été calculés avec 16 décimales, ce calcul ne suffit pas à déterminer les α avec une exactitude satisfaisante pour des usages ultérieurs. Afin d'obtenir au moins α_1 plus correctement, j'ai donc repris le travail en commençant par calculer directement $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$, $\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)$, $\zeta''\left(\frac{1}{2}\right)$ avec 28 décimales correctes. Cela m'a donné $\xi(0)$ et $\xi''(0)$ et ensuite $\left(D_t^2 \log \xi(t)\right)_0$ avec la même approximation. Enfin j'ai calculé $\log \xi(it)$ pour $t = \pm \frac{2n+1}{2}$, $n < 15$, me procurant ainsi le moyen d'établir une interpolation qui m'a donné successivement les coefficients supérieurs

[1] *Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.* Bulletin de l'Académie de Copenhague 1895, p. 303.

dans la série de $\log_e \xi(t)$. Pour la méthode, je me bornerai à renvoyer au mémoire cité, le résultat obtenu fut la série suivante:

$$
\begin{aligned}
\log_e \xi(t) = 0.6989'\,2226''\,7945'''\,3314^{IV}\,1529^{V}\,8362^{VI}\,0204^{VII}\,81 & \\
+\ 231'\,0400''\,3115'''\,4189^{IV}\,7078^{V}\,8932^{VI}\,3871^{VII}\,31\,t^2 & \\
+\ 1858''\,6299'''\,6426^{IV}\,3484^{V}\,28 \qquad & .t^4 \\
+\ 4''\,8057'''\,9771^{IV}\,3365^{V}\,663 \qquad & .t^6 \\
+\ 165'''\,7579^{IV}\,2006^{V}\,235 \qquad & .t^8 \\
+\ 6427^{IV}\,3282^{V}\,993 \qquad & .t^{10} \\
+\ 26^{IV}\,4615^{V}\,5724^{VI} \qquad & .t^{12} \\
+\ 1129^{V}\,0460^{VI}\,5 \qquad & .t^{14} \\
+\ 4^{V}\,9332^{VI}\,2 \qquad & .t^{16} \\
+\ 220^{VI}\,6 \qquad & .t^{18}
\end{aligned}
$$

Mais ces coefficients plus exacts ne permettent pas encore une détermination de α_1 essentiellement meilleure que celle qui avait été obtenue précédemment, soit parce qu'on ne peut pas se fier absolument aux deux derniers chiffres des coefficients trouvés, soit parcequ'il serait nécessaire pour le calcul de α_1 au moyen des fonctions symétriques $\sum \alpha^{-2n}$ d'avoir $\sum \alpha^{-2n}$ pour une valeur de n plus grande encore, ou au moins d'avoir une connaissance provisoire des valeurs de α_2, α_3 etc.

Ces difficultés m'ayant paru insurmontables à moins de calculs immenses, j'abandonnai ces recherches en espérant qu'un autre trouverait quelque méthode pouvant servir soit au calcul des coefficients de $\xi(t)$ soit au calcul direct des racines α. Mais, autant que je sache, aucune méthode de ce genre n'a encore été publiée.

Quant aux α, il me restait toujours à essayer de calculer directement les racines de $\zeta(s) = 0$, autrement dit de déterminer les valeurs de t réelles ou imaginaires qui donnent $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = 0$. Toutefois cette entreprise me sembla inutile parce que je doutais que la formule approximative qu'il faudrait appliquer donnât des développements assez convergents pour les calculs dont il s'agit ici. Néanmoins l'automne dernier je me suis décidé à faire cet essai, et j'ai été frappé de la facilité avec laquelle il a réussi. Certainement la détermination d'une racine α demande bien des efforts, mais théoriquement il n'y a pas de difficulté et la méthode permet

pour ainsi dire de calculer autant de racines qu'on le veut, de façon à rendre possible le calcul de $\zeta(s)$ pour toute valeur de s, pourvu que ce calcul soit pratiquement exigible.

En partant de la définition

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty}\left[\sum_1^n n^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}\right],$$

la partie réelle de s étant supposée > 0, et en calculant la somme $\sum_n^r n^{-s}$ au moyen de la formule générale de sommation, on obtient la formule connue:

$$\text{1)} \qquad \zeta(s) = \sum_1^n n^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2} n^{-s} + \frac{s}{1\,.\,2} B_1 n^{-s-1}$$
$$\frac{s(s+1)(s+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} B_3 n^{-s-3} + \ldots,$$

B_1, B_3, ... représentant les nombres de Bernoulli. Cette formule est généralement semiconvergente, et donne pour s réelle une exactitude d'autant plus grande que n est supposé plus grand. Par exemple $n = 20$ donne $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ correctement avec plus de 30 décimales.

Mais comment se comporte cette formule pour des valeurs complexes de s?

En l'écrivant sous la forme

$$\zeta(s) = \sum_1^n n^{-s} - n^{-s}\left[\frac{n}{1-s} + \frac{1}{2} - \frac{s}{2n}(B_1 + R)\right],$$

on voit qu'il s'agit en premier lieu d'estimer la grandeur du reste R, où

$$R = -\frac{(s+1)(s+2)}{3\,.\,4\,.\,n^2} B_3 + \frac{(s+1)(s+2)}{3\,.\,4\,.\,n^2} \cdot \frac{(s+3)(s+4)}{5\,.\,6\,.\,n^2} B_5 \ldots$$

Considérons séparément les facteurs

$$A_1 = -\frac{(s+1)(s+2)}{3\,.\,4\,.\,n^2}, \qquad A_2 = -\frac{(s+3)(s+4)}{5\,.\,6\,.\,n^2} \text{ etc.},$$

dont l'introduction permet d'écrire:

$$R = A_1 B_3 + A_1 A_2 B_5 + A_1 A_2 A_3 B_7 + \ldots,$$

et posons: $s = x + yi$. Alors on obtient:

$$A_\nu = \frac{y^2 + \frac{1}{4} - \left(x + 2\nu - \frac{1}{2}\right)^2 - iy(2x + 4\nu - 1)}{(2\nu + 1)(2\nu + 2)n^2}.$$

Il est évident qu'on pourra toujours choisir pour n un nombre si grand que les premiers A auront leurs parties réelles comme leurs parties imaginaires égales à des fractions propres, et que les produits successifs des mêmes A formeront alors une série décroissante.

La propriété caractéristique des séries semiconvergentes subsiste donc pour la série R et par conséquent aussi pour la série qui représente $\zeta(s)$.

Dans le cas actuel il s'agit de calculer la valeur de $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, $y = t$, on a:

$$A_\nu = \frac{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - 4\nu^2 - 4\nu ti}{(2\nu + 1)(2\nu + 2)n^2},$$

d'où, en posant $t^2 + \frac{1}{4} = T$:

$$A_1 = \frac{(T - 4) - 4ti}{3 \cdot 4 \cdot n^2},$$

$$A_2 = \frac{(T - 16) - 8ti}{5 \cdot 6 \cdot n^2},$$

$$A_3 = \frac{(T - 36) - 12ti}{7 \cdot 8 \cdot n^2} \text{ etc.}$$

La formule définitive sera alors:

$$(2) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \sum_1^{n} n^{-\frac{1}{2}}(\cos t \log n - i \sin t \log n) - n^{\frac{1}{2}}(\cos t \log n - i \sin t \log n)$$

$$\times \left[\frac{n + 2nti}{T} + \frac{1}{2} - \frac{1 + 2ti}{4n}(B_1 + A_1 B_3 + A_1 A_2 B_5 + \ldots)\right]$$

$$= C(t) + iS(t),$$

en désignant respectivement par $C(t)$ et $S(t)$ la partie réelle et la partie imaginaire.

Pour calculer au moyen de (2) $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$ avec au moins 7 décimales correctes, il suffit de prendre $n = 20$, quand t ne surpasse pas 50. Afin d'appliquer cette formule au calcul des racines α, on commence par dresser une petite table des valeurs successives de $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$, pour voir s'il y aura des valeurs de t qui semblent pouvoir annuler simultanément $C(t)$ et $S(t)$. Ayant trouvé ainsi des limites assez vagues, on a en premier lieu à calculer ζ pour quelques valeurs intermédiaires telles qu'on puisse obtenir par interpolation linéaire une approximation meilleure à la racine cherchée. En se servant des tables logarithmiques à 5 décimales on peut obtenir au moins 4 décimales correctes de α. Et si l'on avait trouvé qu'une α est située entre deux valeurs t_1 et t_2 ne différant que par 10^{-4}, un calcul réitéré avec 7 décimales donnerait les deux chiffres suivants presque exactement, à moins que l'accumulation des fautes dans les derniers chiffres ne s'y opposât. Quant aux valeurs maxima de $C(t)$ et de $S(t)$ elles ne s'élèvent qu'à peu d'unités.

On trouve par ex.:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + 14.1347i\right) = +0.0000033 - 0.0000199i$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + 14.1348i\right) = -0.0000092 + 0.0000587i,$$

et si l'on pose $\alpha_1 = 14.1347 + k \cdot 10^{-4}$, on trouve par interpolation:

$$k_1 = \frac{33}{125} = 0.264; \quad k_2 = \frac{199}{786} = 0.253.$$

De ces deux valeurs de la correction, k_2 est la meilleure; un calcul fait avec 8 décimales m'a donné $\alpha_1 = 14.1347251$; mais le dernier chiffre est douteux.

Comme on le voit, la détermination d'une racine exige certainement bien des calculs, mais grâce à l'aide qu'a bien voulu me prêter M. H. S. Nielsen pour le calcul final, je suis parvenu à déterminer les 10 premières racines de l'équation $\xi(t) = 0$, dont voici les valeurs en 8 chiffres:

$$\alpha_1 = 14.134725$$
$$\alpha_2 = 21.022040$$
$$\alpha_3 = 25.010856$$
$$\alpha_4 = 30.424878$$
$$\alpha_5 = 32.935057$$
$$\alpha_6 = 37.586176$$
$$\alpha_7 = 40.918720$$
$$\alpha_8 = 43.327073$$
$$\alpha_9 = 48.005150$$
$$\alpha_{10} = 49.773832$$

Le dernier chiffre seulement est un peu incertain; du reste la détermination double au moyen de $C(t)$ et de $S(t)$ donne une bonne preuve du calcul. Les racines trouvées sont toutes celles qui sont inférieures à 50; les plus proches seront d'environ les valeurs suivantes:

$$\alpha_{11} = 52.8\,,\ \alpha_{12} = 56.4\,,\ \alpha_{13} = 59.4\,,\ \alpha_{14} = 61.0\,,\ \alpha_{15} = 65.0.$$

Elles fournissent un contrôle au calcul des coefficients de $\log \xi(t)$ donnés plus haut. Car on trouve respectivement:

$$\sum_1^{10} \alpha_\nu^{-12} = 158^{IV}7693^{V}0\,, \qquad \sum_1^{\infty} \alpha_\nu^{-12} = 158^{IV}7693^{V}4344\,,$$

$$\sum_1^{10} \alpha_\nu^{-14} = 7903^{V}3261^{VI}, \qquad \sum_1^{\infty} \alpha_\nu^{-14} = 7903^{V}3223^{VI}5\,,$$

$$\sum_1^{10} \alpha^{-16} = 39^{V}4647^{VI}16\,, \qquad \sum_1^{\infty} \alpha^{-16} = 39^{V}4657^{VI}6\,,$$

d'où l'on peut inférer que les coefficients de $\log \xi(t)$ donnés plus haut sont corrects aux deux derniers chiffres près.

On peut conclure de notre calcul que les quinze premières racines de $\xi(t) = 0$ sont réelles, sans quoi, leurs parties imaginaires seraient très insignifiantes. Que ces racines sont véritablement réelles, c'est ce que nous prouverons ci-dessous. On ne voit pas de raison pour que les racines suivantes se comporteraient autrement. En plus des renseignements que le

calcul achevé m'a fournis sur la variation de la fonction $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$, il rend aussi possible le calcul de $\log \xi(t)$ pour $t < 50$ au moyen de la série donnée plus haut et des valeurs trouvées pour les premières racines. Enfin la connaissance de ces racines donne le moyen d'aborder l'étude des termes périodiques dans les formules analytiques exprimant des fonctions des nombres premiers.

Mais le résultat le plus intéressant qu'ait donné ce calcul consiste en ce qu'il révèle l'irrégularité qui se trouve dans la série des α. Il est très probable que ces racines sont liées intimement aux nombres premiers. La recherche de cette dépendance, c'est-à-dire de la manière dont une α donnée est exprimée au moyen des nombres premiers, sera l'objet d'études ultérieures.

A côté des valeurs des α, mon calcul m'a fournis des renseignements sur un autre point digne d'intérêt. C'est qu'il se trouve aussi des valeurs réelles de t qui font annuler soit la partie réelle soit la partie imaginaire de $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$, mais différentes des α qui font annuler simultanément les deux parties.

Posons

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right) = C(t) + iS(t) = me^{i\varphi(t)}, \tag{3}$$

m étant le module pris avec un signe convenable, $C(t)$ et $S(t)$ des fonctions réelles de t. Pour avoir simultanément $C = 0$ et $S = 0$, il faut que $m = 0$. En outre $C = 0$ quand $\cos\varphi = 0$, $S = 0$ quand $\sin\varphi = 0$. Il n'est pas difficile d'exprimer φ en fonction de t.

L'équation fonctionelle de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

peut s'écrire:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Donc:

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s), \tag{4}$$

et pour $s = \frac{1}{2} + ti$:

$$(5) \qquad \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} - ti\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)} = e^{-2\varphi i} = 2^{\frac{1}{2} - ti}\, \pi^{-\frac{1}{2} - ti} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} ti\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + ti\right);$$

Pour trouver φ on n'a donc qu'à chercher le logarithme du second membre, ce qui donne:

$$-2\varphi i = -ti \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} ti\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} ti\right)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ti\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ti\right)}.$$

Mais

$$\frac{1}{2} \log \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} ti\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} ti\right)} = i\left(\operatorname{arctg} e^{-\pi t} - \frac{\pi}{4}\right),$$

et

$$\frac{1}{2} \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ti\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ti\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{\frac{1}{2} + ti}{\frac{1}{2} - ti} + \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \left[2ti \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - \log \frac{\frac{1}{2} + \nu + ti}{\frac{1}{2} + \nu - ti} \right]$$

$$= -i \operatorname{arctg} 2t + i \sum_{1}^{\infty} \left[t \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - \operatorname{arctg} \frac{t}{\nu + \frac{1}{2}} \right]$$

$$= i \operatorname{Lim} \left[t \log(\omega + 1) - \sum_{0}^{\omega} \operatorname{arctg} \frac{t}{\nu + \frac{1}{2}} \right]_{\omega = \infty} = iv.$$

Ainsi on aura:

$$(6) \qquad -2\varphi = -t \log 2\pi + \operatorname{arctg} e^{-\pi t} - \frac{\pi}{4} + v.$$

La quantité désignée par v peut être calculée approximativement au moyen de la formule générale de sommation:

$$\sum_0^\omega f(\nu) = \int_0^\omega f(\nu)d\nu - \frac{1}{2}\big(f(\omega) - f(0)\big)$$

$$+ \frac{B_1}{1 \cdot 2}\big(f'(\omega) - f'(0)\big) - \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\big(f'''(\omega) - f'''(0)\big) + \ldots.$$

Mais

$$\int_0^\omega \operatorname{arctg} \frac{t}{\nu + \frac{1}{2}} d\nu = \left(\omega + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} + \frac{t}{2} \log\left(t^2 + \left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2t - \frac{t}{2} \log \left(t^2 + \frac{1}{4}\right).$$

$f(\omega), f'(\omega), f'''(\omega) \ldots$ s'annuleront pour $\omega = \infty$; les autres termes contenant ω se réduisent donc à:

$$t \log (\omega + 1) - \left(\omega + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{\omega + \frac{1}{2}} - \frac{t}{2} \log \left(t^2 + \left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2\right),$$

dont la limite pour $\omega = \infty$ sera égale à $-t$. Alors on obtient ensuite:

$$v = \frac{t}{2} \log \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - t - \frac{B_1}{2} \cdot \frac{t}{t^2 + \frac{1}{4}} + \frac{B_3}{12} \left(\frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^3} - \frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^2}\right) + \ldots$$

et

$$(7) \quad -2\varphi(t) = \frac{t}{2} \log \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - t(1 + \log 2\pi) + \operatorname{arctg} e^{-\pi t} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12} \frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)},$$

en négligeant les termes d'ordres inférieurs à $\frac{1}{t}$.

On voit que $\varphi(t) = -\varphi(-t)$, $\varphi(0) = 0$. Du reste la petite table suivante donne les meilleurs renseignements sur la variation de $\varphi(t)$:

$t=0$	$\varphi(t)=0.000$
5	$+\ 3.460$
10	$+\ 3.067$
15	$+\ 1.365$
20	$-\ 1.187$
25	$-\ 4.371$
30	$-\ 8.058$
35	-12.164
40	-16.628
45	-21.405
50	-26.461
55	-31.766
60	-37.300

Pour des valeurs de t pas trop petites, ce sont les premiers termes de (7) qui en premier lieu font déterminer la grandeur de $\varphi(t)$. En se bornant à ces termes et en substituant $\log t$ à $\frac{1}{2}\log\left(t^2+\frac{1}{4}\right)$, on obtient approximativement:

$$-2\varphi(t)=t\log t-t(1+\log 2\pi)-\frac{\pi}{4},$$

ou bien

$$-\frac{\varphi(t)}{\pi}=\frac{t}{2\pi}\left(\log\frac{t}{2\pi}-1\right)-\frac{1}{8}, \tag{8}$$

l'erreur commise étant de l'ordre $\frac{1}{t}$.

Cela suffit pour déterminer les racines propres de $C(t)=0$ et de $S(t)=0$. En rappellant que

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=C(t)+iS(t)=me^{i\varphi(t)},$$

on voit que $C(t)=0$ comporte $\cos\varphi(t)=0$, c'est à dire:

$$\pm\varphi(t)=\frac{(2n+1)\pi}{2},$$

tandisque $S(t)=0$ exige que

$$\pm\varphi(t)=n\pi,$$

n étant un nombre entier positif ou négatif ou bien zéro.

Si l'on désigne par β les racines de $C(t)=0$, par γ celles de $S(t)=0$, et qui sont différentes des α, on aura donc, avec une grande approximation, pour les racines positives:

$$\frac{\beta}{2\pi}\left(\log\frac{\beta}{2\pi}-1\right)-\frac{1}{8}=\frac{2n+1}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{\gamma}{2\pi}\left(\log\frac{\gamma}{2\pi}-1\right)-\frac{1}{8}=n. \tag{10}$$

Considérons particulièrement les γ; alors on trouve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 3.5 \quad \text{pour} \quad n=-1,\\
\gamma_2 &= 9.6 \quad \text{»} \quad n=-1,\\
\gamma_3 &= 17.8 \quad \text{»} \quad n=0,\\
\gamma_4 &= 23.2 \quad \text{»} \quad n=1.
\end{aligned}$$

Les γ suivantes correspondent aux nombres successifs $n=2, 3, 4$ etc. On voit par là que le nombre des racines γ qui sont inférieures à une limite donnée N et plus grandes que 10 sera exprimé à peu près par le plus grand nombre entier contenu dans l'expression:

$$\frac{N}{2\pi}\left(\log\frac{N}{2\pi}-1\right)+\frac{7}{8}.$$

Toutes les racines γ ainsi que les β seront évidemment réelles.

Rappelons que M. v. Mangoldt a démontré que le nombre des racines α dont la partie réelle ne surpasse pas N est représenté par l'expression

$$\frac{N}{2\pi}\left(\log\frac{N}{2\pi}-1\right)+\frac{5}{4}\pm\varepsilon,$$

où $\varepsilon<0.34(\log N)^2+1.34\log N+1.33$; il suit de là que les γ et les α (ou les parties réelles de celles-ci) se suivent de très près. — Pour les quinze premières α il arrive que toutes les α sont séparées par les valeurs des γ, mais non par les valeurs des β. Il va sans dire que les β et les γ se suivent alternativement.

Après avoir ainsi trouvé toutes les valeurs de t qui annulent une des fonctions $C(t)$ et $S(t)$ seulement, il est clair que toute autre valeur de t qui fait annuler ou $C(t)$ ou $S(t)$ doit annuler m et sera donc une racine α qui donne aussi bien $C(\alpha) = 0$ que $S(\alpha) = 0$. Notre calcul prouve sans contredit qu'il y à des valeurs de t réelles différentes des γ et qui font changer le signe de $S(t)$. Ces valeurs font donc annuler $S(t)$ et seront des racines véritables de $\xi(t) = 0$. Il est donc certain que les premières α sont réelles.

De l'identité

$$C + iS = e^{2i\varphi}(C - iS)$$

on obtient par différentiation par rapport à t:

$$C' + iS' = e^{2i\varphi}(C' - iS') + 2i\varphi'(C - iS)e^{2i\varphi}. \tag{11}$$

Quand $C = S = 0$, on aura donc:

$$C'(\alpha) + iS'(\alpha) = e^{2i\varphi(\alpha)}\big(C'(\alpha) - iS'(\alpha)\big),$$

d'où:

$$\frac{S'(\alpha)}{C'(\alpha)} = \operatorname{tg}\varphi(\alpha), \tag{12}$$

formule qui m'a fourni un moyen de contrôle sur mon calcul.

Quand $C = 0$, $S \gtrless 0$, $e^{2i\varphi} = -1$, on trouve d'après (11):

$$C'(\beta) = -\varphi'(\beta)S(\beta), \tag{13}$$

tandisque $S = 0$, $C \gtrless 0$, $e^{2i\varphi} = 1$ donne:

$$S'(\gamma) = \varphi'(\gamma)C(\gamma). \tag{14}$$

Quand $t > 7$, $\varphi'(t)$ est toujours négatif; on a donc pour les racines correspondantes le théorème suivant:

$C'(\beta)$ a toujours le même signe que $S(\beta)$; $S'(\gamma)$ a le signe opposé à celui de $C(\gamma)$.

Si donc $C(\gamma)$ conserve le même signe pour deux valeurs consécutives de γ, savoir γ_ν et $\gamma_{\nu+1}$, $S'(\gamma_{\nu+1})$ aura elle-même le même signe que $S'(\gamma)$. Mais comme $S(\gamma_\nu) = S(\gamma_{\nu+1}) = 0$, il faut donc que $S(t)$ ait passé par la valeur zéro

un nombre impair de fois dans cet intervalle. Autrement dit il se trouvera alors un nombre impair de racines réelles α entre γ_ν et $\gamma_{\nu+1}$; il y en aura donc au moins une comprise dans ces limites.

Ce théorème peut rendre de bons services dans la recherche numérique. Pour l'utiliser aussi dans la théorie, il faudrait d'abord trouver une méthode pour déterminer le signe de $C(\gamma)$ sans calcul numérique, mais pour le moment cela paraît assez difficile. Pour les γ dans l'intervalle de 10 à 65, $C(\gamma)$ est toujours positif. Cela tient probablement à ce fait que $C(t)$ dans les plus grandes parties du dit intervalle est positif. Sans doute la raison en est que le premier terme de la somme $\sum_1^n n^{-\frac{1}{2}} \cos(t \log n)$, savoir l'unité positive, produit un surplus en faveur des termes positifs. Si cela est juste, on peut inférer que l'équilibre ne s'établira que peu à peu, de sorte que la même règle sur la répartition des α par rapport aux γ se maintiendra aussi pour les α suivantes les plus rapprochées de α_{15}.

SUR UNE FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALE

PAR

ERNST LINDELÖF
À HELSINGFORS.

1. Dans son Mémoire: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies,* daté de 1823, ABEL a établi la formule suivante[1]:

$$(1)\qquad \sum\varphi(x) = \int\varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + 2\int_0^\infty \frac{\varphi(x+it)-\varphi(x-it)}{2i}\,\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

où $\sum\varphi(x)$ désigne »l'intégrale finie» de la fonction $\varphi(x)$, c'est à dire la solution de l'équation fonctionnelle: $f(x+1)-f(x)=\varphi(x)$. Après y être arrivé, ABEL continue en ces termes: »Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me paraît très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant.» — En fait, l'expression en question avait déjà été trouvée par PLANA en 1820[2].

En 1825 ABEL est revenu sur la formule (1) et en a donné une nouvelle démonstration, dans un Mémoire intitulé: *L'intégrale finie* $\sum^n\varphi(x)$ *exprimée par une intégrale définie simple*[3]. Mais cette démonstration n'indique pas, non plus que la première, les conditions dans lesquelles est applicable la formule dont il s'agit.

Il est assez curieux que le remarquable résultat découvert par PLANA et ABEL ait dû attendre une démonstration rigoureuse jusqu'en 1889, date

[1] *Oeuvres complètes d'Abel* (édition SYLOW-LIE), t. I, p. 23.

[2] *Voir ibid.*, t. II, p. 290.

[3] *Ibid.*, t. I, p. 35.

à laquelle a paru le Mémoire de KRONECKER: *Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale*[1], où la formule (1) se trouve enfin rattachée à la théorie des résidus de CAUCHY qui en constitue l'origine naturelle. Plus tard M. J. PETERSEN[2] a fait connaître quelques applications intéressantes de cette même formule.

Dans un Mémoire, intitulé: *Quelques applications d'une formule sommatoire générale,* qui sera inséré dans le tome XXXI des *Acta societatis scientiarum Fennicæ,* nous avons développé quelques applications nouvelles de la formule (1), à laquelle nous avions d'ailleurs été conduit indépendamment des travaux mentionnés ci-dessus. Sur l'invitation de M. MITTAG-LEFFLER, nous indiquerons brièvement ici quelques-uns des résultats auxquels nous sommes arrivés, renvoyant pour les démonstrations et pour les développements ultérieurs au Mémoire cité.

2. Parmi les applications que comporte la formule (1), il y en a une qui nous paraît particulièrement intéressante et qui concerne le prolongement analytique des séries de TAYLOR

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} \varphi(n) x^n,$$

où φ est une fonction analytique de son argument.

Posons $x = re^{i\theta}$, $z = \tau + it = \rho e^{i\psi}$, $\varphi(\tau \pm it) = p(\tau, t) \pm iq(\tau, t)$, et admettons relativement à la fonction $\varphi(z)$ les hypothèses suivantes:

1° *$\varphi(z)$ est holomorphe pour toute valeur z telle que $\tau > 0$.*

2° *le nombre positif ε étant donné arbitrairement petit, on peut trouver un autre nombre positif R tel que, pour $-\frac{\pi}{2} < \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho > R$, on ait*

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon\rho}.$$

Ces conditions supposées remplies, la fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(0) + H(x) + J(x),$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 105, pp. 345—354.

[2] *Vorlesungen über Funktionentheorie* (Copenhague 1898).

où

$$H(x) = -2\int_0^{\infty}\{p(0, t)\sin(t\log x) + q(0, t)\cos(t\log x)\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

$$J(x) = \int_0^{\infty}\varphi(\tau)x^{\tau}d\tau,$$

et de ces expressions on peut tirer successivement les conclusions suivantes:

(*a*) *La fonction* $H(x)$ *est holomorphe pour* $-2\pi < \theta < 2\pi, r > 0$.

(*b*) *La fonction* $J(x)$ *reste holomorphe dans tout le plan, excepté l'origine, à condition que le point* x *ne vienne pas traverser le segment* $1 \ldots \infty$ *du rayon d'argument* $\theta = 0$, *ni se confondre avec un point de ce segment.*

(*c*) *La fonction* $F(x)$ *est holomorphe à l'intérieur du domaine* T, *formé du plan entier où l'on aura tracé la coupure* $+1 \ldots +\infty$ *suivant l'axe réel.* Ce résultat avait déjà été établi par M. Le Roy[1], mais par une voie beaucoup moins directe.

(*d*) *La fonction* $F(x)$ *tend vers zéro lorsque le point* x *tend vers l'infini avec un argument déterminé, en restant intérieur au domaine* T.

(*e*) *La différence entre une branche quelconque de la fonction* $F(x)$ *et sa branche principale* (celle dont il est question dans le théorème (*c*)) *peut s'exprimer par la somme d'un nombre fini de termes dont chacun est un multiple entier, positif ou négatif, d'une branche de la fonction* $J(x)$. *Les singularités de* $F(x)$ *sont donc toutes comprises parmi celles de* $J(x)$.

Nous allons citer encore un théorème assez général et comportant plusieurs applications intéressantes, dont nous avons développé quelques-unes dans notre Mémoire.

Supposons vérifiées les hypothèses suivantes:

1° $\varphi(z)$ *est holomorphe pour toute valeur* z *telle que* $\tau \geq 0$;

2° *quelque grand que soit l'angle* ψ_0, *on peut trouver un nombre positif* R *tel que* $\varphi(z)$ *soit holomorphe pour* $-\psi_0 < \psi < \psi_0, \rho > R$ (*sauf peut-être à l'infini*);

[1] *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e Série, Tome II, 1900).

3° *quelque grand que soit* ψ_0 *et quelque petit que soit* ε, *on a*

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon\rho} \text{ pour } -\psi_0 < \psi < \psi_0,$$

dès que ρ *dépassera une certaine limite.*

Dans ces conditions, on peut affirmer que la fonction $F(x)$ *ne peut admettre d'autres points singuliers que* 0, 1 *et* ∞ (*le point* 0 *étant en général point singulier pour toute branche de* $F(x)$ *autre que la branche principale*).

3. Nous dirons en second lieu quelques mots sur l'application de la formule (1) à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Comme conséquence immédiate, cette formule entraîne l'égalité

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2\int_0^\infty (1+t^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} t) \frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

et par une petite modification, on en déduit

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} - 2\int_0^\infty \left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} 2t) \frac{dt}{e^{2\pi t}+1}.$$

Ces expressions définissent la fonction $\zeta(s)$ dans tout le plan et en mettent en évidence plusieurs propriétés intéressantes.

Par une autre modification de la formule (1), on arrive à l'égalité

$$\zeta(s) = 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\int_0^\infty \frac{t^{-s}\,dt}{e^{2\pi t}-1},$$

d'où résulte immédiatement le théorème fondamental de Riemann suivant lequel l'expression

$$\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{2}$$

ne change pas de valeur lorsqu'on y substitue $1-s$ à s.

Nous insisterons un peu plus sur l'égalité

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1}$$

$$+ 2n^{-s}\int_0^\infty \left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{t}{n}\right) \frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

qui se déduit également de la formule (1). En développant le dernier terme suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, on trouve

$$(3) \qquad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_1^k T_\nu + R_k,$$

avec

$$T_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{B_\nu}{2\nu} \frac{s(s+1)\ldots(s+2\nu-2)}{1 \cdot 2 \ldots (2\nu-1)} \cdot \frac{1}{n^{s+2\nu-1}},$$

B_ν désignant, comme d'ordinaire, le $\nu^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli. On voit que cette dernière expression de $\zeta(s)$ est précisément celle que fournit la formule sommatoire d'Euler, et le reste R_k peut donc se présenter p. ex. sous la forme

$$R_k = -\frac{s(s+1)\ldots(s+2k+1)}{1 \cdot 2 \ldots (2k+2)} \int_n^\infty \frac{P_{2k+2}(\tau)}{\tau^{s+2k+2}} d\tau,$$

$P_{2k+2}(\tau)$ désignant la fonction périodique à la période 1 qui, pour $0 \leq \tau \leq 1$, se confond avec le polynôme de Bernoulli:

$$P_{2k+2}(\tau) = \tau^{2k+2} - (k+1)\tau^{2k+1} + C_{2k+2}^{(2)} B_1 \tau^{2k} - C_{2k+2}^{(4)} B_2 \tau^{2k-2} + \ldots.$$

En tenant compte des propriétés bien connues de ce polynôme, et en posant $s = x + iy$, on peut tirer de l'expression ci-dessus, pour le module du reste R_k, la limite supérieure suivante:

$$(4) \qquad |R_k| < |s + 2k + 1| \left(\frac{1}{x + 2k + 1} + \frac{1}{2n}\right) |T_{k+1}|.$$

La formule (3) est intéressante sous plusieurs rapports, et surtout parce qu'elle fournit le seul moyen vraiment pratique pour le calcul numérique des valeurs de la fonction $\zeta(s)$. En particulier, on peut s'en servir pour chercher les zéros de $\zeta(s)$ qui sont compris sur la droite D parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point $s = \frac{1}{2}$, et à cet effet on peut profiter de la remarque très simple que voici:

Du théorème de Riemann, on peut conclure que la fonction $\chi(s)$, définie par l'expression (2), prend des valeurs réelles sur la droite D. Pour

un point quelconque s de cette droite, le reste suivant le module 2π de la quantité

$$\Omega = \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s)$$

est donc égal à o ou à π, suivant que $\chi(s)$ est positif ou négatif. Comme $\chi(s)$ ne change évidemment de signe qu'en s'annulant, et comme cette fonction, d'autre part, présente sur la droite en question précisément les mêmes zéros que $\zeta(s)$, on voit dès lors que, pour séparer les zéros de la fonction $\zeta(s)$ compris sur un segment donné de la droite D, on n'aura qu'à calculer, *avec une erreur moindre que* $\frac{\pi}{2}$, la valeur de la quantité Ω pour une suite de points suffisamment rapprochés de ce segment.

Nous nous permettrons de publier ici les résultats numériques[1] que nous avait fournis un calcul de quelques jours entrepris au commencement de l'année, résultats qui sont certes beaucoup moins précis que ceux qu'a fait connaître dernièrement M. Gram[2], mais qui suffisent cependant pour illustrer la méthode que nous venons d'esquisser.

Dans le tableau qui suit, $\xi(y)$ et $\eta(y)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de la quantité $\zeta\left(\frac{1}{2} + iy\right)$, et ω désigne le reste suivant le module 2π (converti en degrés) de la valeur approchée qu'a fournie notre calcul pour la quantité Ω. Les valeurs de $\xi(y)$ et de $\eta(y)$ ont été calculées à l'aide de la formule (3), en y faisant $n = 10$, $k = 1$ et en négligeant le reste.

[1] Nous avions communiqué ces résultats à M. Mittag-Leffler dans une lettre datée du 22 janvier 1902.

[2] *Note sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann* (présentée à l'Académie des Sciences de Copenhague le 7 février 1902; réimprimée ci-dessus, p. 289).

y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	Ω	y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	Ω
12	1.016	−0.744	180° 1′	32	0.86	−0.20	180
13	0.444	−0.656	180° 3′	34	0.52	1.62	0°.2
14	0.021	−0.104	179° 19′	36	2.35	−1.19	−0°.4
14.25	−0.012	0.092	0° 47′	38	0.47	0.56	177
15	0.148	0.706	−0° 1′	40	0.83	−1.03	181°
18	2.331	−0.187	0° 2′	42	1.02	0.42	2
20	0.427	−1.062	−0° 7′	44	−0.05	1.37	182°.3
22	0.718	0.665	179° 53′	46	3.29	−1.46	179°.
24	0.958	−0.585	180° 0′	47	0.24	−1.95	177°.6
26	0.504	1.344	−0° 2′	48	0.07	0.05	−5°.[illegible]
28	2.713	−0.679	−0° 2′	49	0.65	−0.31	−8°.
30	−0.124	−0.598	−0° 3′	50	−0.16	0.42	186°.

A l'aide de l'inégalité (4), on s'assure facilement que la valeur exacte de la quantité désignée par Ω, pour l'un quelconque des arguments y indiqués dans le tableau (excepté $y = 48$), est bien égale à celle des quantités 0° et 180° qui s'écarte le moins de la valeur calculée de ω. Par suite, les chiffres qui précèdent nous permettent d'énoncer ce résultat que *le segment de la droite D qui correspond à l'intervalle* 12—50 *de l'ordonnée* y, *renferme certainement dix zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *dont les ordonnées sont respectivement comprises entre les limites:*

$$14—14.25,\quad 20—22,\quad 24—26,\quad 30—32,\quad 32—34,$$
$$36—38,\quad 40—42,\quad 42—44,\quad 47—49,\quad 49—50.$$

Les zéros une fois séparés, on pourra les calculer avec telle approximation qu'on désire, en prenant dans la formule (3) l'entier n suffisamment grand, et en choisissant convenablement l'entier k.

SUR LES PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES ET SUR UN NOUVEAU PROBLÈME TRÈS GÉNÉRAL

PAR

EMILE BOREL

À PARIS.

1. Beaucoup de problèmes d'Analyse peuvent être ramenés au problème de la détermination des relations linéaires à coefficients entiers qui peuvent exister entre des nombres transcendants; par exemple entre les périodes de certaines intégrales elliptiques ou abéliennes. C'est ainsi que M. Painlevé a ramené plusieurs problèmes de la théorie des équations différentielles au suivant: reconnaître si une certaine intégrale abélienne n'a que deux périodes.[1]

Je ne prétends pas indiquer ici une solution à cette difficile question, qui restera sans doute longtemps encore au dessus des moyens de l'analyse; je voudrais seulement chercher à attirer l'attention des géomètres sur quelques réflexions simples qui sont peut être de nature à suggérer une méthode nouvelle pour aborder toute une classe de problèmes comprenant celui-ci comme cas très particulier.

2. Faisons d'abord quelques remarques générales. Il est évidemment nécessaire que les coefficients constants dont dépendent les périodes considérées soient définis d'une manière précise et non pas connus seulement avec quelque approximation. Or, les seuls nombres connus primitivement d'une manière précise sont les nombres entiers; par une infinité de procédés de nature algébrique ou transcendante, on peut, à l'aide des nombres

[1] Voir par exemple ses *Leçons de Stockholm*.

entiers, définir une infinité d'autres nombres, qui seront, eux aussi, connus d'une manière précise.[1] Nous supposerons que l'on a fait un choix entre ces divers procédés, c'est à dire que l'on en a conservé un nombre limité à l'exclusion des autres. De plus, nous supposerons que l'on a choisi un nombre entier N auquel on supposera inférieurs tous les nombres entiers introduits dans les calculs, et tel de plus que le nombre des opérations d'une nature quelconque que l'on suppose effectuées sur ces nombres entiers, soit inférieur à N. Par exemple, si l'on veut introduire un nombre algébrique, les coefficients et le degré de l'équation qui le définit, seront inférieurs à N, etc.

3. Il est clair que l'on définit ainsi un nombre limité de nombres; avec ces nombres choisis comme coefficients, on peut former un nombre limité d'intégrales elliptiques de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}};$$

et chacune de ces intégrales a seulement deux périodes *principales*, c'est à dire périodes primitives de module minimum.[2] Supposons qu'entre plusieurs de ces périodes convenablement choisies, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$, il y ait des relations linéaires à coefficients entiers de la forme:

$$(1) \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + \ldots + m_q\omega_q = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer que, parmi les relations linéaires où figurent effectivement $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ la relation (1) est celle pour laquelle la somme

$$A = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_q^2$$

a la plus petite valeur. Il y aura ainsi au plus autant de valeurs pour A qu'il y a de manières d'associer les périodes q à q, q étant arbitraire.

[1] Par exemple, on peut définir les nombres e et π par les relations

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad 1 = \int_1^e \frac{dx}{x}.$$

Nous donnons ces exemples simplement à titre d'indication.

[2] Voir, par exemple, JORDAN, Cours d'Analyse, 2^{me} édition, tome II, p. 338.

Dès lors il est clair, que *le nombre N étant donné il y a un nombre limité de valeurs pour A;* nous désignerons la plus grande d'entre elles par $\varphi(N)$; on aura ainsi

$$A < \varphi(N). \tag{2}$$

Si la fonction $\varphi(N)$ était connue, le problème qui consiste à reconnaître s'il peut exister une relation telle que (1) entre des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ se trouverait décomposé en un nombre *limité* de problèmes plus simples: *reconnaître si la relation* (1) *est vérifiée, les nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_q$ étant donnés, et les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ étant définis par des conditions transcendantes.*

4. Si, en calculant avec approximation le premier membre de la relation (1) on trouve que sa valeur est sûrement différente de zéro, on est certain que la relation (1) n'a pas lieu; il n'y a doute que si l'on trouve une valeur de plus en plus voisine de zéro à mesure que l'on pousse plus loin l'approximation.

Il est bien certain que, si la quantité

$$m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q \tag{3}$$

est différente de zéro, on s'en apercevra sûrement au bout d'un nombre limité d'opérations; mais ce nombre limité ne peut pas être fixé d'avance.

Voici ce que l'on peut dire à ce sujet; considérons toujours les quantités ω, en nombre limité, que nous avons définies, et choisissons de toutes les manières possibles les entiers positifs ou négatifs m_i, tels que A soit inférieur à $\varphi(N)$; nous définissons ainsi un nombre limité de quantités (3); si nous désignons par $\psi(N)$ le module de la plus petite d'entre elles, en excluant celles qui sont nulles, on aura sûrement

$$|m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q| \geqq \psi(N)$$

dans le cas où la relation (1) n'est pas satisfaite. Donc *la connaissance des deux fonctions $\varphi(N)$ et $\psi(N)$ permettrait de résoudre sûrement le problème qui nous occupe, par un nombre limité d'opérations, fixé d'avance.*

5. Je ne suis malheureusement pas en état de proposer une méthode qui permette d'obtenir ces deux fonctions; de sorte que les remarques précédentes substituent simplement à un problème très difficile un autre

problème qui ne paraît pas moins difficile. Mais ce nouveau problème me paraît présenter un très grand intérêt en lui même et avoir une portée très générale; c'est ce que je voudrais indiquer ici très brièvement, en omettant les généralisations pour ainsi dire illimitées que l'on pourrait ajouter aux considérations précédentes.

6. Lorsque l'on définit un nombre entier déterminé au moyen de nombres entiers en nombre fini et d'opérations arithmétiques, il est toujours possible de fixer d'avance une limite supérieure du nombre défini en fonction de ceux qui servent à le définir; on peut exprimer ce fait en disant que la *puissance des opérations arithmétiques est connue et limitée.*

Il en est de même pour certains procédés algébriques de nature bien plus compliquée; par exemple si un nombre entier est défini comme étant le quotient incomplet de rang déterminé du développement en fraction continue d'un nombre algébrique donné, on sait limiter ce nombre au moyen des données; à savoir: les coefficients de l'équation qui définit le nombre algébrique, le degré de cette équation et le rang du quotient incomplet.

Ceci peut être étendu, comme je l'ai montré, au cas on l'on adjoint le nombre e au domaine de rationalité.[1]

Dans ces divers cas, il est d'ailleurs évident que l'on doit toujours s'arranger pour définir un nombre unique ou tout au moins des nombres en nombre limité; peu importe, d'ailleurs, le procédé plus ou moins artificiel par lequel cette limitation est obtenue.

Le principe général sur lequel je voudrais attirer l'attention et qui est évident d'après les considérations précédentes, c'est que les divers procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres entiers ont aussi une *puissance limitée;* c'est ainsi que l'on peut traduire le fait de l'existence de la fonction $\varphi(N)$; il faudrait déterminer cette fonction pour limiter effectivement cette puissance; c'est là le problème que je tenais à signaler à cause de son caractère très général et de l'importance qu'il me paraît avoir au point de vue des principes.

Paris, janvier 1902.

[1] Comptes rendus, t. CXXVIII, p. 596 (6 mars 1899).

DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT[1]

PAR

IVAR BENDIXSON

À STOCKHOLM.

Le but du travail est de montrer que l'on peut parvenir à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux, sans avoir recours à la théorie des substitutions, introduite dans l'Algèbre par GALOIS. On peut en effet déterminer les dites conditions par une extension très facile à effectuer des considérations employées par ABEL dans ses deux Mémoires: *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* et *Sur la résolution algébrique des équations.*

Nous étudierons à cette fin les équations telles que chaque racine puisse s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles, chaque équation pouvant en effet être réduite à une telle équation. Par une *fonction rationnelle* de x, nous entendons toujours ici une fonction formée par de seules opérations arithmétiques de x et des quantités $R', \ldots, R^s$ définissant le domaine de rationalité donné.

Soit

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

une telle équation, irréductible dans le domaine de rationalité donné. Ses racines peuvent alors s'écrire

$$\begin{array}{llll}
x_1 & , \theta x_1 & , \ldots, & \theta^{n-1} x_1, \\
\theta_1 x_1 & , \theta\theta_1 x_1 & , \ldots, & \theta^{n-1}\theta_1 x_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\theta_{q-1} x_1 & , \theta\theta_{q-1} x_1 & , \ldots, & \theta^{n-1}\theta_{q-1} x_1,
\end{array}$$

[1] Ce mémoire est une reproduction d'un travail publié en suédois dans les Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar; 1891. N° 3, Stockholm, dont un résumé a été publié dans les Annales de la Faculté de Toulouse, Tome 7.

les fonctions θ_ν désignant des fonctions rationnelles de x, et θ satisfaisant en outre à

$$\theta^\nu \theta x_1 = \theta^{\nu+1} x_1, \qquad \theta^n x_1 = x_1. \qquad (\nu=1,2,\dots)$$

Posons

$$f(x) = (x - x_1)(x - \theta x_1)\dots(x - \theta^{n-1} x_1).$$

D'après un théorème, démontré par Abel dans le premier des mémoires cités, les coefficients de $f(x)$ peuvent alors s'exprimer en fonctions rationnelles de la quantité

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1)\dots(t - \theta^{n-1} x_1),$$

t désignant une constante arbitraire, et cette quantité ψ satisfait à une équation de degré q à coefficients rationnels

(2) $$F_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)]\dots[x' - \psi(t, \theta_{q-1} x_1)] = 0.$$

L'équation (1) de degré qn est donc réduite à une équation de degré q

(3) $$F_1(x') = 0,$$

qui est irréductible (ce que nous prouverons tout à l'heure), et à une équation abélienne

$$f(x) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de l'équation $F_1 = 0$.

Afin de prouver que l'équation (3) est irréductible, il suffit d'observer que, si

$$[x' - \psi(t, \theta_{\nu_1} x_1)][x' - \psi(t, \theta_{\nu_2} x_1)]\dots[x' - \psi(t, \theta_{\nu_s} x_1)],$$

où $s < q$, était une fonction rationnelle, on pourrait en conclure que

$$\psi(t, \theta_{\nu_1} x_1)\psi(t, \theta_{\nu_2} x_1)\dots\psi(t, \theta_{\nu_s} x_1)$$

serait aussi une fonction rationnelle dans le domaine de rationalité donné, et cette dernière fonction est un diviseur de $F(t)$ qui était supposée irréductible.

Si l'on savait maintenant, que l'une des racines de $F_1 = 0$ pouvait s'exprimer en fonction rationnelle d'une autre de ses racines, celles-ci pourraient s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} x_1', \ \lambda x_1', \ \ldots, \ \lambda^{n_1-1} x_1' \\ x_2', \ \lambda x_2', \ \ldots, \ \lambda^{n_1-1} x_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{q_1}', \ \lambda x_{q_1}', \ \ldots, \ \lambda^{n_1-1} x_{q_1}' \end{array}\right| \quad (q_1 n_1 = q),$$

où λ est une fonction rationnelle telle que l'on ait $\lambda^{n_1} x_1' = x_1'$. On pourrait alors, de la même manière que nous l'avons fait pour $F = 0$, réduire $F_1 = 0$ à une équation de degré q_1

$$F_2(x'') = 0$$

et une équation abélienne du degré n_1

$$f_1(x') = (x' - x_1')(x' - \lambda x_1') \ldots (x' - \lambda^{n_1-1} x_1') = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de F_2.

Dans ce cas il existe donc une fonction rationnelle θ_1 telle que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda\psi(t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \psi(t, \theta_1\theta x_1) &= \lambda\psi(t, \theta x_1) \\ &= \psi(t, \theta_1 x_1). \end{aligned}$$

Mais t étant une quantité indéterminée les facteurs du membre gauche seront identiques à ceux du membre droit, ce qui fait voir qu'il existe un nombre entier α tel que l'on ait

$$(4) \qquad \theta_1\theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

De l'autre côté, on voit que, si cette dernière équation a lieu, on en tire

$$\psi(t, \theta_1\theta x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

Or l'équation (1) étant irréductible on en conclut que

$$\psi(t, \theta_1\theta^\nu x_1) = \psi(t, \theta_1\theta^{\nu-1} x_1) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1\theta^\nu x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1). \qquad (\nu = 1, 2, 3$$

L'équation

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \frac{1}{n}[\psi(t, \theta_1 x_1) + \psi(t, \theta_1 \theta x_1) + \ldots + \psi(t, \theta_1 \theta^{n-1} x_1)],$$

nous prouve alors que $\psi(t, \theta_1 x_1)$ est une fonction symétrique de

$$x_1, \theta x_1, \ldots, \theta^{n-1} x_1,$$

c'est à dire est une fonction rationnelle de $\psi(t, x_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines de

$$F_1(x') = 0$$

puisse être exprimée en fonction rationnelle d'une autre de ces racines, c'est donc qu'il existe un tel nombre α que l'on ait

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

Supposons maintenant que l'équation (4) soit satisfaite. On saura donc que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1) \qquad (\text{où } \lambda^{n_1} x_1' = x_1').$$

L'irréductibilité de l'équation (1) nous donnera aussi

$$\psi(t, \theta_1^2 x_1) = \lambda^2 \psi(t, x_1)$$

et en général

$$\psi(t, \theta_1^\nu x_1) = \lambda^\nu \psi(t, x_1).$$

On en conclut que

$$\psi(t, \theta_1^{n_1} x_1) = \psi(t, x_1)$$

ou que

$$\theta_1^{n_1} x_1 = \theta^k x_1 \qquad k = \text{ nombre entier } < n$$

ce qui est donc encore une conséquence de l'équation (4).

Envisageons maintenant l'équation (2). Si l'équation (4) a lieu, cette équation peut se réduire à une équation abélienne de degré n_1

$$f_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)] \ldots [x' - \psi(t, \theta_1^{n_1-1} x_1)] = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$[illegible] = (t_1 - x_1')(t_1 - \lambda x_1') \ldots (t_1 - \lambda^{n_1-1} x_1')$$

$$= [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi(t, \theta_1 x_1)] \ldots [t_1 - \psi(t, \theta_1^{n_1-1} x_1)] = \psi_1(t_1, t, x_1),$$

laquelle expression est elle-même racine d'une équation

(5) $$F_2(x'') = 0$$

de degré q_1 à coefficients rationnels.

Les autres racines de l'équation (5) seront alors données par les fonctions $\psi_1(t_1, t, \theta_\nu x_1)$.

La condition *nécessaire*, pour qu'une autre racine de l'équation (5) soit une fonction rationnelle $\mu(x_1')$ de x_1'', est donc qu'il existe une fonction $\theta_2 x_1$ telle que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, \theta x_1).$$

A l'aide de l'équation (4) on prouve aisément que

$$\psi_1(t_1, t, \theta x_1) = \psi_1(t_1, t, x_1)$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).$$

Or la quantité t_1 étant complètement indéterminée, il s'en suit que la fonction

$$\psi(t, \theta_2\theta x_1)$$

sera égale à l'une des fonctions

$$\psi(t, \theta_2 x_1)\ ,\ \psi(t, \theta_1\theta_2 x_1)\ ,\ \ldots,\ \psi(t, \theta_1^{n_1-1}\theta_2 x_1).$$

Soit, pour fixer les idées,

$$\psi(t, \theta_2\theta x_1) = \psi(t, \theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1).$$

Le fait que t est une quantité indéterminée, met alors en évidence que

$$\theta_2\theta x_1$$

sera égal à l'une des quantités

$$\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1\ ,\ \theta\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1\ ,\ \ldots,\ \theta^{n-1}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1.$$

On en conclut enfin, qu'il existe un nombre α_2 tel que

(6) $$\theta_2\theta x_1 = \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1.$$

Mais de l'autre côté on aura aussi

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2\theta_1x_1) &= \mu\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_1x_1\\ &= \mu\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_1)\\ &= \psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2x_1)\end{aligned}$$

et cette équation nous conduit, par des considérations tout analogues à celles développées ci-dessus, à une relation

$$\theta_2\theta_1x_1 = \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2x_1. \tag{6'}$$

Dans les équations (6) et (6') nous avons donc obtenu les conditions *nécessaires*, pour qu'une racine de l'équation (5) soit une fonction rationnelle de x_1''.

Afin de prouver que ces deux équations constituent en même temps les conditions suffisantes, pour que cela ait lieu, nous envisageons de nouveau la fonction $\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2x_1)$.

Les équations (6) et (6') conduisent évidemment à

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2\theta x_1) &= \psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2x_1)\\ &= \psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_1^{\beta_2}\theta_2x_1)\\ &= \psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2x_1).\end{aligned}$$

On en conclut qu'on aura en général

$$\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2\theta^\nu x_1) = \psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2\theta^{\nu-1}x_1) \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

ou que

$$\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2\theta^\nu x_1) = \psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2x_1). \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

En appliquant le théorème déjà cité d'Abel on sait alors que

$$\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2x_1) = R(\psi(t\,,\,x_1)),$$

R désignant une fonction rationnelle.

De la même manière on prouve aussi que

$$\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2\theta_1x_1) = \psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2x_1),$$

ce qui nous donne

$$R(\psi(t\,,\,\theta_1 x_1)) = R(\psi(t\,,\,x_1))$$

et en général

$$R(\psi(t\,,\,\theta_1^\nu x_1) = R(\psi(t\,,\,x_1)).$$

On en conclut que la fonction

$$\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2 x_1) = \frac{1}{n_1}\left| R(\psi(t\,,\,x_1)) + R(\psi(t\,,\,\theta_1 x_1)) + \ldots + R(\psi(t\,,\,\theta_1^{n_1-1} x_1))\right|$$

est une fonction symétrique de $\psi(t\,,\,x_1)\,,\ \psi(t\,,\,\theta_1 x)\,,\,\ldots\,,\ \psi(t\,,\,\theta_1^{n_1-1} x_1)$, c'est à dire une fonction rationnelle de $\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_1)$. c. q. f. d.

En continuant ainsi on parvient au théorème que voici:

Etant donnée une équation dont chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle $\theta_\nu x_1$ *de l'une d'entre elles* x_1, *si entre les fonctions* $\theta_\nu x_1$ *les relations suivantes ont lieu*

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{ll}
\theta_1 x_1 & = \theta^{\alpha_1}\theta_1 x_1\,, \\
\theta_2 \theta x_1 & = \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1\,, \\
\theta_2 \theta_1 x_1 & = \theta^{\alpha'_2}\theta_1^{\beta'_2}\theta_2 x_1\,, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta_\nu \theta x_1 & = \theta^{\alpha_\nu}\theta_1^{\beta_\nu}\ldots\theta_{\nu-1}^{k_\nu}\theta_\nu x_1\,, \\
\theta_\nu \theta_1 x_1 & = \theta^{\alpha'_\nu}\theta_1^{\beta'_\nu}\ldots\theta_{\nu-1}^{k'_\nu}\theta_\nu x_1\,, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta_\alpha \theta_{\alpha-1} x_1 & = \theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}}\theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}}\ldots\theta_{\nu-1}^{k_\nu^{\nu-1}}\theta_\nu x_1\,, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

l'équation donnée se réduit alors à une suite d'équations abéliennes, et elle est par conséquent résoluble par radicaux

Inversement, si l'équation donnée se réduit à une suite d'équations abéliennes, ses racines sont nécessairement liées entre elles par un système d'équations de la forme (7).

Jusqu'ici nous n'avons employé que les considérations dont s'est servi ABEL dans le premier des Mémoires mentionnés, et l'on voit que l'on trouve par ces considérations seules, la classe la plus générale d'équations qui peuvent se réduire à une suite d'équations abéliennes.

Il nous reste à prouver que l'ensemble des équations (7) forme la condition nécessaire pour que l'équation (1) soit résoluble par radicaux.

Afin d'y parvenir, nous ferons usage des considérations du second Mémoire cité d'ABEL.

Nous avons supposé de l'équation (1) qu'elle soit résoluble algébriquement. Une de ses racines peut alors s'écrire

$$x_1 = \varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_q),$$

où $R', \ldots, R^s$ désignent les quantités qui définissent le domaine de rationalité donné, et où les quantités V_ν satisfont aux équations suivantes

$$V_1^{p_1} - \varphi_1(R', \ldots, R^s) = 0,$$

$$V_2^{p_2} - \varphi_2(R'_1, \ldots, R^s, V_1) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_q^{p_q} - \varphi_q(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0,$$

les $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$, φ désignant des fonctions rationnelles de $R', \ldots, R^s$, et des fonctions entières rationnelles de $V_1, \ldots, V_q$ de degré $p_1 - 1, \ldots, p_q - 1$. Je suppose ici, que l'on ait adjoint au domaine de rationalité donné les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_q$ qui satisfont à

$$\omega_\nu^{p_\nu - 1} + \omega_\nu^{p_\nu - 2} + \ldots + \omega_\nu + 1 = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

que l'équation

$$V_\nu^{p_\nu} - \varphi_\nu(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}) = 0$$

soit irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}$, et que les p_ν soient des nombres premiers.

En mettant $\omega_q V_q$ en φ au lieu de V_q, on obtient une nouvelle racine, ce qui nous donne

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q V_q) = \theta\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, V_q),$$

et en général

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q^\nu V_q) = \theta^\nu x_1.$$

Observons que l'on a

$$\theta^{p_q} x_1 = x_1,$$

et formons maintenant

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1), \ldots, (t - \theta^{p_q - 1} x_1) = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}),$$

où nous supposons pour plus de simplicité, que V_{q-1} soit réellement contenue en H.

En mettant $\omega_{q-1} V_{q-1}$ au lieu de V_{q-1} dans les équations ci-dessus, la fonction V_q se change en $\overline{V}_q$ et l'on obtient une racine

$$x_2 = \varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1}, \overline{V}_q)$$

de l'équation (1).

On aura alors

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1}, \omega_q^\nu \overline{V}_q) = \theta^\nu x_2.$$

Comme

$$\psi(t, x_2) = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1})$$

est différent de $\psi(t, x_1)$, il faut que x_2 soit une racine différente de tous les $\theta^\nu x_1$. Écrivons donc

$$x_2 = \theta_1 x_1.$$

En mettant

$$y_\nu = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu-1} V_{q-1}), \qquad \nu = 1, \ldots, p_{q-1}.$$

chaque fonction cyclique de $y_1, \ldots, y_{p_{q-1}}$ est indépendante de V_{q-1}. L'équation

$$(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_{p_{q-1}}) = 0$$

sera donc une équation abélienne dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s$, $V_1, \ldots, V_{q-2}$, ce qui nous permet d'affirmer que

$$(8) \qquad y_2 = \overline{\lambda}(y_1, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}),$$

$\overline{\lambda}$ désignant une fonction rationnelle.

Mais l'équation

$$H(x, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0$$

est évidemment irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s$, $V_1, \ldots, V_{q-1}$, ce que l'on prouve aisément, en observant que $V_q^{p_q} - \varphi_q$ est

irréductible dans ce domaine, et que p_q est un nombre premier. L'équation (8), qui peut être écrite

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}],$$

a donc pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, \theta x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}] = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

De cette dernière relation on conclut enfin que l'on a

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^c \theta_1 x_1 .$$

Les développements de la page 320 nous permettent alors d'affirmer que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1),$$

λ désignant une fonction rationnelle de $R', \ldots, R^s, t, x_1$. De l'équation

$$y_2 = \lambda(y_1)$$

on conclut en outre que

$$y_3 = \lambda(y_2)$$

et ainsi de suite, de sorte que l'on obtient

$$\lambda^{p_q-1}(y_1) = y_1,$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1^{p_q-1} x_1) = \psi(t, x_1)$$

ou que

$$\theta_1^{p_q-1} x_1 = \theta^k x_1, \qquad k = \text{ nombre entier.}$$

Mettons maintenant $\omega_{q-2} V_{q-2}$ au lieu de V_{q-2} dans les expressions de φ et de H. La fonction V_{q-1} se change en $\overline{V}_{q-1}$, x_1 en x_3 et l'équation

$$H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}, \omega_{q-1} V_{q-1}) = \lambda[H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2} V_{q-1})]$$

se change en

$$\begin{aligned} & H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1} \overline{V}_{q-1}) \\ & = \lambda[H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \overline{V}_{q-1})] \\ & = \lambda \psi(t, x_3) \\ & = \psi(t, \theta_1 x_3) \end{aligned}$$

On aura de la même manière

$$\begin{aligned}&H(t\,,\,R'\,,\,\ldots\,,\,R^s\,,\,V_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_{q-2}V_{q-2}\,,\,\omega_{q-1}^2\overline{V}_{q-1})\\ &=[H(t\,,\,R'\,,\,\ldots\,,\,R^s\,,\,V_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_{q-2}V_{q-2}\,,\,\omega_{q-1}\overline{V}_{q-1})]\\ &=\lambda^2\phi(t\,,\,x_3)\\ &=\phi(t\,,\,\theta_1^2x_3)\end{aligned}$$

et en général

$$H(t\,,\,R'\,,\,\ldots\,,\,R^s\,,\,V_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_{q-2}V_{q-2}\,,\,\omega_{q-1}^\nu\overline{V}_{q-1})=\phi(t\,,\,\theta_1^\nu x_3).$$

Formons enfin la fonction

$$\begin{aligned}\phi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_1)&=[t_1-\phi(t\,,\,x_1)][t_1-\phi_1(t\,,\,\theta_1x_1]\ldots[t_1-\phi_1(t\,,\,\theta_1^{p_{q-1}-1}x_1)]\\ &=H_1(t_1\,,\,t\,,\,R'\,,\,\ldots\,,\,R^s\,,\,V_1\,,\,\ldots\,,\,V_{q-2})\end{aligned}$$

où nous supposerons pour plus de simplicité, que la fonction V_{q-2} soit réellement contenue dans H_1.

On aura alors

$$\phi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_3)=H_1(t_1\,,\,t\,,\,R'\,,\,\ldots\,,\,R^s\,,\,V_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_{q-2}V_{q-2}).$$

Les fonctions $\phi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_3)$ et $\phi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_1)$ n'étant alors pas identiques, il s'en suit que x_3 est une racine différente de tous les

$\theta^\alpha\theta_1^\beta x_1$, $\alpha\,,\,\beta$ désignant des nombres entiers.

Mettons

$$x_3=\theta_2x_1$$

et envisageons une fonction cyclique des quantités

$$\phi(t_1,t\,,\,\theta_2^\nu x_1)=H_1(t_1\,,\,t\,,\,R'\,,\,\ldots,\,R^s,\,V_1\,,\,\ldots,\,\omega_{q-2}^\nu V_{q-2}),\quad \nu=0,\,1,\,\ldots,p_{q-2}-1,$$

on sait qu'une telle fonction est une fonction rationnelle de $R'\,,\,\ldots\,,\,R^s$, $V_1\,,\,\ldots\,,\,V_{q-3}$, ce qui fait voir que les quantites $\phi(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2^\nu x_1)$ sont les racines d'une équation abélienne à coefficients rationnelles en $R'\,,\,\ldots\,,\,R^s$, $V_1\,,\,\ldots\,,\,V_{q-3}$.

On aura donc

$$(9)\qquad \phi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2x_1)=\mu\big(\phi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_1)\,,\,R'\,,\,\ldots\,,\,R^s\,,\,V_1\,,\,\ldots\,,\,V_{q-3})\big).$$

μ désignant une fonction rationnelle.

Or chaque fonction $H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1})$ étant irréductible dans le domaine $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}$, on conclut que la fonction

$$\prod_{\nu=1}^{p_q-1} H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1}) = H_1(0, t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2})$$

est irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}$. L'équation (9) est par conséquent satisfaite si l'on y remplace x_1 par l'une quelconque des racines $\theta^{\alpha}\theta_1^{\beta} x_1$.

On aura alors

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) &= \mu\big(\psi_1(t_1, t, \theta x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-3}\big)\\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).\end{aligned}$$

D'une manière analogue on obtient

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta_1 x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).$$

Ces deux équations mettent en évidence que les équations (6) et (6') ont lieu.

Les autres relations (7) se démontrent d'une manière analogue, et l'on peut enfin affirmer qu'elles constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F(x)$ soit résoluble algébriquement.

Ces équations (7) sont évidemment identiques à celles que l'on obtient par la méthode de Galois.

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES

PAR

W. KAPTEYN

à UTRECHT.

En désignant par y une fonction algébrique de la variable x, définie par l'équation algébrique irréductible

$$\varphi(x, y) = 0$$

Abel a démontré que, si l'intégrale $\int y dx$ est elle-même une fonction algébrique de x, elle est exprimable par une fonction entière en y dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x. Dans les pages suivantes nous nous proposons de faire une application de ce théorème remarquable qui compte avec quelques autres théorèmes de l'éminent mathématicien Norwégien, parmi les sources les plus fertiles du calcul intégral.

1. Supposons que l'équation $\varphi(x, y) = 0$ se réduise à la forme

$$y^q = F(x) \tag{1}$$

q étant un nombre entier et $F(x)$ une fonction rationnelle de x; dans ce cas le théorème cité nous apprend que, si l'intégrale $\int y dx$ est une fonction algébrique, on aura

$$\int y dx = y f(x) + \text{ const.} \tag{2}$$

où $f(x)$ représente une fonction rationnelle de x. Évidemment l'équation (2) ne sera pas remplie si l'on choisit pour $F(x)$ la fonction rationnelle

la plus générale. Cherchons donc la forme la plus générale de $F(x)$ qui s'accorde avec la condition (2). Pour y parvenir, différentions les équations (1) et (2) et eliminons $\frac{dy}{dx}$. De cette manière on obtient

$$\tag{3} \frac{q\left(1-\frac{df(x)}{dx}\right)}{f(x)}=\frac{\frac{dF(x)}{dx}}{F(x)}$$

ou

$$\tag{3'} \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{q}\frac{d}{dx}\lg\left[f(x)^q F(x)\right].$$

Posons, dans cette équation pour $f(x)^q F(x)$ la fonction rationnelle la plus générale

$$\begin{aligned} f(x)^q F(x) &= B(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\,..\,(x-a_l)^{\alpha_l} \\ &= \prod_1^{i=l}(x-a_i)^{\alpha_i} \end{aligned}$$

où B, $a_1, a_2, .., a_l$ représentent des constantes arbitraires et $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_l$ des nombres entiers positifs ou négatifs. En substituant cette valeur dans l'équation (3) celle-ci se réduira à

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=l}\frac{\alpha_i}{x-a_i}=\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}$$

qui fera connaître la forme la plus générale de $f(x)$ s'accordant avec la forme adoptée pour $f(x)^q F(x)$. Cela posé, l'équation (3) donne la forme cherchée de la fonction $F(x)$.

En effet, on aura

$$\frac{d}{dx}\lg F(x)=q\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}+q\frac{d}{dx}\lg\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}$$

ou, par intégration

$$F(x)=C^q\left(\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}\right)^q\prod_{i=1}^{i=l}(x-a_i)^{qA_i},$$

C^q désignant une constante arbitraire.

De cette discussion il résulte que si y satisfait à une équation de la forme (1) et si la fonction $\int y dx$ est algébrique, y doit admettre la forme

$$(4) \qquad y = C \sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x - a_i} \prod_{i=1}^{i=l} (x - a_i)^{A_i}$$

où qA_i représente un nombre entier.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante, car si y admet la forme précédente, on aura

$$(5) \qquad \int y dx = C \prod_{i=1}^{i=l} (x - a_i)^{A_i}.$$

2. D'après les considérations précédentes, pour savoir si l'intégrale $\int y dx$, où y satisfait à une équation (1), est algébrique, on n'a qu'à examiner si y est réductible à la forme (4) ou non.

C'est ce que nous allons faire pour l'expression binôme

$$(6) \qquad y = (x - \alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^p$$

en supposant

1° que l'équation

$$(7) \qquad \beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n = 0$$

n'admet que des racines inégales $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2° que α est une constante différente de ces racines;

3° que m et n sont des nombres entiers, dont le dernier est positif;

4° que p est un nombre fractionnaire, dont le dénominateur est le nombre entier q.

D'après ces suppositions on voit que l'expression (6) satisfait à une équation de la forme (1).

Comme les quantités a_i dans la formule (4) sont toutes différentes, supposons qu'ils contiennent les racines de l'équation (7) et encore une série $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_l$ d'autres.

En identifiant maintenant la fonction (6) avec

$$C\left(\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right)$$
$$\times (x - a_1)^{A_1} (x - a_2)^{A_2} \ldots (x - a_n)^{A_n} (x - a_{n+1})^{A_{n+1}} \ldots (x - a_l)^{A_l}$$

il est évident que cette expression doit rester invariable quand on permute les racines $a_1, a_2, \dots, a_n$ de toutes les manières possibles.

Il s'ensuit qu'on doit avoir

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n.$$

Or, parce que

$$\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n = \lambda(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$$

on aura

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n} = \frac{d}{dx} \lg(\beta + \gamma x + \dots + \gamma x^n);$$

par suite la forme précédente se réduira à

$$\frac{C}{\lambda^{A_1}} \left[A_1 \frac{\gamma + 2\delta x + \dots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \dots + \frac{A_l}{x - a_l} \right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n)^{A_1} (x - a_{n+1})^{A_{n+1}} \dots (x - a_l)^{A_l}.$$

Cette forme ne saurait être identique avec la fonction (6) à moins que

$$A_1 = 1 + p.$$

En effet, on voit d'abord que A_1 doit être différent de zéro, parce que dans le cas contraire les deux membres de l'identité supposée ne présenteraient pas les mêmes points critiques. On trouvera donc

$$(x - \alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{A_1}} \left[A_1 \frac{\gamma + 2\delta x + \dots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \dots + \frac{A_l}{x - a_l} \right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n)^{A_1 - p - 1} (x - a_{n+1})^{A_{n+1}} \dots (x - a_l)^{A_l}.$$

Remarquons ensuite, que le premier membre de cette équation est indépendant de $a_1, a_2, \dots, a_n$; il faut donc que l'ordre $A_1 - p - 1$ des zéros ou des poles $a_1, a_2, \dots, a_n$ du second membre soit aussi zéro. En introduisant cette égalité, l'équation précédente s'écrit

$$(x - \alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left[(1 + p) \cdot \frac{\gamma + 2\delta x + \dots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + \dots + \frac{A_l}{x - a_l} \right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n)(x - a_{n+1})^{A_{n+1}} \dots (x - a_l)^{A_l}.$$

Le premier membre étant ici une fonction rationnelle, les quantités $A_{n+1}, \ldots, A_l$ doivent représenter des nombres entiers; et comme le premier membre admet un zéro ou un pôle d'ordre m, selon que m est un nombre positif ou négatif, il faut que le second membre présente le même caractère.

Posons, pour satisfaire à la dernière condition

$$a_{n+1} = \alpha$$

et

$$A_{n+1} \neq 0.$$

Dans cette supposition on aura

$$A_{n+1} = 1 - m.$$

Si, au contraire $A_{n+1} = 0$, le second membre ne saurait admettre le point α comme pôle, tandis qu'un zéro d'ordre m ne serait pas impossible. Il faut donc distinguer deux cas et examiner sous quelles conditions les identités suivantes peuvent exister.

$$(\mathrm{I}) \quad 1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left[(1+p) \frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l} \right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x-\alpha)(x - a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x - a_l)^{A_l}$$

et

$$(\mathrm{II}) \quad (x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left[(1+p) \frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l} \right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x - a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x - a_l)^{A_l}$$

m étant un nombre positif dans la dernière de ces équations. Comme les premiers membres de ces équations ne présentent plus de zéros ou de pôles dans les points $a_{n+2}, \ldots, a_l$, il faut que l'ordre des zéros ou des pôles $a_{n+2}, \ldots, a_l$ dans les seconds membres soit aussi zéro.

Par suite

$$A_{n+2} - 1 = \ldots = A_{l-1} = 0.$$

Si donc on pose

$$(x - a_{n+2}) \ldots (x - a_l) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i$$

les équations (I) et (II) se réduisent aux suivantes

$$(8)\qquad 1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\Big[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \,.\,.\, + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \,.\,.\, + \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha}$$

$$+ \frac{ix^{i-1} + (i-1)A_1x^{i-2} + \,.\,.\, + A_{i-1}}{x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i}\Big]$$

$$\times (\beta + \gamma x + \,.\,.\, + \lambda x^n)(x-\alpha)(x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i)$$

et

$$(9)\qquad (x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\Big[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \,.\,.\, + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \,.\,.\, + \lambda x^n}$$

$$+ \frac{ix^{i-1} + (i-1)A_1x^{i-2} + \,.\,.\, + A_i}{x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i}\Big]$$

$$\times (\beta + \gamma x + \,.\,.\, + \lambda x^n)(x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i).$$

La discussion précédente suppose que le polynôme $x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i$ n'admet que des racines simples $a_{n+2}, \,.\,.\,, a_i$ différentes de $a_1, a_2, \,.\,.\,, a_n$ et α. Or, l'équation (8) ne saurait être remplie par un polynôme

$$x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i$$

à racines multiples. En effet pour une telle racine ce polynôme et sa dérivée s'évanouissant simultanément, le second membre se réduirait à zéro ce qui serait absurde.

De même ce polynôme ne saurait admettre une racine simple $a_1, a_2, \,.\,.\,, a_n$. Quant à l'équation (9) il est également impossible que le polynôme admettrait une racine multiple différente de α, ou les racines simples $a_1, a_2, \,.\,.\,, a_n$.

On conclura donc que l'intégrale $\int y\,dx$ étant algébrique, il doit être possible de satisfaire à une des équations (8) ou (9) par un polynôme $x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i$ ne contenant point de racine α.

Réciproquement, si la condition (8) est vérifiée, l'intégrale s'écrit d'après (5)

$$(10)\qquad \int y\,dx = \frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \,.\,.\, + \lambda x^n)^{1+p}(x-\alpha)^{1+m}(x^i + A_1x^{i-1} + \,.\,.\, + A_i)$$

et, si la condition (9) est remplie

$$(11) \qquad \int y\,dx = \frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots + \gamma x^n)^{1+p}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i).$$

3. En appliquant la méthode précédente au cas ordinaire

$$y = x^m(a + bx^n)^p$$

on obtiendra aisément les résultats suivants.

L'intégrale $\int y\,dx$ sera seulement algébrique dans les deux cas suivants

1° si

$$\frac{m+1}{n} + p = -1 - r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et alors

$$\int y\,dx = \frac{x^{1+m}}{(1+m)a}(a + bx^n)^{1+p}\Big[\frac{n}{m+1+rn}\cdot\frac{2n}{m+1+(r-1)n}\cdots\frac{rn}{m+1+n}\frac{b^r}{a^r}x^{nr}$$

$$+ \frac{2n}{m+1+(x-1)n}\cdots\frac{rn}{m+1+n}\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}}x^{n(r-1)} + \ldots + 1\Big]$$

2° si

$$\frac{m+1}{n} = 1 + r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et alors

$$\int y\,dx = \frac{1}{n(1+p+r)b}(a + bx^n)^{1+p}\Big[x^{rn} - \frac{r}{p+r}\cdot\frac{a}{b}x^{(r-1)n}$$

$$+ \frac{r-1}{p+r-1}\cdot\frac{r}{p+r}\frac{a^2}{b^2}x^{(r-2)n} - \ldots + (-1)^r\frac{1}{p+1}\cdot\frac{2}{p+2}\cdots\frac{r}{p+r}\frac{a^r}{b^r}\Big].$$

4. En supposant

$$y = x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p$$

on trouvera que l'intégrale est seulement algébrique en trois cas. Les résultats sont ici plus compliqués et se présentent sous les formes suivantes.

1° Si

$$\frac{m+1}{n} + 2p = -2 - r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

et si les $r+1$ équations linéaires à r inconnues

$$ncA_n + (1+p)nb = 0,$$

$$2ncA_{2n} + (2+p)nbA_n - (1+m+rn)a = 0,$$

$$3ncA_{3n} + (3+p)nbA_{2n} - [1+m+(r-1)n]aA_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$rncA_{rn} + (r+p)nbA_{(r-1)n} - (1+m+2n)aA_{(r-2)n} = 0,$$

$$(1+r+p)nbA_{rn} - (1+m+n)aA_{(r-1)n} = 0$$

sont compatibles, on aura

$$\int y\,dx = \frac{1}{(1+m)aA_{rn}}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}x^{1+m}(x^{rn}+A_nx^{(r-1)n}+\ldots+A_{rn}).$$

2° Si

$$\frac{m+1}{n} = 2+r \qquad (r=1,2,3,\ldots)$$

et si les $r+1$ équations linéaires à r inconnues

$$(2p+r+1)cA_n + (p+r+1)b = 0,$$

$$(2p+r)cA_{2n} + (p+r)bA_n + ra = 0,$$

$$(2p+r-1)cA_{3n} + (p+r-1)bA_{2n} + (r-1)aA_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(2p+2)cA_{rn} + (p+2)bA_{(r-1)n} + 2aA_{(r-2)n} = 0,$$

$$(p+1)bA_{rn} + aA_{(r-1)n} = 0$$

sont compatibles, on aura

$$\int y\,dx = \frac{1}{(2p+r+2)n}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}(x^{rn}+A_nx^{(r-1)n}+\ldots+A_{rn}).$$

3° Si

$$p = -\frac{2k+1}{2}, \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

$$m = k_1n - 1, \qquad (k_1=1,2,\ldots,2k)$$

$$r = 2k - 1$$

on aura

$$\int y\,dx = \frac{C}{c^{1+p}}(a + bx^n + cx^{2n})^{1+p}(x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots + A_{rn})$$

où les quantités $\frac{C}{c^{1+p}}, A_n, A_{2n}, \ldots, A_{rn}$ satisfont aux $r + 1$ équations linéaires, dont tous les seconds membres à l'exception d'un seul, sont zéro

$$-cA_n + \frac{r}{2}b = 0,$$

$$-2cA_{2n} + \left(\frac{r}{2} - 1\right)bA_n + ra = 0,$$

$$-3cA_{3n} + \left(\frac{x}{2} - 2\right)bA_{2n} + (r - 1)aA_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-(r - k_1 + 2)cA_{(r-k_1+2)n} + \left(-\frac{r}{2} + k_1 - 1\right)bA_{(r-k_1+1)n} + k_1 aA_{(r-k_1)n} = \frac{c^{1+p}}{nC},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-rcA_{rn} + \left(\frac{r}{2} - r + 1\right)bA_{(r-1)n} + 2aA_{(r-2)n} = 0,$$

$$-\frac{r}{2}bA_{rn} + aA_{(r-1)n} = 0.$$

Pour plus de détails nous renverrons à notre mémoire sur ce sujet, inséré dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences d'Amsterdam, 2[e] série, t. 17, p. 92.

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES D'ABEL

PAR

M. LERCH

À FRIBOURG (SUISSE).

Dans les Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin pour l'année 1885 WEIERSTRASS a démontré un théorème auquel on attribue une grande importance, à savoir que toute fonction continue d'une variable réelle peut, pour toutes les valeurs de cette variable contenues dans un intervalle fini, être représentée par une série uniformément convergente dont les termes sont des fonctions entières.

Présenté sous sa forme la plus simple ce théorème n'a apporté rien de nouveau à ceux qui avaient accepté sans critique la méthode d'interpolation pour les fonctions arbitraires. Mais cette dernière méthode n'étant pas établie avec une rigueur suffisante, le théorème de WEIERSTRASS signifie un grand progrès dans la théorie de la représentation analytique des fonctions, malgré la circonstance que sa méthode paraît échapper à la pratique.

Dans deux notes qui ont paru dans les mémoires de l'Académie de Prague[1] j'ai fait usage du théorème de WEIERSTRASS pour établir un théorème fondamental de la théorie des fonctions génératrices d'ABEL, définies par les intégrales de la forme

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx, \tag{1}$$

[1] Rozpravy české Akademie, 2e classe, T. I, no 33 (1892) et T. II, no 9 (1893).

la fonction (déterminante) $\varphi(x)$ étant supposée indépendante de la quantité a. Dans son mémoire posthume[1] le grand géomètre ne s'est pas borné à cette forme spéciale des fonctions génératrices, mais c'est cependant elle qui avait surtout attiré l'attention des géomètres. Nous verrons qu'à une fonction génératrice donnée ne corresponde pas toujours une fonction déterminante, mais notre attention est consacrée surtout à la question si, lorsque la déterminante existe, elle soit unique. C'est en effet cette question qui paraît la plus importante pour les applications et nous avons démontré, dans les notes citées, que la réponse est affirmative.

Mais l'équation en question

$$(2) \qquad \int_0^{r} e^{-ax}\varphi_1(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-ax}\varphi_2(x)dx$$

revenant à la suivante

$$(2^0) \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax}\varphi(x)dx = 0$$

où $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, nous sommes amenés à la question quand l'intégrale $J(a)$ s'annule. Nous verrons que si l'équation $J(a) = 0$ est satisfaite par une infinité de valeurs positives de a qui forment une suite arithmétique $a = b + km$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, on aura en général $\varphi(x) = 0$, une exception ne pouvant se présenter que pour des valeurs de x qui constituent un certain ensemble intégrable. C'est de ce théorème général que résulte l'impossibilité de mettre sous la forme (1) les fonctions

$$\sin ka\,,\ \cos ka\,,\ \frac{1}{\Gamma(b-ka)}\,,\ (k > 0)\,,$$

car elles possèdent une infinité de zéros positifs qui forment des séries arithmétiques.

[1] Oeuvres, édition Sylow et Lie, p. 67 et suiv.

I.

Je commence l'exposition des résultats annoncés par une démonstration élémentaire du théorème de Weierstrass. Celle que j'avais adoptée en 1892 consiste en ce qu'on inscrit à la courbe qui représente géométriquement la fonction $y = f(x)$ une ligne brisée polygonale à des arrêtes suffisamment petites et qu'on développe la fonction définie par l'ordonnée de cette ligne polygonale d'après le théorème de Fourier. Mais le point de vue sous lequel je me place aujourdhui est que le théorème de Weierstrass est d'une nature plus élémentaire que les raisonnements classiques par lesquels Lejeune-Dirichlet avait établi le développement de Fourier et que, dans un enseignement convenablement arrangé, on peut pour les applications analytiques les plus élégantes substituer au théorème de Fourier un autre plus particulier et plus facile à établir. L'espace me manque pour en parler davantage et je me borne à indiquer succinctement la démonstration que j'ai en vue.

Au moyen des formules

$$\frac{1}{2} - x = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\mu x\pi}{\mu\pi}, \quad (0 < x < 1),$$

et

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x\pi}{\mu^2\pi^2}, \quad (0 \leq x \leq 1),$$

on vérifie aisément que sous les hypothèses $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ l'expression suivante

$$(3) \quad L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{matrix}\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_1 \sin 2\nu\pi(x - x_1) - y_2 \sin 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu\pi}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi(x - x_1) - \cos 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu^2\pi^2}$$

représente la fonction linéaire

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

lorsque la variable x est intérieure à l'intervalle $(x_1 \ldots x_2)$, tandis qu'elle se réduit à zéro pour les points qui lui sont extérieurs en restant intérieurs à l'intervalle $(0 \ldots 1)$. La représentation géométrique de la fonction (3) se compose donc du segment de droite $M_1 M_2$ qui joint les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ et de deux segments de l'axe des abscisses $(0 \ldots x_1)$ et $(x_2 \ldots 1)$.

Cela étant, soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ des quantités réelles qui satisfont aux inégalités

$$0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < 1,$$

et faisons-leur correspondre des quantités réelles choisies à volonté $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. On aura de la sorte dans le plan $n+1$ points M_a aux coordonnées respectives x_a et y_a $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n)$, lesquels définissent une ligne brisée polygonale $M_0 M_1 M_2 \ldots M_n$ que je désigne par L. La somme suivante des quantités telles que (3)

$$y = \sum_{a=0}^{n-1} L\left(x \left| \begin{matrix} x_a x_{a+1} \\ y_a y_{a+1} \end{matrix} \right.\right)$$

est, en général, égale à l'ordonnée du point de la ligne L correspondant à l'abscisse x. Une exception pourra avoir lieu pour les points des intervalles $(0 \ldots x_0)$ et $(x_n \ldots 1)$ où la quantité y s'annule, et aux sommets $M_0 M_1 \ldots M_n$ de la ligne L.

Je désigne par

$$L\left(x \left| \begin{matrix} x_0 x_1 \ldots x_n \\ y_0 y_1 \ldots y_n \end{matrix} \right.\right)$$

cette quantité y et j'observe que l'on a

$$L\left(x \left| \begin{matrix} x_0 x_1 \ldots x_n \\ y_0 y_1 \ldots y_n \end{matrix} \right.\right) = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{n-1} (y_a + y_{a+1})(x_{a+1} - x_a)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_0 \sin 2\nu\pi(x - x_0) - y_n \sin 2\nu\pi(x - x_n)}{\nu\pi}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi^2} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{y_{a+1} - y_a}{x_{a+1} - x_a} \left[\cos 2\nu\pi(x - x_{a+1}) - \cos 2\nu\pi(x - x_a)\right].$$

Ici évidemment le second membre reste continu tant que $x_0 < x < x_n$, d'où il suit que la quantité $L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 \ldots x_n \\ y_0 \ldots y_n \end{matrix}\right)$ donne l'ordonnée de la ligne L même aux points $M_1 M_2 \ldots M_{n-1}$. Sous l'hypothèse $x_0 < x < x_n$ on peut effectuer la sommation de la première série et il vient

$$
(4) \qquad L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 x_1 \ldots x_n \\ y_0 y_1 \ldots y_n \end{matrix}\right) = \left(\frac{1}{2} - x + x_0\right) y_0 + \left(\frac{1}{2} - x_n + x\right) y_n
$$

$$
+ \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{n-1} (y_a + y_{a+1})(x_{a+1} - x_a)
$$

$$
+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi^2} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{y_{a+1} - y_a}{x_{a+1} - x_a} [\cos 2\nu\pi(x - x_{a+1}) - \cos 2\nu\pi(x - x_a)] .
$$

Je prendrai désormais $x_0 = 0$, $x_n = 1$, de sorte que la ligne L recouvre tout l'intervalle $(0 \ldots 1)$ et j'observe que le second membre reste continu dans tout cet intervalle sans exception. Cette expression (4) sera alors partout égale à l'ordonnée de la ligne L.

Ce point établi, la démonstration du théorème de Weierstrass s'achève comme dans ma note de 1892. Soit en effet $f(x)$ une fonction continue, définie dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, choisissons sur la ligne qui représente cette fonction un nombre assez grand de points suffisamment approchés $M_1 M_2 \ldots M_{n-1}$ et soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ leurs abscisses, en supposant $x_1 > 0$, $x_{n-1} < 1$. En prenant encore $x_0 = 0$ et $x_n = 1$ et posant $y_a = f(x_a)$, la quantité (4) formée au moyen de ces valeurs-là sera telle que la différence

$$
f(x) - L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 x_1 \ldots x_n \\ y_0 y_1 \ldots y_n \end{matrix}\right)
$$

sera en valeur absolue plus petite qu'une quantité $\frac{\delta}{3}$ donnée d'avance.

Cela étant, arrêtons la série infinie qui figure au second membre de (4) et qui est uniformément convergente, à un nombre fini k de termes, dont on dispose de la sorte que le reste de la série qu'on obtient ainsi soit en valeur absolue plus petit que $\frac{\delta}{3}$; en désignant par $L_k(x)$ la quantité qui résulte de (4) en supprimant le reste en question, on aura donc

$$
|L(x) - L_k(x)| < \frac{\delta}{3} .
$$

et l'inégalité précédente

$$|f(x) - L(x)| < \frac{\delta}{3}$$

permet de conclure

$$|f(x) - L_k(x)| < \frac{2\delta}{3}.$$

La quantité $L_k(x)$ est une expression finie de la forme

$$L_k(x) = \big(f(0) - f(1)\big)\left(\frac{1}{2} - x\right) + A_0 + \sum_{\nu=1}^{k} (A_\nu \cos 2\nu x\pi + B_\nu \sin 2\nu x\pi)$$

et on a par conséquent ce théorème que toute fonction continue dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ peut être représentée, avec l'approximation donnée, par une expression telle que $L_k(x)$. Sans m'arrêter à des applications qui ont quelque importance méthodique je me borne à observer que $L_k(x)$ étant une fonction transcendante entière, on pourra arrêter son développement par la série de Mac Laurin à un certain nombre de termes de la sorte que le reste sera, pour $0 \leq x \leq 1$, plus petit en valeur absolue que $\frac{\delta}{3}$. La fonction $L_k(x)$ sera ainsi remplacée par la fonction rationnelle entière $G(x)$ telle que

$$|L_k(x) - G(x)| < \frac{\delta}{3}$$

et il s'ensuit

$$|f(x) - G(x)| < \delta.$$

Donc, $f(x)$ étant continue dans tout l'intervalle $(0 \ldots 1)$, on pourra prendre, le long de cet intervalle, $G(x)$ comme la valeur approchée de $f(x)$, l'erreur étant dans tout cet intervalle plus petite que δ, c'est à dire qu'une quantité donnée d'avance. C'est le théorème de Weierstrass sous sa forme la plus simple.[1]

[1] Je me réserve de revenir sur le rôle que jouit la fonction $L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 & \ldots & x_n \\ y_0 & \ldots & y_n \end{matrix}\right)$ dans la théorie de la représentation des fonctions discontinues.

II.

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, définie dans tout l'intervalle $(0 \ldots \infty)$ et telle que l'intégrale

$$(5) \qquad J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx$$

existe pour une certaine valeur $a = c$. Je vérifie d'abord qu'elle existe alors pour toute valeur de a plus grande que c. En effet, $J(a)$ est la limite pour w infini de la quantité

$$J(a\,,\,w) = \int_0^w e^{-ax}\varphi(x)dx,$$

et en posant $a = c + a', a' > 0$, puis

$$\psi(x) = \int_0^x e^{-cz}\varphi(z)dz,$$

$\psi(x)$ sera finie et continue et la limite pour x infini est, par hypothèse, une quantité bien déterminée $J(c)$. On en conclut en intégrant par parties l'équation

$$J(a\,,\,w) = \psi(w)e^{-a'w} + a'\int_0^w \psi(x)e^{-a'x}dx$$

d'où pour w infini

$$(5^\circ) \qquad J(a) = (a - c)\int_0^\infty e^{-(a-c)x}\psi(x)dx,$$

ce qui démontre l'existence de $J(a)$.

Si la fonction $J(a)$ s'évanouit pour une infinité de valeurs positives formant une suite arithmétique $a = b + \mu\alpha$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$, il résulte de (5°) que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a'x}\psi(x)dx$$

s'évanouira pour les valeurs $a' = b - c + \mu\alpha$ également en suite arithmétique et l'on aura

$$\int_0^\infty e^{-\mu a x} e^{-(b-c)x} \psi(x)\,dx = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

équation qui après la substitution $e^{-ax} = z$ prend la forme

$$\int_0^1 z^{\mu-1}\chi(z)\,dz = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

en posant pour abréger

$$\chi(z) = e^{\frac{b-c}{a}\log z}\,\psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{z}\right).$$

Cette fonction est évidemment finie et continue dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ puisqu'elle est infiniment petite avec z, c'est à dire pour x infini, si l'on suppose, ce qui est permis, que $b > c$.

Cela étant, choisissons une constante δ d'une petitesse arbitraire et formons la fonction rationnelle entière $G(z)$ dont l'existence a été établie plus haut, c'est à dire telle que l'on ait

$$|\chi(z) - G(z)| < \delta;$$

posant

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m,$$

écrivons l'inégalité précédente sous la forme

$$G(z) = \chi(z) + \vartheta\delta, \; (-1 < \vartheta < 1), \tag{7}$$

où ϑ est évidemment une fonction continue.

Cela étant, on tire de l'équation (6) en y faisant successivement $\mu = 1, 2, \ldots, m+1$ et ajoutant après avoir multiplié par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, l'équation suivante

$$\int_0^1 \chi(z)\,G(z)\,dz = 0.$$

Faisant usage de la valeur (7), j'en tire

$$\int_0^1 \chi^2(z)\,dz = -\delta\int_0^1 \vartheta\chi(z)\,dz$$

d'où enfin

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz < \delta \int_0^1 |\chi(z)| dz.$$

Cette inégalité devient impossible, si $\chi(z)$ n'étant pas identiquement nulle, on prend pour δ une quantité plus petite que le quotient

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz : \int_0^1 |\chi(z)| dz.$$

Il faut donc que l'on ait partout $\chi(z) = 0$, ce qui donne $\psi(x) = 0$, c'est à dire

$$\int_0^x e^{-cz} \varphi(z) dz = 0$$

pour chaque valeur positive de x. Cela exige que l'on ait, tout au plus à l'exception d'un certain ensemble intégrable, partout $\varphi(x) = 0$.

On vient de démontrer le théorème d'importance capitale annoncé plus haut, et qui s'exprime:

»Si l'intégrale définie

$$J(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \varphi(x) dx$$

correspondant à une fonction déterminante $\varphi(x)$ intégrable, continue ou discontinue, existe pour une certaine valeur de a, elle existera pour toute valeur plus grande. Elle ne peut pas s'annuler pour une infinité de valeurs positives de a qui forment une suite arithmétique sans que l'on ait identiquement $J(a) = 0$ et, en général, $\varphi(x) = 0$.»

Soit maintenant $f(a)$ une fonction de la variable réelle et positive a, qui à partir d'une certaine limite reste finie pour chaque valeur finie de a sans être identiquement nulle. Alors les produits

$$f(a) \sin ka, \ f(a) \cos ka, \ \frac{f(a)}{\Gamma(b - ka)},$$

formés à l'aide d'une constante positive k, ne pourront pas être mis sous la forme de l'intégrale (5) pour a variable et illimité, car ces fonctions de a possèdent une infinité de zéros formant une suite arithmétique.

Soit maintenant $J(a)$ l'intégrale (5), je dis que si l'équation

$$(a+r)^s J(a) = k$$

peut être satisfaite pour une infinité de valeurs de a formant une suite arithmétique, k, r, s étant des constantes dont la dernière soit positive, on aura nécessairement

$$\varphi(x) = \frac{k}{\Gamma(s)} e^{-rx} x^{s-1}.$$

Car en effet notre équation s'écrit

$$\int_0^\infty e^{-ax} \varphi(x) dx = \frac{k}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(a+r)x} x^{s-1} dx$$

et le reste de la démonstration est évident.

Il y a des propositions analogues au sujet des expressions

$$(a^2+b^2) J(a), \qquad \left(a+\frac{b}{a}\right) J(a)$$

et plusieures autres.

III.

Les applications du théorème fondamental qu'on vient d'établir sont nombreuses, mais l'espace manquant, je me borne à une seule. Je veux obtenir la valeur de l'intégrale

$$\Phi(u, \varepsilon) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} + \varepsilon u x\right) \frac{x^{s-1} dx}{1+x^2},$$

pour $\varepsilon = \pm 1$, u étant réel et positif, tandis que s peut être complexe, mais sa partie réelle restant positive et ne dépassant pas deux.

Pour ce but je considère la fonction génératrice

$$J = \int_0^\infty \Phi(u) e^{-au} du$$

qui a pour valeur, comme cela se voit aisément, l'intégrale définie suivante

$$J = \varepsilon \cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{(a^2+x^2)(1+x^2)} + a\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(a^2+x^2)(1+x^2)}.$$

En faisant usage de l'identité

$$\frac{1}{(a^2+x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{a^2-1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right),$$

puis employant les formules

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{c^2+x^2} = \frac{\pi c^{s-2}}{2\sin\frac{s\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{c^2+x^2} = \frac{\pi c^{s-1}}{2\cos\frac{s\pi}{2}}$$

pour $c = a$ et pour $c = 1$, nous aurons

$$J = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^2-1}\left[(a+\varepsilon) - (1+\varepsilon)a^{s-1}\right]$$

ou bien

$$J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a-\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{a^2-1}\,a^{s-1}\right).$$

Dans le cas où $\varepsilon = -1$ on a

$$J = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{a+1} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-au}e^{-u}\,du,$$

ce qui démontre la formule de Cauchy

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} - ux\right)\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-u}, \quad (u > 0). \tag{8}$$

Le deuxième cas, où $\varepsilon = 1$, donne le résultat un peu plus compliqué

$$J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a-1} - 2\,\frac{a^{s-1}}{a^2-1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a-1} - \pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2\nu+1-s}}$$

et il s'ensuit la formule que nous avons obtenue dans le second mémoire cité plus haut

$$(9) \qquad \int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} + ux\right)\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^u - \pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu-s}}{\Gamma(2\nu+1-s)}.$$

En ajoutant et retranchant avec la formule précédente on obtient

$$2\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+x^2}x^{s-1}\,dx = \pi\cos\text{hyp}\,u - \pi S$$

$$2\cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\sin ux}{1+x^2}x^{s-1}\,dx = \pi\sin\text{hyp}\,u - \pi S$$

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^{2\nu+2-s}}{\Gamma(2\nu+3-s)}.$$

En prenant les dérivées par rapport à s des deux membres dans les équations précédentes et en posant $s = 1$ ou $s = 2$, on obtient les formules que Schloemilch a données au sujet du logarithme intégral.

En mettant a au lieu de $2 - s$ et faisant pour un moment

$$\varphi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^\nu}{\Gamma(a+\nu+1)},$$

on aura évidemment

$$S = \frac{1}{2}u^a[\varphi(u) + \varphi(-u)];$$

cela étant, la fonction $\varphi(u)$ peut se transformer au moyen de la formule d'Euler plusieurs fois retrouvée

$$\varphi(u) = \frac{1}{\Gamma(a)}e^u\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu u^\nu}{\underline{|\nu}(a+\nu)}$$

d'où l'on tire

$$S = \frac{1}{2\Gamma(a)}\left[e^u\int_0^u e^{-x}x^{a-1}\,dx + e^{-u}\int_0^u e^{x}x^{a-1}\,dx\right].$$

Changeant donc s en $s+1$ nos formules deviendront

$$
(10)\quad \begin{cases}
2\cos\frac{s\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{x^s\cos ux}{1+x^2}dx = \pi\cos\operatorname{hyp}u \\
\qquad\qquad - \frac{\pi}{2\Gamma(1-s)}\left[e^u\int\limits_0^u e^{-x}x^{-s}dx + e^{-u}\int\limits_0^u e^{x}x^{-s}dx\right], \\
2\sin\frac{s\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{x^s\sin ux}{1+x^2}dx = -\pi\sin\operatorname{hyp}u \\
\qquad\qquad + \frac{\pi}{2\Gamma(1-s)}\left[e^u\int\limits_0^u e^{-x}x^{-s}dx + e^{-u}\int\limits_0^u e^{x}x^{-s}dx\right].
\end{cases}
$$

SUR LA MÉTHODE D'ABEL POUR L'INVERSION DE LA PREMIÈRE INTÉGRALE ELLIPTIQUE, DANS LE CAS OÙ LE MODULE A UNE VALEUR IMAGINAIRE COMPLEXE

PAR

P. MANSION

À GAND

1. *Objet de cette Note.* La méthode d'ABEL pour opérer l'inversion de la première intégrale elliptique de LEGENDRE et établir les propriétés fondamentales de la fonction inverse est, croyons-nous, l'une des plus simples et des plus naturelles qui aient été proposées dans ce but.

En général, ABEL n'a considéré dans ses Mémoires que des intégrales ou des fonctions elliptiques de module réel. Mais il a fait remarquer que les résultats auxquels il arrive s'appliquent le plus souvent au cas où le module est imaginaire. »Ce théorème, dit-il, en parlant de la double périodicité, a lieu généralement quelles que soient les quantités e et c, réelles ou imaginaires. Je l'ai démontré pour le cas où e^2 est négatif et c^2 positif dans le mémoire précédent. Les quantités ω, ω' sont toujours dans un rapport imaginaire» (*Oeuvres,* tome I, première édition, p. 254; 2e édition, p. 404—405). Ailleurs »Les formules présentées dans ce qui précède ont lieu, avec quelques restrictions, le module c étant quelconque, réel ou imaginaire» (*Ibid.,* première édition, p. 335; 2e édition, p. 528).[1]

[1] Les derniers éditeurs d'ABEL disent à ce propos: »Nous avons cherché en vain, dans les manuscrits d'ABEL une indication de la méthode dont il comptait se servir pour étendre ses résultats aux modules imaginaires» (*Oeuvres,* t. II, p. 319).

Nous nous proposons de montrer, dans cette Note [1], que l'on peut étendre, d'une manière naturelle, la méthode d'exposition des principes de la théorie des fonctions elliptiques d'Abel au cas où le module est une quantité imaginaire complexe. Pour abréger, nous supposerons le module k^2 de la forme $\rho e^{\alpha i}$, ρ étant positif et α compris entre o et π. Si α était compris entre π et 2π, le module complémentaire $k'^2 = 1 - k^2$ serait de la forme $\rho' e^{\alpha' i}$, ρ' étant positif et α' compris entre o et π. On peut donc faire, par rapport à k'^2, tous les raisonnements que nous allons faire par rapport à k^2, dans les intégrales dont il est question dans les n^{os} 2 et 3. On trouve, en effet, en posant $t_2 = [s^2 : (1 + s^2)]$,

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k'^2s^2}},$$

et, de même, en faisant $s^2 = \frac{t^2}{1-t^2}$,

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k'^2t^2}}.$$

Nous n'employons, dans les démonstrations qui suivent, que des principes tous connus d'Abel et démontrés dans le *Cours d'analyse* de Cauchy (1821) ou, pour le théorème du n° 6, V, dans le *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (Paris, De Bure, 1825), du même géomètre.

2. **Théorème I.** *La courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$x + yi = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

[1] Nous avons donné une esquisse du présent travail (n° 2 et 3, premiers alinéas et les remarques du n° 4) dans les *Annales de la société scientifique de Bruxelles*, 1898, t. XXI, 1ère partie, pp. 90—91, mais sans prouver que sn, cn, dn sont des fonctions bien déterminées. — Dans le même recueil, 1900, t. XXIII, 1ère partie, pp. 55—57, nous avons traité le cas où k^2 est réel, mais non compris entre o et 1. — Nous avons annoncé les résultats établis ici dans les thèses 16, 17 et 18 annexées à notre dissertation inaugurale: *Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1870).

où $k^2 = \rho e^{\alpha i}$, ρ *étant positif,* α *compris entre* o et π, t *variant de* o *à l'unité en restant réel et les radicaux ayant l'unité pour valeur initiale, est comprise dans l'angle* $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ *compté à partir de l'axe des* x *et n'a aucun point double.*

L'argument de k^2 et, par suite, celui de k^2t^2 étant α, celui de $-k^2t^2$ sera $-\pi + \alpha$; celui de $1 - k^2t^2$ sera compris entre o et $-\pi + \alpha$. L'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ sera compris entre o et $-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$, ou entre ces mêmes quantitées augmentées de π; mais on devra choisir la première valeur, car pour t tendant vers zéro, l'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ doit tendre vers l'argument de 1; or, dans la seconde hypothèse, l'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ tendrait vers π, c'est-à-dire vers l'argument de -1. L'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ étant compris entre o et $-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$, celui de $(1 : \sqrt{1 - k^2t^2})$ est compris entre o et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$.

L'intégrale $x + yi$ est la limite de la somme d'expressions $(1 : \sqrt{1 - k^2t^2})$, multipliées par des quantités positives $(dt : \sqrt{1 - t^2})$; l'argument de cette somme et, par suite, de l'intégrale est donc aussi compris entre o et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$. La courbe est donc comprise toute entière dans l'angle $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ compté à partir de l'axe des x.

Posons $x + yi = re^{\beta i}$, r étant positif. Je dis que β et r croissent en même temps que t. En effet, la valeur absolue de l'argument de $1 - k^2t^2$ croît de o à $\pi - \alpha$ quand t varie de o à ∞, comme on le voit en construisant le parallélogramme ayant pour côtés 1 et $-k^2t^2$; la valeur absolue de l'argument de $\sqrt{1 - k^2t^2}$ ou la valeur de l'argument de $(1 : \sqrt{1 - k^2t^2})$ croît de o à $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$, quand t varie de o à ∞. L'argument de la somme des éléments de l'intégrale et, par suite, celui de l'intégrale elle-même croît donc avec t.

La valeur de r va aussi en croissant avec t, parce que le module de la somme de deux ou plusieurs quantités complexes dont les arguments diffèrent de moins de $\frac{1}{2}\pi$ est supérieure au module de chacune d'elles. A mesure que l'on considère un plus grand nombre d'éléments de l'intégrale, le module de leur somme et, par suite, celui de l'intégrale augmente.

Soit

$$\sqrt{1-k^2t^2} = m + ni \quad \text{ou} \quad 1 - \rho t^2 \cos\alpha - i\rho t^2 \sin\alpha = m^2 - n^2 + 2mni,$$

d'où il résulte que

$$2mn = -\rho t^2 \sin\alpha, \qquad -\frac{m}{n} = \frac{\rho t^2 \sin\alpha}{2n^2}.$$

On aura

$$x + yi = \int_0^t \frac{m - ni}{\sqrt{1 - t^2(m^2+n^2)}} dt, \qquad \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = \frac{m - ni}{\sqrt{1 - t^2(m^2+n^2)}},$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{m}{n} = \frac{\rho t^2 \sin\alpha}{2n^2} > 0.$$

Donc x croît en même que $y = r\sin\beta$, quand t croît de 0 à 1.

La courbe $x + yi = re^{\beta i}$ est donc telle que x, y, r, β croissent avec t et cette courbe n'a aucun point double quand t varie de zéro à l'unité.

3. **Théorème II.** *La courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x' + y'i = i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}},$$

où $k^2 = \rho e^{\alpha i}$, ρ étant positif, α compris entre 0 et π, s variant de 0 à $+\infty$ en restant réel et les radicaux ayant l'unité pour valeur initiale, est comprise dans l'angle $\frac{1}{2}\alpha$ compté à partir de l'axe des y, dans l'angle des x et des y positifs, et n'a aucun point double.

L'argument de k^2 et, par suite, celui de k^2s^2 étant α, celui de $1 + k^2s^2$ est compris entre 0 et α; celui de $\sqrt{1+k^2s^2}$ est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\alpha$, ou entre ces quantités augmentées de π; mais on doit choisir la première valeur, parce que, pour s tendant vers zéro, l'argument de $\sqrt{1+k^2s^2}$ doit tendre vers l'argument de 1; or, dans la seconde hypothèse, l'argument de ce radical tendrait vers π, c'est-à-dire vers l'argument de -1. L'argument de $\sqrt{1+k^2s^2}$ étant compris entre 0 et $\frac{1}{2}\alpha$, celui de $(1 : \sqrt{1+k^2s^2})$ est compris entre 0 et $-\frac{1}{2}\alpha$ et celui de $(i : \sqrt{1+k^2s^2})$ entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$.

L'intégrale $x' + y'i$ est la limite de la somme d'expressions $(i : \sqrt{1 + k^2 s^2})$ multipliées par des quantités positives $(ds : \sqrt{1 + s^2})$; l'argument de la somme et, par suite, celui de l'intégrale sera donc aussi compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$. La courbe est donc comprise toute entière dans l'angle $\frac{1}{2}\alpha$ compté à partir de l'axe des y.

Posons $x' + y'i = r'e^{\beta' i}$, r' étant positif. Je dis que β' décroît et que r' croît quand s croît. En effet, l'argument de $1 + k^2 s^2$ croît de 0 à α, celui de $\sqrt{1 + k^2 s^2}$ de 0 à $\frac{1}{2}\alpha$ quand s varie de 0 à ∞, comme on le voit en construisant le parallélogramme ayant pour côtés 1 et $k^2 s^2$; la valeur de l'argument de $(i : \sqrt{1 + k^2 s^2})$ décroît donc de $\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ dans les mêmes circonstances. Il en résulte immédiatement que l'argument de la somme des éléments de l'intégrale et, par suite, celui de l'intégrale elle-même décroît quand s croît.

La valeur de r' va en croissant avec s, parce que le module de la somme de deux ou plusieurs quantités complexes dont les arguments diffèrent de moins de $\frac{1}{2}\pi$ est supérieur au module de chacune d'elles. A mesure que l'on considère un plus grand nombre d'éléments de l'intégrale, le module de leur somme et, par suite, celui de l'intégrale augmente.

Soit

$$\sqrt{1 + k^2 s^2} = m' + n'i \quad \text{ou} \quad 1 + \rho s^2 \cos\alpha + i\rho s^2 \sin\alpha = m'^2 - n'^2 + 2m'n'i,$$

d'où il résulte que

$$2m'n' = \rho s^2 \sin\alpha, \qquad \frac{m'}{n'} = \frac{\rho s^2 \sin\alpha}{2n'^2}.$$

On aura

$$x' + y'i = i\int_0^s \frac{m' - n'i}{\sqrt{1 + s^2(m'^2 + n'^2)}}\,ds, \qquad \frac{dx'}{ds} + i\frac{dy'}{ds} = \frac{m'i + n'}{\sqrt{1 + s^2(m'^2 + n'^2)}},$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{m'}{n'} = \frac{\rho s^2 \sin\alpha}{2n'^2} > 0.$$

Donc y' croît en même temps que $x' = r'\cos\beta'$ quand s croît de 0 à ∞.

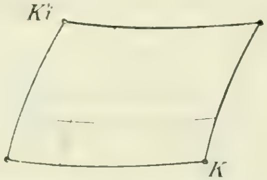
La courbe $x' + y'i = r'e^{\beta' i}$ est donc telle que $x', y', r', -\beta'$ croissent avec s et cette courbe n'a aucun point double quand s varie de 0 à l'infini.

4. **Théorème III.** *Si l'on fait glisser parallèlement à elle-même la première courbe (x, y) de manière que son point initial $(0, 0)$ décrive la seconde (x', y'), ou, inversement, la seconde (x', y') de manière que son point initial $(0, 0)$ décrive la première (x, y), chacune des deux courbes, dans son mouvement, balayera la surface d'un parallélogramme curviligne, en ne passant qu'une seule fois par chacun de ses points.*

Posons

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \qquad K'i = i\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

D'après la définition du parallélogramme curviligne, ses points s'obtiennent en faisant varier t de 0 à 1, s de 0 à ∞, de manière que $x+yi$



varie de 0 à K, $x'+y'i$ de 0 à $K'i$, x, y, x', y' allant d'ailleurs sans cesse en croissant, comme on l'a vu dans les théorèmes I et II. Un point quelconque de ce parallélogramme sera donc représenté par $x+yi+x'+y'i$.

Je dis qu'il est impossible que le même point soit représenté par une expression de même forme $X+Yi+X'+Y'i$, $X+Yi$ étant un point de la première courbe correspondant à une valeur T de la limite supérieure de la première intégrale, $X'+Y'i$ étant un point de la seconde courbe correspondant à une valeur S de la limite supérieure de la seconde intégrale.

En effet, l'égalité

$$x+yi+x'+y'i = X+Yi+X'+Y'i,$$

ou

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} + i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}} = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} + i\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}},$$

peut s'écrire

$$\int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = i\int_s^1 \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

Or cette dernière égalité est impossible; car, on a vu, dans l'étude des deux courbes, que, à π près, l'argument de la première intégrale est compris entre o et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$, celui de la seconde multipliée par i, entre $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ et $\frac{1}{2}\pi$.

Remarques. I. Il n'est pas sans intérêt d'observer que si l'on pose

$$K = Re^{Bi}, \qquad K'i = R'e^{B'i},$$

on a

$$\frac{1}{2}\pi > B' > \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha > B > 0$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\pi > B' - B > 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{K'i}{K} = \frac{R'}{R}e^{(B'-B)i} = \frac{R'}{R}\cos(B'-B) + i\frac{R'}{R}\sin(B'-B).$$

Le coefficient de i, dans la valeur de $(K'i:K)$, est donc positif.

II. Dans le cas où α est compris entre π et 2π, et, par suite, α' entre o et π, on trouve aisément que l'on a

$$0 > B > -\frac{1}{2}\alpha', \qquad \frac{1}{2}\pi < B' < \pi - \frac{1}{2}\alpha', \qquad \frac{1}{2}\pi < B' - B < \pi$$

et le coefficient de i est encore positif.

5. *Inversion.* I. Posons, dans l'intégrale du n° 2, $t = \sin\varphi$, $z = x + yi$. Nous aurons

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si nous écrivons, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à 1,

$$\varphi = \operatorname{am} z,\ t = \sin\varphi = \sin\operatorname{am} z = \operatorname{sn} z,\ \sqrt{1-t^2} = \cos\varphi = \cos\operatorname{am} z = \operatorname{cn} z,$$

$$\sqrt{1-k^2t^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi = \Delta\operatorname{am} z = \operatorname{dn} z,$$

les fonctions $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ seront des fonctions bien déterminées de z, puisque la courbe (x, y) n'a pas de point double, et cela, pour toutes les valeurs de φ, de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Mais rien n'empêche de faire croître φ indéfiniment ou de lui donner des valeurs négatives, le radical $\sqrt{1-t^2}$ de l'intégrale primitive ayant toujours le signe de $\cos\varphi$. La variable z prendra des valeurs bien déterminées de 0 à K d'abord, puis de K à $2K$, de $2K$ à $3K$, etc. et de même de 0 à $-nK$, n étant aussi grand qu'on le veut; la courbe (x, y) correspondante s'étendra jusqu'à l'infini dans les deux sens, sans avoir de point double.

Nous tirons immédiatement de là, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité, les propriétés fondamentales de sn, cn, dn, *quand* sn *est réel*, mais non le théorème de l'addition:

$$(1) \qquad \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \qquad k^2\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1;$$

$$(2) \qquad D\operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad D\operatorname{cn} z = -\operatorname{sn} z\operatorname{dn} z, \quad D\operatorname{dn} z = -k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z;$$

$$(3) \qquad \operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z, \qquad \operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z, \qquad \operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z;$$

$$(4) \qquad \operatorname{sn} 0 = 0, \qquad \operatorname{cn} 0 = 1, \qquad \operatorname{dn} 0 = 1;$$

$$(5) \qquad \operatorname{sn} K = 1, \qquad \operatorname{cn} K = 0, \qquad \operatorname{dn} K = k';$$

$$(7) \qquad \operatorname{sn}(z+2K) = -\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn}(z+2K) = -\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn}(z+2K) = \operatorname{dn} z.$$

II. Si l'on fait $t = si$, dans la première intégrale, elle se transforme dans la seconde, considérée au n° 3, savoir:

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

Dans celle-ci on peut faire varier sans inconvénient s de 0 à ∞.

Posons

$$z'i = x' + y'i, \qquad s^2 = \frac{u^2}{1 - u^2}, \qquad u = \sin\psi,$$

il viendra

$$z'i = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}} = i\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k'^2u^2}} = i\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}.$$

On a immédiatement, d'après 5, I, en mettant le module k' en évidence,

$$\sin\psi = \operatorname{sn}(z', k'), \qquad \cos\psi = \operatorname{cn}(z', k'), \qquad \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} = \operatorname{dn}(z', k).$$

On a aussi

$$(8) \qquad t = si = i\operatorname{tang}\psi, \qquad \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1+s^2} = \frac{1}{\cos\psi},$$

$$\sqrt{1-k^2t^2} = \sqrt{1+k^2s^2} = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{\cos\psi}$$

les signes des expressions en ψ étant déterminées par la valeur initiale des radicaux. Si l'on pose

$$t = \operatorname{sn}(z'i, k), \qquad \sqrt{1-t^2} = \operatorname{cn}(z'i, k), \qquad \sqrt{1-k^2t^2} = \operatorname{dn}(z'i, k),$$

les fonctions $\operatorname{sn}(z'i, k)$, $\operatorname{cn}(z'i, k)$, $\operatorname{dn}(z'i, k)$ seront des fonctions bien déterminées de $z'i$, puisque la courbe (x', y') n'a pas de point double, pour toutes les valeurs de s de 0 à ∞, ou de φ de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Les relations (8) donneront d'ailleurs, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité, les formules de la transformation imaginaire d'Abel et de Jacobi:

$$(9) \qquad \operatorname{sn}(z'i, k) = i\frac{\operatorname{sn}(z', k')}{\operatorname{cn}(z', k')}, \qquad \operatorname{cn}(z'i, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(z', k')},$$

$$\operatorname{dn}(z'i, k) = \frac{\operatorname{dn}(z', k')}{\operatorname{cn}(z', k')}.$$

Rien n'empêche de faire croitre ψ indéfiniment ou de lui donner des valeurs négatives, les radicaux $\sqrt{1-t^2}$, $\sqrt{1-k^2t^2}$ ayant toujours le signe de $\cos\psi$. La variable $z'i$ prendra des valeurs bien déterminées de 0 à $K'i$ d'abord, de $K'i$ à $2K'i$, de $2K'i$ à $3K'i$, etc., et, de même, de zéro à $-nK'i$,

n étant aussi grand qu'on le veut; la courbe correspondante (x', y') s'étendra de o à ∞, dans les deux sens, sans avoir de point double.

Nous tirons sans peine de ce qui précède, *pour la variable $z'i$*, les propriétés fondamentales exprimées par les équations (1), (2), (3) et, de plus, les suivantes:

$$(10) \qquad \operatorname{sn} K'i = i\,.\,\infty, \qquad \operatorname{cn} K'i = \infty, \qquad \operatorname{dn} K'i = k\,.\,\infty;$$

$$(11) \qquad \operatorname{sn}(z'i + 2K'i) = \operatorname{sn} z'i, \qquad \operatorname{cn}(z'i + 2K'i) = -\operatorname{cn} z'i,$$
$$\operatorname{dn}(z'i + 2K'i) = -\operatorname{dn} z'i.$$

Dans ces formules, $\operatorname{sn} z'i$ *est purement imaginaire.*

III. Soit $\xi = z + z'i$, z étant une valeur quelconque considérée au n° 5, I, $z'i$ une valeur quelconque considérée au n° 5, II. Par définition, nous poserons (comme Abel l'a fait dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité),

$$(12) \qquad \operatorname{sn}\xi = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z'i \operatorname{dn} z'i + \operatorname{sn} z'i \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i},$$

$$\operatorname{cn}\xi = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} z'i - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} z'i \operatorname{dn} z \operatorname{dn} z'i}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i},$$

$$\operatorname{dn}\xi = \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{dn} z'i - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} z'i \operatorname{cn} z \operatorname{cn} z'i}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i}.$$

On déduit de là, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à 1, *pour la variable générale ξ*, les propriétés (1), (2), (3), (7), (11), (9); de plus, les suivantes:

$$(13) \qquad \operatorname{sn}(K + K'i) = \frac{1}{k}, \qquad \operatorname{cn}(K + K'i) = -i\frac{k'}{k}, \qquad \operatorname{dn}(K + K'i) = 0.$$

$$(14) \qquad \operatorname{sn}(\xi + 2K + 2K'i) = -\operatorname{sn}\xi, \qquad \operatorname{cn}(\xi + 2K + 2K'i) = \operatorname{cn}\xi,$$
$$\operatorname{dn}(\xi + 2K + 2K'i) = -\operatorname{dn}\xi,$$

et beaucoup d'autres, en particulier, celles-ci:

$$(15) \qquad \operatorname{sn}(K'i - u) = -\frac{1}{k \operatorname{sn} u}, \qquad \operatorname{cn}(K + K'i - u) = -i\frac{k'}{k}\frac{1}{\operatorname{cn} u},$$
$$\operatorname{dn}(K - u) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}.$$

La variable ξ considérée ici est quelconque. D'après sa définition même, on peut la mettre sous la forme $2pK + 2p'K'i \pm \xi_1$, p et p' étant des nombres entiers positifs ou négatifs; $\xi_1 = z_1 + z'_1 i$ correspond à un point du parallélogramme curviligne du n° 4, dont les coordonnées sont $x_1 + x'_1$, $y_1 + y'_1$, si $z_1 = x_1 + y_1 i$ représente un point de la première courbe, $z'_1 = x'_1 + y'_1 i$ un point de la seconde. Puisque ξ_1 ne peut être égal à une somme de la forme $z_1 + z'_1 i$ que d'une manière (n° 4), les fonctions $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$ sont bien déterminées.

6. *Infinis, zéros, périodes de* sn, cn, dn; *théorème de l'addition*; sn *peut prendre toute valeur.*

I. Des formules (1) et (12), il résulte (comme Abel l'a montré, quand k^2 est positif et inférieur à l'unité), que $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$ ne sont infinis que si $\operatorname{sn} z = 0$, $\operatorname{sn} z'i = \infty$, ce qui donne $2pK + (2p'+1)K'i$ pour les infinis de ces fonctions, p et p' étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

II. D'après les formules (15), pour que $\operatorname{sn}(K'i - u)$, $\operatorname{cn}(K + K'i - u)$, $\operatorname{dn}(K - u)$ s'annulent, il faut et il suffit que $u = 2pK + (2p'+1)K'i$. Cette remarque donne immédiatement les zéros des fonctions $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$.

III. Ces fonctions, par suite, ne peuvent avoir pour périodes que $2K$, $2K'i$ ou leurs multiples; car si elles en avaient d'autres, elles auraient d'autres zéros et d'autres infinis que ceux que nous venons de déterminer.

IV. Le théorème de l'addition peut s'établir, dans le cas actuel, comme l'a fait Abel, quand k^2 est positif et inférieur à l'unité. Mais il peut aussi être démontré algébriquement comme il suit: Quand k^2 est positif et inférieur à l'unité, on a identiquement, si $S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$,

$$\operatorname{sn} S = \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\gamma+\delta)\operatorname{dn}(\gamma+\delta) + \operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha+\beta)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\beta)\operatorname{sn}^2(\gamma+\delta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\gamma)\operatorname{cn}(\beta+\delta)\operatorname{dn}(\beta+\delta) + \operatorname{sn}(\beta+\delta)\operatorname{cn}(\alpha+\gamma)\operatorname{dn}(\alpha+\gamma)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\gamma)\operatorname{sn}^2(\beta+\delta)}$$

et de même pour $\operatorname{cn} S$, $\operatorname{dn} S$, pourvu que l'on exprime les deux fractions au moyen des fonctions sn, cn, dn de α, β, γ et δ. Les mêmes identités algébriques subsistent si k^2 est imaginaire complexe, quand α et β sont des expressions de la forme z considérées au n° 5, I, γ et δ des expressions de la forme $z'i$ considérée au n° 5, II. Ces identités expriment évidemment alors le théorème de l'addition pour $\operatorname{sn}(\xi_1 + \xi_2)$, $\operatorname{cn}(\xi_1 + \xi_2)$, $\operatorname{dn}(\xi_1 + \xi_2)$, si $\xi_1 = \alpha + \gamma$, $\xi_2 = \beta + \delta$.

V. Enfin, la fonction $\operatorname{sn}\xi$ peut prendre une valeur quelconque $\lambda+\mu i$. En effet, posons

$$I = \int_0^{\lambda+\mu i} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe continue qui ne passe par aucun des points $+1$, -1, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. On pourra représenter chacune des valeurs de l'intégrale par une expression ξ de la forme $z+z'i$, z variant de 0 à $Z = 2pK \pm Z_1$, $z'i$ de 0 à $2p'K'i \pm Z_1'i$, p et p' étant des entiers positifs ou négatifs, Z_1 correspondant à un point de la courbe du n° 2, $Z_1'i$ à un point de la courbe du n° 3. — On a identiquement, en posant $\operatorname{sn}\xi = t$,

$$I = \int_0^I d\xi = \int_0^I \frac{d\operatorname{sn}\xi}{\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi} = \int_0^{\operatorname{sn} I} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

Les deux intégrales en t, l'une de 0 à $\lambda+\mu i$, l'autre de 0 à $\operatorname{sn} I$, sont égales quelque rapproché que l'on suppose $\lambda+\mu i$ de 0; autrement dit, l'intégrale de l'expression en t, le long d'un chemin convenable, de $\lambda+\mu i$ à $\operatorname{sn} I$ est nulle quelque rapproché que $\lambda+\mu i$ soit de 0. Cela suppose que l'on ait $\lambda+\mu i = \operatorname{sn}\xi$, dans le voisinage de zéro, puis partout, de proche en proche, comme il est aisé de le voir.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

IVAR FREDHOLM
À STOCKHOLM.

Dans quelques travaux[1] ABEL s'est occupé avec le problème de déterminer une fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$\int f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x) \tag{a}$$

$f(x,y)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions données. ABEL a résolu quelques cas particuliers de cette équation fonctionnelle dont il paraît avoir reconnu le premier l'importance. C'est pour cela que je propose d'appeler l'équation fonctionnelle (a) une *équation fonctionnelle abélienne.*

Dans cette note je ne m'occupe pas en premier lieu de l'équation abélienne mais de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x), \tag{b}$$

qui est étroitement liée à l'équation abélienne.

En effet, si on introduit au lieu de $f(x,y)$ et $\psi(x)$, $\frac{1}{\lambda}f(x,y)$ et $\frac{1}{\lambda}\psi(x)$, l'équation (b) s'écrit

$$\lambda\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x), \tag{c}$$

équation qui se transforme en l'équation (a) en posant $\lambda = 0$. Ainsi la solution de l'équation (a) peut être considérée comme implicitement contenue dans la solution de l'équation (b).

[1] Magazin for Naturvidenskaberne, Kristiania 1823 et Oeuvres complêtes.

Quant à l'équation (b) elle me paraît mériter l'attention particulière des géomètres, car la plupart des problèmes de la Physique mathématique qui conduisent à des équations différentielles linéaires se traduisent par des équations fonctionnelles de la forme (b) ou de la forme

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) + \int \ldots \int f(x_1 \ldots x_n, \xi_1 \ldots \xi_n) \varphi(\xi_1 \ldots \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n = \psi(x_1 \ldots x_n).$$

Pour le voir on n'a qu'à rappeler le problème de DIRICHLET dans le cas où l'on cherche à représenter le potentiel inconnu par le potentiel de double couche, des problèmes analogues de la théorie du magnétisme et de la théorie de l'élasticité.

Le premier essai de résoudre une équation (b) a été fait par NEUMANN. En effet, la méthode célèbre de NEUMANN pour la résolution du problème de DIRICHLET consiste en le développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances croissantes du paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Mais le développement de NEUMANN, tout en convergeant dans le cas du problème de DIRICHLET, ne peut pas converger dans le cas général.

Dans un travail important[1] la méthode de NEUMANN a été appliquée avec succès par M. VOLTERRA à l'équation fonctionnelle

$$\text{(c)} \qquad \varphi(x) + \int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

Dans le même travail M. VOLTERRA a aussi mis en évidence le rapport intime entre l'équation (c) et l'équation abélienne

$$\int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

L'équation que je me propose à étudier dans le présent travail comprend comme cas particulier l'équation de M. VOLTERRA, car en supposant, dans l'équation (b), que $f(x, y)$ soit nul pour $y > x$, on obtient immédiatement l'équation (c).

Dans ce qui suit la fonction $f(x, y)$ sera soumise à quelques restrictions. Je suppose que $f(x, y)$ soit telle que, α étant inférieur à l'unité, $(x - y)^\alpha f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable. Ainsi je ne vais

[1] Annali di Matematica, 1896.

pas traiter l'équation (b) dans toute sa généralité. Mais les restrictions que j'ai imposées à la fonction sont justifiées par les applications de l'équation (b) à la Physique mathématique auxquelles je me réserve de revenir dans un autre travail.

§ 1. *Sur la formation et les propriétés du déterminant de l'équaton fonctionnelle fondamentale.*

1. Supposons que $f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable soit par rapport à une seule ou par rapport aux deux variables réelles x et y qui, pour fixer les idées, seront supposées positives et moindres que l'unité.

Dans ce cas il existe une quantité D_f qui joue par rapport à l'équation fonctionnelle (b) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d'équation linéaires.

Pour définir D_f j'introduis la notation abrégée

$$(1) \qquad f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \ldots & f(x_2, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \ldots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

et je pose

$$(2) \qquad D_f = 1 + \int_0^1 f(x, x)dx + \frac{1}{\underline{|2}} \int_0^1 \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|n}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

2. Pour démontrer la légitimité de cette expression nous n'avons que rappeler un théorème de M. Hadamard.[1]

Le dit théorème nous apprend que la valeur absolue d'un déterminant donné est au plus égale à la racine carrée du terme principal dans le dé-

[1] Bulletin des sciences mathématiques, 1893, p. 242.

terminant obtenu en multipliant le déterminant donné avec son déterminant imaginaire conjugué.

Par conséquent, si F est la limite supérieure de $f(x, y)$ on a

$$\left| f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix} \right| \leqq \sqrt{n^n} F^n.$$

Ainsi la série D_f converge comme la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{|\underline{n}} F^n.$$

3. Il n'est pas sans intérêt de noter que la convergence s'améliore si on suppose chez $f(x, y)$ une certaine espèce de continuité.

En effet, supposons qu'il existe une limite supérieure A des valeurs du quotient

$$\frac{f(x, y) - f(x, z)}{(y - z)^\alpha}.$$

Alors on peut évidemment écrire

$$\left| f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} \right| \leqq \sqrt{n^n} A^n (x_1 - x_2)^\alpha (x_2 - x_3)^\alpha \ldots (x_{n-1} - x_n)^\alpha.$$

Or, le premier membre étant une fonction symétrique des variables $x_1 \ldots x_n$ il suffit évidemment pour en trouver le maximum de considérer celles qui remplissent les conditions

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n.$$

Dans ce cas la valeur maxima du produit

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \ldots (x_{n-1} - x_n)$$

est égale à

$$\frac{1}{n^n}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n < \frac{(n^n)^{\frac{1}{2} - \alpha}}{|\underline{n}} A^n.$$

4. De la même manière que nous avons démontré la légitimité de l'expression de D_f on démontre celle des expressions suivantes que j'appelle les mineurs de D_f.

Je pose

$$
(3) \qquad D_f\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}
$$

$$
= f\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n, x \\ \eta_1 \ldots \eta_n, x \end{pmatrix} dx
$$

$$
+ \frac{1}{\lfloor 2} \int_0^1 \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n, x_1, x_2 \\ \eta_1 \ldots \eta_n, x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \ldots
$$

$$
= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor \nu} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu .
$$

5. Les mineurs satisfont à des relations importantes que nous allons déduire maintenant.

Développant le déterminant

$$
f\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix}
$$

suivant les éléments de la première ligne on trouve

$$
f\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix}
$$

$$
= f(\xi_1, \eta_1) f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_2 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} - f(\xi_1, \eta_2) f\begin{pmatrix} \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1, \eta_3 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} + \ldots
$$

$$
- (-1)^n f(\xi_1, \eta_n) f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix}
$$

$$
+ (-1)^n f(\xi_1, x_1) f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, \eta_n \ldots x_\nu \end{pmatrix} \ldots
$$

$$
- (-1)^{n+\nu} f(\xi_1, x_\nu) f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, \eta_n \ldots x_{\nu-1} \end{pmatrix}.
$$

Multiplions les deux membres de cette identité par $dx_1 \ldots dx_\nu$ et intégrons entre les limites 0 et 1, nous aurons la formule

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \, , \, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \ldots \eta_n \, , \, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu$$

$$= f(\xi, \eta_1) \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \, , \, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_2 \ldots \eta_n \, , \, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu$$

$$- f(\xi_1, \eta_2) \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_2 \, , \, \xi_3 \ldots \xi_n \, , \, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \, , \, \eta_3 \ldots \eta_n \, , \, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu + \ldots$$

$$- \nu \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\xi_1, \tau) f\begin{pmatrix} \tau \, , \, \xi_2 \ldots \xi_n \, , \, x_1 \ldots x_{\nu-1} \\ \eta_1 \, , \, \eta_2 \ldots \eta_n \, , \, x_1 \ldots x_{\nu-1} \end{pmatrix} d\tau dx_1 \ldots dx_{\nu-1} .$$

Multipliant ensuite par $\frac{1}{\nu}$ et faisant la somme depuis $\nu = 0$ jusqu'à $\nu = \infty$ on arrive à la formule très-importante

$$(4) \qquad D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\xi_1, \tau) D_f\begin{pmatrix} \tau \, , \, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \, , \, \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} d\tau$$

$$= f(\xi_1, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_1, \eta_2) D_f\begin{pmatrix} \xi_2 \, , \, \xi_3 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \, , \, \eta_3 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \ldots .$$

En commençant par développer le déterminant suivant les éléments de la première colonne on trouve de la même manière la formule

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\tau, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \, , \, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \tau \, , \, \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} d\tau$$

$$= f(\xi_1, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_2, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \, , \, \xi_3 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \, , \, \eta_3 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \ldots \text{etc.}$$

Dans le cas $n = 1$ ces deux formules deviennent

$$(4_1) \qquad D_f\binom{\xi}{\eta} + \int_0^1 f(\xi, \tau) D_f\binom{\tau}{\eta} d\tau = f(\xi, \eta) D_f,$$

$$(5_1) \qquad D_f\binom{\xi}{\eta} + \int_0^1 f(\tau, \eta) D_f\binom{\xi}{\tau} d\tau = f(\xi, \eta) D_f.$$

6. Introduisant dans D_f au lieu de $f(x, y)$, $\lambda f(x, y)$ nous trouvons que $D_{\lambda f}$ peut se développer suivant les puissances croissantes de λ dans une série qui, à cause du lemme de M. HADAMARD, converge pour toute valeur de λ. Ainsi $D_{\lambda f}$ est une fonction entière de λ.

En se rappelant les définitions de D_f et de ses mineurs on trouve immédiatement les relations

$$(6) \qquad \lambda^n \cdot \frac{d^n D_{\lambda f}}{d\lambda^n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

qui subsistent pour $n = 1, 2, 3$, etc.

Ces relations nous permettent de parvenir à un résultat important. En effet, $D_{\lambda f}$ étant une fonction entière de λ chaque racine de l'équation

$$D_{\lambda f} = 0$$

a nécessairement une multiplicité finie.

Par conséquent, on ne peut pas trouver de valeur de λ pour laquelle $D_{\lambda f}$ et toutes ses dérivées soient nulles.

En particulier si, pour $\lambda = 1$, $D_{\lambda f} = D_f = 0$, on peut toujours trouver un premier mineur de D_f qui n'est pas identiquement nul.

§ 2. *Sur une classe de transformations fonctionnelles et leur inversion.*

7. Considérons maintenant une équation fonctionnelle

$$(7) \qquad \varphi(x) + \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)ds = \psi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $\psi(x)$ une fonction finie et intégrable.

En considérant l'équation (7) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\psi(x)$ j'écris cette même équation

$$(7) \qquad S_f\varphi(x) = \psi(x),$$

et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction $f(x, y)$.

Les transformations (7) *forment une groupe.* En effet, considérons une autre transformation S_g appartenant à la fonction $g(x, y)$ qui remplit les mêmes conditions d'intégrabilité etc. que $f(x, y)$.

Alors on trouve facilement qu'on peut poser

$$S_g\psi(x) = S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x)$$

où

$$F(x, y) = g(x, y) + f(x, y) + \int_0^1 g(x, t)f(t, y)dt.$$

Quant à l'inversion de l'équation (7) deux cas sont possibles: D_f est différent de zéro ou $D_f = 0$.

8. Supposons d'abord que le déterminant D_f soit différent de zéro et posons

$$g(x, y) = -\frac{D_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{D_f}.$$

Alors on trouve à cause de l'équation (5_1) que F est identiquement nulle. Par conséquent, l'équation identique

$$S_g S_f\psi(x) = \psi(x)$$

ayant lieu, S_g est la transformation inverse de S_f. Ainsi, s'il existe une solution de l'équation (7) elle est unique et donnée par l'équation

$$\varphi(x) = S_g \psi(x).$$

D'autre côté, introduisons dans l'équation (7) au lieu de $\varphi(x)$ $S_g\psi(x)$ nous obtenons

$$S_f \varphi(x) = S_f S_g \psi(x) = S_F \psi(x)$$

où F, à cause de l'équation (4_1) est encore égale à zéro.

Par conséquent, nous pouvons énoncer le théorème:

Si le déterminant D_f d'une équation fonctionnelle de la forme

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)ds = \psi(x),$$

où $f(x, s)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions finies et intégrables, est différent de zéro, il existe une et une seule fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à cette équation.

Cette fonction est donnée par l'équation:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_f} \psi(y)dy.$$

9. Considérons maintenant le cas où D_f est nul.

Nous avons vu, dans ce cas, qu'il existe un premier mineur de D_f qui n'est pas identiquement nul.

Soit

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}$$

ce mineur. Parce que les mineurs d'ordre inférieur sont nuls, la formule (4) s'écrit

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\xi_1, \tau) D_f\begin{pmatrix} \tau, \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1, \eta_2 \dots \eta_n \end{pmatrix} d\tau = 0.$$

C'est à dire

$$\varphi(x) = D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 \dots \eta_n \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation homogène

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy = 0. \tag{7'}$$

Pour en trouver toutes les solutions, désignons par S_f la transformation appartenant à f et soit φ une solution de l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0.$$

Apellons S_g la transformation *pseudo-inverse* de S_f, si

$$g(x, y) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_1 \dots \xi_n \\ y, & \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}},$$

les paramètres ξ, η étant choisis de manière que le dénominateur soit différent de zéro, ce qui, par hypothèse, est toujours possible.

Alors

$$S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x) = 0,$$

où

$$F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + \int_0^1 g(x, \tau)f(\tau, y)d\tau.$$

Or à cause de l'équation (5) on a

$$F(x, y) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}}\Bigg[f(\xi_1, y)D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 \dots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_2, y)D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & x, & \xi_3 \dots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \dots \eta_n \end{pmatrix}$$

$$\dots - (-1)^n f(\xi_n, y)D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots x \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}\Bigg]$$

ou bien, en employant une notation abrégée

$$F(x, y) = -\sum_{\nu=1} f(\xi_\nu, y)\Phi_\nu(x). \tag{10}$$

Or, $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0,$$

par conséquent on a

$$(11) \qquad \varphi(x) = -\int_0^1 F(x, y)\varphi(y)dy = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu(x)\int_0^1 f(\xi_\nu, y)\varphi(y)dy$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Phi_\nu(x).$$

On vérifie immédiatement que cette expression satisfait à l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0$$

quelles que soient les coefficients A_ν.

Les n fonctions $\Phi_1 \ldots \Phi_n$ sont linéairement indépendantes, car la formule (4) nous apprend que

$$\int_0^1 f(\xi_\lambda, x)\,\Phi_\mu(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad \lambda = \mu. \end{cases}$$

Cela posé, l'hypothèse qu'il existe une relation linéaire entre les fonctions Φ_ν soit

$$a_1\Phi_1 + \ldots + a_n\Phi_n = 0,$$

conduit à la contradiction

$$\int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(\xi_\nu, x) \,.\, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x)dx = \sum a_\nu^2 = 0.$$

Ainsi, non seulement les fonctions Φ_ν mais encore les fonctions $f(\xi_\nu, x)$ sont linéairement indépendantes.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0$$

c'est que $D_f = 0$. Si n est l'ordre du premier mineur de D_f qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède n solutions linéairement indépendantes.

Cherchons maintenant les conditions de l'existence d'une solution de l'équation

$$S_f\varphi(x) = \psi(x)$$

dans l'hypothèse que $D_f = 0$ et les mineurs d'ordre inférieur à n soient nuls.

D'abord il faut démontrer une formule. Parce que la fonction

$$\alpha(x) = D_f\begin{pmatrix} x\,, & a_2 \ldots a_n \\ b_1\,, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$$

satisfait à l'équation

$$S_f\alpha(x) = 0,$$

$\alpha(x)$ est une fonction linéaire des fonctions $\Phi_\nu(x)$. En se rappelant que $\alpha(x)$ satisfait aussi à l'équation

$$S_{\bar{f}}\alpha(x) = 0$$

où bien à l'équation

$$\alpha(x) = -\int_0^1 F(x, y)\alpha(y)dy$$

on obtient immédiatement pour $\alpha(x)$ l'expression

$$(12) \qquad \alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha(\xi_\nu)\,\Phi_\nu(x).$$

Procédant d'une manière analogue avec la fonction

$$\beta(x) = D_f\begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 \ldots a_n \\ x\,, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$$

on parvient à l'expression

$$(13) \qquad \beta(x) = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta(\eta_\nu)\,\Psi_\nu(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\Psi_1(x) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} \xi_1\,, & \xi_2 \ldots \xi_n \\ x\,, & \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}$$

et ainsi de suite. On voit que ces n fonctions Ψ sont linéairement indépendantes.

Revenons maintenant à l'équation proposée et intégrons-la après l'avoir multipliée par

$$D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ x, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx$$

nous trouvons

$$\int_0^1 \varphi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ x, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(y) f(x, y) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ x, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \psi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ x, & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} dx.$$

Or, à cause de l'équation (4) on trouve que le premier membre est nul quelle que soit la fonction $\varphi(x)$.

Par conséquent $\psi(x)$ doit satisfaire à l'équation

$$(15) \qquad \int_0^1 \psi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ x, & b_1 \dots b_n \end{pmatrix} dx = 0$$

quels que soient les paramètres a et b. Le nombre de conditions paraît être infini, mais à cause de l'équation (13) le nombre se réduit à n à savoir les n équations

$$(15') \qquad \int_0^1 \psi(x) \Psi_\nu(x) dx = 0. \qquad (\nu = 1 \dots n)$$

Supposons ces conditions vérifiées et cherchons s'il existe, dans ce cas, une solution de l'équation (7).

Appliquons pour ce but la transformation S_g aux deux membres de l'équation (7) nous aurons

$$S_g S_f \varphi(x) = S_{F} \varphi(x) = S_g \psi(x).$$

Or,

$$S_F \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_1^n A_\nu \Phi_\nu(x).$$

Ainsi

$$\varphi(x) = S_g \psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Phi_\nu(x).$$

Cherchons maintenant si la valeur trouvée satisfait à l'équation (7). Pour cela il suffit de voir si $\varphi(x) = S_g \psi(x)$ satisfait à l'équation (7) car l'autre terme est une solution de l'équation homogène et peut être rejété. On a

$$S_f \varphi(x) = S_f S_g \psi(x) = S_G \psi(x)$$

où à cause de l'équation (4) et de la définition des fonctions Ψ_ν on a

$$G(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{n} f(x, \eta_\nu) \Psi_\nu(y).$$

Par conséquent on trouve à cause de l'équation (15)

$$\int_0^1 G(x, y) \psi(y) dy = 0$$

et par suite

$$S_G \psi(x) = \psi(x)$$

et

$$S_f \varphi(x) = \psi(x).$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$S_f \varphi(x) = \psi(x)$$

ait une solution s'expriment par les n équations (15).

10. Le système d'équations

$$(16) \qquad \varphi_\lambda(x) + \int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(x, y) \varphi_\nu(y) dy = \psi_\lambda(x) \qquad (\lambda = 1 \ldots n)$$

peut être ramené à une seule équation du type précédent.

Pour le montrer, définissons une fonction $F(x, y)$ pour des valeurs entre 0 et n par les n^2 conditions

$$F(x, y) = f_{\lambda\nu}(x - \lambda + 1, y - \nu + 1), \quad \text{pour} \quad 0 < \begin{matrix} x - \lambda + 1 \\ y - \nu + 1 \end{matrix} < 1$$

et une fonction Ψ par les n conditions

$$\Psi(x) = \psi_\lambda(x - \lambda + 1), \;\text{pour}\; 0 < x - \lambda + 1 < 1.$$

Si alors le déterminant de l'équation

$$\Phi(x) + \int_0^n F(x, y)\Phi(y)dy = \Psi(x) \tag{17}$$

est différent de zéro on en obtient une solution $\Phi(x)$ et une seule. Définissant ensuite les fonctions $\varphi_\lambda(x)$ par les conditions

$$\Phi(x) = \varphi_\lambda(x - \lambda + 1), \;\text{pour}\; 0 < x - \lambda + 1 < 1$$

on voit que ces fonctions satisfont au système proposé.

On voit aussi que c'est la seule solution qui puisse satisfaire au système donné car autrement il en résulterait une autre fonction $\Phi(x)$ satisfaisant à l'équation (17), ce qui n'est pas possible.

§ 3. *Sur la première variation du déterminant* D_f.

11. Calculons d'abord la première variation de

$$f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}.$$

Si nous désignons par la notation

$$x_1, x_2 \ldots (x_\lambda) \ldots x_n$$

la suite des valeurs $x_1, x_2 \ldots x_n$ à l'exception de x_λ, nous pouvons écrire

$$\delta f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} = \sum_{\lambda\mu} (-1)^{\lambda+\mu} f\begin{pmatrix} x_1 \ldots (x_\lambda) \ldots x_n \\ x_1 \ldots (x_\mu) \ldots x_n \end{pmatrix} \delta f(x_\lambda, x_\mu).$$

Multiplions les deux membres par $dx_1 \ldots dx_n$ et intégrons entre les limites 0 et 1. En observant que la notation des variables est indifférente nous aurons évidemment

$$\delta \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= n \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1\,,\ x_2 \ldots x_{n-1} \\ x_1\,,\ x_2 \ldots x_{n-1} \end{pmatrix} \delta f(x\,,\,x)\, dx\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$- n(n-1) \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} y\,,\ x_1 \ldots x_{n-2} \\ x\,,\ x_1 \ldots x_{n-2} \end{pmatrix} \delta f(x\,,\,y)\, dx\, dy\, dx_1 \ldots dx_{n-2}.$$

Multipliant par $\frac{1}{|\underline{n}}$ et faisant la somme depuis $n = 1$ jusqu'à ∞ nous obtenons

$$\delta D_f = \int_0^1 D_f \delta f(x\,,\,x) dx - \int_0^1 \int_0^1 D_f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \delta f(x\,,\,y) dx dy$$

ou

$$\delta \log D_f = \int_0^1 \delta f(x\,,\,x) dx - \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}}{D_f} \delta f(x\,,\,y) dx dy.$$

On a évidemment

$$\delta f(x\,,\,y) - \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}{D_f} \delta f(t\,,\,y) dt = S_f^{-1} \delta f(x\,,\,y).$$

Par conséquent on peut aussi écrire

$$(18) \qquad \delta \log D_f = \int_0^1 [S_f^{-1} \delta f(x\,,\,y)]_{x=y} dx.$$

En introduisant pour la transformation

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(y, x)\varphi(y)dy$$

la notation

$$T_f$$

on obtient une autre expression de la variation logarithmique de D_f à savoir

$$\partial \log D_f = \int_0^1 [T_f^{-1} \partial f(x, y)]_{x=y} dx. \tag{18 bis}$$

§ 4. *Le théorème de multiplication.*

12. Pour arriver au théorème de multiplication considérons deux transformations

$$S_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy,$$

$$S_g\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 g(x, y)\varphi(y)dy.$$

Posons le produit de ces deux transformations

$$S_f S_g = S_F$$

nous aurons

$$F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + \int_0^1 f(x, t)g(t, y)dt.$$

Considérant de même les transformations

$$T_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y, x)\varphi(y)dy,$$

$$T_g\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 g(y, x)\varphi(y)dy$$

nous aurons

$$T_g T_f = S_G$$

où

$$G(x, y) = f(y, x) + g(y, x) + \int_0^1 f(y, t) g(t, x) dt = F(y, x).$$

Nous avons trouvé

$$\partial \log D_F = \int_0^1 \partial F(x, x) dx - \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_F\binom{y}{x}}{D_F} \partial F(x, y) dx dy$$

formule qui peut s'écrire aussi (18)

$$\partial \log D_F = \int_0^1 [(S_f S_g)^{-1} \partial F(x, y)]_{x=y} dx \tag{19}$$

ou encore

$$\partial \log D_F = \int_0^1 [(T_g T_f)^{-1} \partial F(x, y)]_{x=y} dx. \tag{20}$$

Or

$$\partial F(x, y) = \partial f(x, y) + \partial g(x, y) + \int_0^1 [f(x, t) \partial g(t, y) + g(t, y) \partial f(x, t)] dt$$

$$= T_g \partial f(x, y) + S_f \partial g(x, y),$$

par conséquent en introduisant cette expression dans (19) et (20) on trouve

$$\partial \log D_F = \int_0^1 [(T_g T_f)^{-1} T_g \partial f(x, y) + (S_f S_g)^{-1} S_f \partial g(x, y)]_{x=y} dx$$

$$= \int_0^1 [T_f^{-1} \partial f(x, y) + S_g^{-1} \partial g(x, y)]_{x=y} dx$$

ou

$$\partial \log D_F = \partial \log D_f + \partial \log D_g.$$

Il s'ensuit que

$$\log D_F - \log D_f - \log D_g$$

ne dépend point des fonctions f et g. Alors, parce que pour $f = g = 0$ on a $D_F = D_f = D_g = 1$, on arrive au théorème

$$D_F = D_f D_g. \tag{21}$$

§ 5. *Développements divers.*

13. Nous avons vu que la fonction

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{D_f\binom{\xi}{\eta}}{D_f}$$

satisfait à l'équation

$$\varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 f(\xi, \tau)\varphi(\tau, \eta)dt = f(\xi, \eta). \tag{4_1}$$

Cherchons un développement de la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ de la forme

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi, \eta) - \varphi_2(\xi, \eta) + \varphi_3(\xi, \eta) + \ldots \tag{22}$$

où $\varphi_n(\xi, \eta)$ soit de dimension n par rapport à f.

Introduisant cette série dans l'équation (4_1) on trouve, en égalant à zéro la somme des termes de la même dimension par rapport à f, les équations

$$\varphi_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta),$$

$$\varphi_n(\xi, \eta) = \int_0^1 f(\xi, \tau)\varphi_{n-1}(\tau, \eta)dt \qquad n = 2, 3, .$$

d'où il vient

$$\varphi_n(\xi, \eta) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\xi, \tau_1)f(\tau_1, \tau_2) \ldots f(\tau_{n-1}, \eta)d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1}.$$

Le développement ainsi trouvé converge pourvu que la limite supérieure de f soit assez petite.

Rappelons maintenant la formule (6) que nous pouvons écrire pour $n = 1$

$$\lambda \frac{d \log D_{\lambda f}}{d\lambda} = \int_0^1 \varphi(\xi, \xi)d\xi$$

nous aurons, en introduisant pour $\varphi(\xi, \xi)$ l'expression (22), la formule

$$\log D_{\lambda f} = \lambda \int_0^1 f(x, x) dx - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) f(y, x) dx dy + \text{ etc.}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1) dx_1 \ldots dx_n$$

ou bien, si la série dans le second membre converge pour $\lambda = 1$

$$\log D_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1) dx_1 \ldots dx_n.$$

§ 6. *Le cas où $f(x, y)$ devient infini de telle manière que $(x-y)^\alpha f(x, y)$ reste fini.*

14. Soit $f(x, y)$ une fonction finie et intégrable, $i(x, y)$ une fonction telle que $(x-y)^\alpha i(x, y)$ soit fini et intégrable. Supposons que D_f soit nul ainsi que ses mineurs jusqu'à l'ordre n. Soit de plus

$$S_f S_i = S_i S_f,$$

on a évidemment

$$S_i \Phi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\mu} \Phi_\mu(x), \qquad (\lambda = 1, \ldots, n) \tag{23}$$

$\Phi_1(x) \ldots \Phi_n(x)$ étant les n solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$S_f \varphi(x) = 0.$$

Soit

$$T_f \varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y, x) \varphi(y) dy$$

nous aurons

$$T_i \Psi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\lambda\mu} \Psi_\mu(x) \qquad (\lambda = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

$\Psi_1(x) \ldots \Psi_n(x)$ étant les n solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$T_f \Psi(x) = 0.$$

Je dis que le déterminant des coefficients $p_{\lambda\mu}$ est égal à celui des coefficients $q_{\lambda\mu}$.

Je le démontre en supposant que le déterminant des quantités

$$c_{\lambda\mu} = \int_0^1 \Phi_\lambda(x)\Psi_\mu(x)dx$$

soit différent de zéro, un simple raisonnement par continuité permettant évidemment d'étendre la proposition au cas où le déterminant est nul.

Observant qu'on a identiquement

$$\int_0^1 \Psi(x)S_i\Phi(x)dx = \int_0^1 \Phi(x)T_i\Psi(x)dx$$

on obtient en tenant compte des équations (23) et (24)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu\mu}p_{\lambda\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu}q_{\mu\nu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, n)$$

d'où résulte immédiatement le résultat cherché.

15. Désignons par $i(x, y)$ une fonction à laquelle appartient la transformation S_i. Nous allons chercher les conditions dans lesquelles il existe une transformation inverse de S_i en supposant que $i(x, y)$ devient infini de telle manière que $(x - y)^\alpha i(x, y)$ reste fini, α étant un nombre inférieur à l'unité.

Posons

$$i_\nu(x, y) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 i(x, t_1)i(t_1, t_2)\ldots i(t_{\nu-1}, y)dt_1\ldots dt_{\nu-1}$$

et

$$k(x, y) = -i(x, y) + i_2(x, y) - \ldots + (-1)^{n-1}i_{n-1}(x, y)$$

nous aurons

$$S_k S_i = S_i S_k = S_f$$

où

$$f(x, y) = (-1)^{n-1}i_n(x, y).$$

Si on a choisi n tel que

$$n > \frac{1}{1-\alpha}.$$

$i_n(x, y)$ ne devient plus infini.

Pour le démontrer observons qu'on peut écrire

$$(25) \qquad \int_0^1 \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-y|^\beta} < \frac{\Psi(\alpha, \beta)}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}}$$

où $\Psi(\alpha, \beta)$ est une fonction finie tant que

$$0 < \alpha < 1 \,, \quad 0 < \beta < 1 \,, \quad \alpha + \beta < 1 .$$

L'inégalité (25) se démontre facilement en faisant dans l'intégrale le changement de variable

$$t = x + (y - x)s .$$

L'application répétée de l'inégalité (25) par rapport à l'inégalité

$$|i(x, y)| < \frac{a}{|x-y|^\alpha}$$

conduit facilement au résultat que

$$|i_\nu(x, y)| < \frac{a_\nu}{|x-y|^{\nu\alpha-\nu+1}}$$

tant que

$$\nu\alpha - \nu + 1 < 0$$

c'est à dire tant que

$$\nu < \frac{1}{1-\alpha} .$$

Soit

$$\frac{1}{1-\alpha} - 1 < n - 1 < \frac{1}{1-\alpha}$$

nous aurons

$$|i_n(x, y)| < \int_0^1 \frac{a_{n-1} a \,.\, dt}{|x-t|^{(n-1)\alpha-n+2} |t-y|^\alpha} .$$

De cette inégalité il vient qu'il existe une limite supérieure finie pour $i_n(x, y)$.

16. Les résultats ainsi obtenus s'étendent prèsque immédiatement à des transformations plus générales

$$S_i\varphi(x_1 \ldots x_n) = \varphi(x_1 \ldots x_n) + \int_0^1 \cdots \int_0^1 i(x_1 \ldots x_n\,;\, y_1 \ldots y_n)\varphi(y_1 \ldots y_n)dy_1 \ldots dy_n$$

en admettant que $i(x_1 \ldots x_n\,;\, y_1 \ldots y_n)$ devient infini de manière que

$$r^\alpha \,.\, i(x_1 \ldots y_1 \ldots)$$

reste fini, α étant un nombre convenablement choisi, inférieur à n, et r la distance des points dont les coordonnées cartésiennes sont $x_1 \ldots x_n$ et $y_1 \ldots y_n$ respectivement.

On a en effet

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - y_\nu)^2 > n \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n} (x_\nu - y_\nu)^2}$$

ou

$$r \geqq \sqrt{n} \prod_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu|^{\frac{1}{n}}.$$

Par conséquent il existe un nombre a tel que

$$|i| \leqq \frac{a}{\prod_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu|^{\frac{\alpha}{n}}}.$$

Nous définissons de la même manière qu'auparavant les fonctions i_ν, c'est à dire nous posons

$$i_\nu(x_1 \ldots x_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 i(x_1 \ldots x_n\,;\, t_1 \ldots t_n)\, i_{\nu-1}(t_1 \ldots t_n)dt_1 \ldots dt_n.$$

Par un raisonnement analogue à celui employé dans le cas précédent nous arrivons à l'inégalité

$$|i_\lambda(x_1 \ldots x_n\,,\, y_1 \ldots y_n)| < \frac{a_\nu}{\left\{\prod |x_\nu - y_\nu|\right\}^{\frac{\lambda\alpha}{n} - \lambda + 1}};$$

et de cette inégalité nous tirons le résultat que i_λ ne devient infini si $\lambda > \dfrac{1}{1 - \frac{\alpha}{n}}$.

17. Pour montrer comment ces résultats s'appliquent à la résolution d'une équation

$$S_i\varphi(x) = \psi(x)$$

je me restreins, pour abréger l'écriture, au cas où i ne dépend que de deux variables.

Appliquant aux deux membres de l'équation proposée la transformation S_k, nous aurons

$$S_k S_i\varphi(x) = S_f\varphi(x) = S_k\psi(x).$$

Ici f et $S_k\psi(x)$ sont des fonctions finies et évidemment aussi intégrables. Par suite nous pouvons appliquer à l'équation

$$S_f\varphi(x) = S_k\psi(x) \tag{26}$$

les procédés exposés dans le paragraphe 2.

Supposons, pour nous placer dans l'hypothèse la plus générale, que D_f soit nul ainsi que ses mineurs jusqu'à l'ordre n et employons les notations du § 2.

Nous avons en appliquant aux deux membres de l'équation (7) la transformation *pseudo-inverse* de S_f

$$S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x) = S_g S_k\psi(x)$$

ou

$$\varphi(x) = S_g S_k\psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(x).$$

S'il existe une solution de l'équation proposée on peut déterminer les coefficients c_ν de manière que $S_i\varphi(x)$ soit égale à $\psi(x)$.

18. Parmi les cas où cette détermination est possible il y a un qui me paraît mériter l'attention. C'est le cas où l'équation

$$S_i\varphi(x) = 0$$

n'admet que la solution

$$\varphi(x) = 0.$$

Nous avons évidemment

$$S_i S_k = S_k S_i.$$

Par conséquent

$$S_i \Phi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\mu} \Phi_\mu(x)$$

où le déterminant des coefficients $p_{\lambda\mu}$ est différent de zéro, les fonctions Φ_μ étant linéairement indépendantes et l'équation

$$S_i \varphi(x) = 0$$

n'admettant que la solution $\varphi(x) = 0$.

Le déterminant des $p_{\lambda\mu}$ n'étant pas nul le déterminant des $q_{\lambda\mu}$ est aussi différent de zéro. Il s'ensuit que l'équation

$$T_i \varphi(x) = 0$$

n'admet que la solution $\varphi(x) = 0$ et que l'on a

$$(27) \qquad \left.\begin{aligned} S_k \Phi_\lambda(x) &= 0, \\ T_k \Psi_\lambda(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

Cela posé, mettant

$$\varphi_0(x) = S_g S_k \psi(x)$$

nous aurons

$$S_f \varphi_0(x) = S_f S_g S_k \psi(x) = S_a S_k \psi(x)$$

$$= S_k \psi(x) - \sum_{\nu=1}^{n} f(x, \eta_\nu) \int_0^1 \psi_\nu(x) S_k \psi(x) dx.$$

Or on a identiquement

$$\int_0^1 \psi_\nu(x) S_k \psi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) T_k \psi_\nu(x) dx = 0.$$

Par suite

$$S_f \varphi_0(x) - S_k \psi(x) = 0$$

ou

$$S_k\big(S_i \varphi_0(x) - \psi(x)\big) = 0$$

d'où on conclut

$$S_i \varphi_0(x) = \psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x)$$

les a_ν étant des nombres connus.

Posant maintenant

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(x)$$

on obtient

$$S_i\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} p_{\lambda\nu} c_\lambda \Phi_\nu(x).$$

Or, le déterminant des coefficients $p_{\lambda\nu}$ n'étant pas nul on peut évidemment déterminer les c_ν de manière que l'on ait

$$S_i\varphi(x) = \psi(x).$$

C. Q. F. D.

Fac-similé d'une lettre d'Abel.

Nous publions ici en fac-similé la dernière page d'un manuscrit d'Abel composé de quatre pages et contenant le mémoire: *Notes sur quelques formules elliptiques* (voir Crelle, t. 4, p. 85—93, Holmboe, t. 1, p. 299—308, Sylow et Lie, t. 1, p. 466—477).

La lettre est absolument inédite. Les annotations d'une écriture qui n'est pas celle d'Abel sont de la main de Crelle.

Le manuscrit de même que celui que nous avons publié au tome 26 de ce journal fait partie de la collection Manzoni. Dans le catalogue de vente, il porte le numéro 3 et il y est indiqué qu'il a appartenu à la collection Libri. La date 25 septembre 1828 a été supprimée par Crelle. La raison a dû en être que le § 1 du second mémoire *Recherches sur les fonctions elliptiques*, publié sous le titre *Théorèmes sur les fonctions elliptiques* et portant la date 27 août 1828, n'a paru que dans le cahier qui suit celui où ont paru les *Notes*. La lettre semble d'un très grand intérêt en raison de ses indications sur les derniers mois de la vie d'Abel.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

REDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

28

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1904

BERLIN
MAYER & MULLER.
PRINZ LOUISFERDINANDSTRASSE 2

PARIS
A. HERMANN

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM

NIELS HENRIK ABEL

IN MEMORIAM

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 28. — 1904. — TOME 28.

ÜBER DEN DIVERGENZ-CHARAKTER GEWISSER POTENZREIHEN AN DER CONVERGENZGRENZE

VON

ALFRED PRINGSHEIM

in MÜNCHEN.

Bedeutet $\sum c_\nu$ eine *convergente*, $\sum d_\nu$ eine *divergente* Reihe mit beliebigen (d. h. complexen) Gliedern von der Beschaffenheit, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 1, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|d_\nu|} = 1,$$

so besitzen die Potenzreihen $\sum c_\nu x^\nu$, $\sum d_\nu x^\nu$ allemal den Convergenz-Radius $|x| = 1$. Versteht man sodann unter ρ eine *positive* Veränderliche $\leqq 1$, so besagt zunächst ein von ABEL [1] bewiesener Fundamentalsatz, dass:

$$\text{(I)} \qquad \lim_{\rho=1} \sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu \rho^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu .$$

ABEL hat aber auch bereits das Verhalten von $\lim_{\rho=1} \sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu \rho^\nu$ in den Kreis

[1] Journ. f. Math., Bd. 1 (1826), p. 314, Lehrsatz IV = Oeuvres, Éd. SYLOW-LIE, T. 1, p. 223. Ich habe schon bei früherer Gelegenheit (Münch. Sitz.-Ber., Bd. 27 [1897], p. 344) hervorgehoben, dass der betreffende ABEL'sche Beweis, in Wahrheit einfacher ist und das *Wesen* der Sache deutlicher hervortreten lässt, als der auf LIOUVILLE's Veranlassung von DIRICHLET (Journ. de Math. (2), T. 7 [1863], p. 253) mitgetheilte Beweis. ABEL beweist nämlich nicht nur, wie DIRICHLET, die Existenz der Beziehung (I), also die *Stetigkeit* der Reihensumme für $\rho \leqq 1$, sondern geradezu die *gleichmässige* Convergenz der Reihe für $\rho \leqq 1$.

seiner Betrachtungen gezogen, wie das folgende von ihm im 2ten Bande des Crelle'schen Journals (1827)[1] gestellte *Problem* zeigt:

»En supposant la série:

$$f(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots$$ [2]

convergente pour toute valeur positive *moindre* que la quantité positive α, on propose de trouver la limite vers laquelle converge la valeur de la fonction $f(\rho)$ en faisant converger ρ vers la limite α.«

Da nämlich der Fall $a_\nu \alpha^\nu = c_\nu$ durch den Satz (I) schon vollkommen erledigt ist, so kann sich das vorliegende Problem nur noch auf die Annahme $a_\nu \alpha^\nu = d_\nu$ beziehen. Abel selbst hat dasselbe späterhin für den Fall *reeller positiver* d_ν in soweit erledigt, als er in einer aus seinem Nachlasse publicierten Note[3] gezeigt, dass:

$$\text{(II)} \qquad \lim_{\rho=1} \sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu \rho^\nu = +\infty \quad (d_\nu > 0, \text{ zum mindesten für } \nu \geqq n),$$

ein Resultat, das sich leicht in folgender Weise verallgemeinern lässt[4]: Es ist

$$\text{(III)} \qquad \lim_{\rho=1} \left| \sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu \rho_\nu^\nu \right| = +\infty,$$

falls die Reihe $\Sigma d_\nu = \Sigma(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ *eigentlich*, d. h. falls *mindestens eine* der beiden Reihen $\Sigma\alpha_\nu$, $\Sigma\beta_\nu$ nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergirt.

Es entsteht nun bei schärferer Auffassung der obigen Abel'schen Fragestellung und im Anschlusse an das in den Gleichungen (II), (III) enthaltene Ergebniss die weitere Aufgabe: Wie lässt sich das Bildungsgesetz der d_ν, bezw. die Art ihres Verhaltens für $\lim \nu = \infty$ verwerthen, um über *die Art des Unendlichwerdens* von $\lim\limits_{\rho=1} f(\rho)$ oder, wie ich es bezeichnen will, über *den Divergenz-Charakter* von $\lim\limits_{\rho=1} \sum\limits_0^\infty {}_\nu\, d_\nu \rho^\nu$ genauere Aus-

[1] A. a. O. p. 286 = Oeuvres, T. 1, p. 618.

[2] Bei Abel steht x statt ρ. (Ich schreibe ρ, um die nöthige Übereinstimmung mit den sonst hier gewählten Bezeichnungen zu erzielen.)

[3] Oeuvres, T. 2, p. 203.

[4] Münch. Sitz.-Ber., Bd. 30 (1900), p. 39.

sagen zu machen?[1] Diese Aufgabe soll für gewisse Fälle und zwar mit einer sogleich noch näher anzugebenden, nicht unwesentlichen Verallgemeinerung des betreffenden Grenzüberganges im folgenden beantwortet werden. Es wird sich zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen zwischen jenem *Divergenz-Charakter* und dem *Divergenz-Maasse* von $\sum d_\nu$, d. h. der Art des Unendlichwerdens von $\sum_0^n{}_\nu\, d_\nu$ für $\lim n = \infty$, ausserordentlich einfache und praegnante Beziehungen bestehen.

---

1. Wie Herr Stolz zuerst gezeigt hat,[2] lässt sich der Abel'sche Satz (I) dahin verallgemeinern, dass:

$$\text{(I a)} \qquad \lim_{x=1} \sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu$$

wird, auch wenn x *nicht*, wie die Fassung (I) verlangt, *auf der reellen Axe*, sondern auf einem *beliebigen*, dem Innern des Einheitskreises angehörigen *Strahle*, bezw. — was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft — auf einer *beliebigen, den Kreis nicht tangirenden Curve*[3] der Stelle 1 zustrebt; oder, noch etwas anders ausgesprochen, dass die Reihe $\sum c_\nu x^\nu$ *gleichmässig*

[1] Eine andere aus der Abel'schen Fragestellung erwachsende und wohl sicherlich auch schon von Abel (etwa im Anschlusse an das viel citirte, klassische Beispiel: $\lim_{\rho=1} \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \rho^\nu = \frac{1}{2}$) ausdrücklich dabei in's Auge gefasste Aufgabe ist die folgende: »Wann existirt im Falle *uneigentlicher* Divergenz von $\sum d_\nu$ *eine bestimmte Zahl* $\lim_{\rho=1} f(\rho)$ und wie kann dieselbe als Function der d_ν dargestellt oder zum mindesten aus den d_ν numerisch berechnet werden?« Theilweise Lösungen dieser Aufgabe geben der bekannte Satz von Frobenius (Journ. f. Math. Bd. 89 [1880], p. 262) und dessen Verallgemeinerungen durch Hoelder (Math. Ann. Bd. 20 [1882], p. 535), sowie Borel's »limite généralisée« (Journ. de Math. (4), T. 12 [1896], p. 103).

[2] Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 20 [1875], p. 370; desgl. Jahrg. 29 (1884), p. 127.

[3] Picard, *Traité d'Analyse*, T. 2 (1893), p. 73.

convergirt *im Innern und auf der Begrenzung* jedes durch den Punkt 1 und zwei beliebige Innenpunkte des Einheitskreises gelegten *Dreiecks.*[1]

Die Grundlage für eine derartige Verallgemeinerung des Satzes (I), wie auch ähnlicher auf Reihen der Form $\Sigma d_\nu x^\nu$ bezüglicher Grenzwerthsätze, wird am zweckmässigsten durch das folgende Lemma geschaffen:[2]

Lemma. *Setzt man:*

$$x' = 1 - \delta . e^{\varphi i}$$

und beschränkt δ *auf das Intervall:* $0 < \delta \leqq \cos\varphi$, *wo:* $|\varphi| \leqq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, *so hat man stets:*

$$\frac{|1 - x'|}{1 - |x'|} < \frac{2}{\cos\varphi} \leqq \gamma \tag{1}$$

(*anders geschrieben:*

$$|1 - \delta . e^{\varphi i}| < 1 - \frac{\delta}{\gamma}), \tag{1a}$$

wo:

$$\gamma = \frac{2}{\cos\varphi_0}, \text{ d. h. eine bestimmte positive Zahl.}$$

Beweis. Man hat:

$$|x'|^2 = 1 + \delta^2 - 2\delta . \cos\varphi,$$

also:

$$\begin{aligned} 1 - |x'|^2 &= \delta(2 \cos\varphi - \delta) \\ &\geqq \delta . \cos\varphi \qquad (\text{wegen: } \delta \leqq \cos\varphi) \\ &\geqq |1 - x'| . \cos\varphi \quad (\text{wegen: } \delta = |1 - x'|), \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \frac{|1 - x'|}{1 - |x'|} &< \frac{1 + |x'|}{\cos\varphi} \\ &< \frac{2}{\cos\varphi} \leqq \frac{2}{\cos\varphi_0}, \end{aligned} \qquad \text{q. e. d.}$$

---

[1] Münch. Sitz.-Ber., Bd. 27 (1897), p. 347.

[2] Vgl. Münch. Sitz.-Ber., Bd. 31 (1901), p. 514.

Der in dem vorstehenden Lemma definirte Bereich von Werthen x' soll im folgenden stets schlechthin als der Bereich $x = x'$ oder (x') bezeichnet werden. Geometrisch gesprochen wird derselbe begrenzt durch die Hälften der beiden Sehnen, welche mit der reellen Axe im Punkte 1 den Winkel φ_0 bilden, und durch den dazwischen liegenden Bogen eines um den Punkt $\frac{1}{2}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ beschriebenen Kreises.

2. Versucht man jetzt den Satz (II) in analoger Weise zu verallgemeinern, so zeigt sich, dass die Gleichung:

$$\text{(II a)} \qquad \lim_{x'=1} \left| \sum_0^{\infty} d_\nu x'^\nu \right| = \infty$$

keineswegs allgemein richtig ist, selbst wenn man sich, wie bei (II), zunächst auf den Fall *reeller positiver* d_ν beschränkt. Um dies zu erkennen, betrachte man z. B. die Potenzreihe:

$$e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \left(\sum_0^{\infty} (\mu+1) x^\mu \right)^\lambda$$
$$= \mathfrak{P}(x),$$

welche offenbar durchweg *positive* Coefficienten besitzt. Man hat dann zunächst für *reelle* $x = \rho$:

$$\lim_{\rho=1} \mathfrak{P}(\rho) = \lim_{\rho=1-0} e^{\left(\frac{1}{1-\rho}\right)^2} = +\infty,$$

woraus mit Sicherheit folgt, dass die aus lauter *positiven* Gliedern bestehende Reihe $\mathfrak{P}(1)$ *divergiren* muss und somit $\mathfrak{P}(x)$ in der That dem Typus $\sum d_\nu x^\nu$ $(d_\nu > 0)$ angehört. Sodann ist aber:

$$|\mathfrak{P}(x')| = |\mathfrak{P}(1 - \delta \cdot e^{\varphi i})| = \left| e^{\frac{1}{\delta^2} \cdot e^{-2\varphi i}} \right|$$
$$= e^{\frac{1}{\delta^2} \cdot \cos 2\varphi}$$

und daher:

$$\lim_{x'=1} |\mathfrak{P}(x')| \begin{cases} = 1 & \text{für:} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \\ = 0 & \text{für:} \quad \frac{\pi}{4} < \varphi \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dass es aber andererseits auch Reihen $\sum d_\nu x^\nu$ giebt, welche jener *erweiterten* Grenzbeziehung (IIa) genügen, wird unmittelbar ersichtlich, wenn man Ungl. (1) folgendermassen schreibt:

$$\frac{\left|\sum_0^\infty {}_\nu\, x'^\nu\right|}{\sum_0^\infty {}_\nu\, |x'|^\nu} < \frac{1}{\gamma}, \tag{2}$$

sodass also hier in der That die Beziehung $\lim\limits_{x'=1} \sum\limits_0^\infty {}_\nu\, |x'|^\nu = \infty$ ohne weiteres auch die folgende nach sich zieht:

$$\lim_{x'=1} \left|\sum_0^\infty {}_\nu\, x'^\nu\right| = \infty.$$

Das analoge wird offenbar auf Grund des Satzes (III) allemal dann stattfinden, wenn $\sum d_\nu$ *eigentlich* divergirt und $\sum d_\nu x'^\nu$ der folgenden, Ungl. (2) nachgebildeten Bedingung genügt:

$$\left|\frac{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu |x'|^\nu}\right| \geqq \alpha > 0 \tag{A}$$

(zum mindesten für alle x' einer gewissen Umgebung der Stelle 1).

Es erscheint zweckmässig, die durch Ungl. (A) definirte Eigenschaft der Reihe $\sum d_\nu x'^\nu$ durch einen besonderen Ausdruck zu bezeichnen, etwa: *die Reihe $\sum d_\nu x^\nu$ gehe im Bereiche $x = x'$ bei $x' = 1$* **gleichmässig** *zur Divergenz über*, oder kürzer, wenn auch weniger correct, *die Reihe $\sum d_\nu x'^\nu$ divergire bei $x' = 1$* **gleichmässig**.

Auf Grund dieser Definition ergiebt sich unmittelbar:

Ist:

$$\lim_{x'=1} \left|\frac{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu |x'|^\nu}\right| = \alpha > 0, \tag{B}$$

so divergirt $\sum d_\nu x'^\nu$ bei $x' = 1$ **gleichmässig**.

3. Solche *gleichmässig divergente* Potenzreihen $\sum d_\nu x^\nu$ können als *Vergleichsreihen* benützt werden, um über die Convergenz und den Divergenz-Charakter anderer Potenzreihen bestimmte Aussagen zu machen. Dabei will ich mich hier auf die Annahme $d_\nu > 0$ beschränken.[1] Alsdann gilt zunächst der folgende Satz:

Ist $\sum d_\nu x^\nu$ *(wo* $d_\nu > 0$*) für* $|x| < 1$ *convergent, bei* $x = x' = 1$ *gleichmässig divergent und besitzt* $\sum a_\nu$ *das g-fache Divergenz-Maass der Reihe* $\sum d_\nu$*, d. h. ist:*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_0^n {}_\nu\, a_\nu}{\sum_0^n {}_\nu\, d_\nu} = g \quad (g \text{ eine beliebige complexe Zahl incl. } 0), \tag{3}$$

so convergirt auch $\sum a_\nu x^\nu$ *für* $|x| < 1$ *und divergirt bei* $x = x' = 1$ *gleichmässig. Dabei ist:*

$$\lim_{x=0} \frac{\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu}{\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu x^\nu} = g. \tag{4}$$

Beweis. Setzt man zur Abkürzung:

$$\sum_0^n {}_\nu\, d_\nu = D_n, \qquad \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu = A_n,$$

---

[1] Man kann diese Beschränkung ohne weiteres fallen lassen, wenn man statt der Bedingung (A) die folgende einführt:

$$\frac{\left|\sum_0^\infty {}_\nu\, d_\nu x^\nu\right|}{\sum_0^\infty {}_\nu\, |d_\nu x^\nu|} > a > 0$$

(vgl. E. Lasker, *Über Reihen auf der Convergenzgrenze*, Lond. Phil. Transactions, Vol. 196 [1901], p. 433). Übrigens genügt es selbstverständlich zur Ableitung der im Texte angegebenen Resultate, wenn die Bedingung $d_\nu > 0$ erst von einer bestimmten Stelle $\nu \geq n$ anfangend erfüllt ist, da die Beschaffenheit einer beliebigen endlichen Anzahl von Anfangsgliedern bei der fraglichen Art von Betrachtungen ohne Belang ist. (Vgl. Nr. 6.)

so convergirt zunächst gleichzeitig mit der Reihe $\sum d_\nu x^\nu$ auch die Reihe $\sum D_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$ (wegen: $\frac{1}{1-x}\sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, D_\nu x^\nu$), folglich auf Grund der Voraussetzung (3) auch $\sum A_\nu x^\nu$ und somit schliesslich auch $\sum a_\nu x^\nu$ (wegen: $(1-x)\,.\sum_0^\infty{}_\nu\, A_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$).

Man hat sodann, wenn m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet:

$$\sum_1^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu = (1-x')\,.\left\{\sum_0^{m-1}{}_\nu\, A_\nu x'^\nu + \sum_m^\infty{}_\nu\, A_\nu x'^\nu\right\}$$

also:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu\right| \leqq |1-x'|\,.\left\{\left|\sum_0^{m-1}{}_\nu\, A_\nu x'^\nu\right| + \sum_m^\infty{}_\nu\, |A_\nu x'^\nu|\right\}.$$

Es werde nun zunächst angenommen, dass $g = 0$. Bringt man alsdann $|A_\nu|$ auf die Form:

$$|A_\nu| = \left|\frac{A_\nu}{D_\nu}\right|.\,D_\nu = \varepsilon_\nu\,.\,D_\nu,$$

so haben, wegen $\lim\frac{A_\nu}{D_\nu} = 0$, die ε_ν für $\nu = m, m+1, \ldots$ *in inf.* eine obere Grenze $\bar{\varepsilon}_m$, welche durch Wahl von m *beliebig klein* gemacht werden kann, und man hat:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu\right| < |1-x'|\,.\left\{\left|\sum_0^{m-1}{}_\nu\, A_\nu x'^\nu\right| + \bar{\varepsilon}_m \sum_m^\infty{}_\nu\, D_\nu\,.\,|x'|^\nu\right\}.$$

Andererseits hat man nach Ungl. (A), sofern man x' auf eine passend gewählte Umgebung der Stelle 1 einschränkt:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu x'^\nu\right| \geqq \alpha\,.\sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu\,.\,|x'|^\nu = \alpha\,.\,(1-|x'|)\,.\sum_0^\infty{}_\nu\, D_\nu\,.\,|x'|^\nu$$

$$> \frac{\alpha}{\gamma}\,.\,|1-x'|\,.\sum_0^\infty{}_\nu\, D_\nu\,.\,|x'|^\nu \quad \text{(nach Ungl. (1))}$$

und daher:

$$\left|\frac{\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty{}_\nu\, d_\nu x'^\nu}\right| < \frac{\gamma}{\alpha}\,.\left\{\frac{\left|\sum_0^{m-1}{}_\nu\, A_\nu x'^\nu\right|}{\sum_0^\infty{}_\nu\, D_\nu |x'|^\nu} + \bar{\varepsilon}_m\right\},$$

somit — wegen $\lim\limits_{x'=1} \sum_0^\infty{}^{\nu} D_\nu |x'|^\nu = +\infty$:

$$\lim_{x'=1} \left| \frac{\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty{}^{\nu} d_\nu x'^\nu} \right| < \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \bar{\varepsilon}_m$$

d. h., mit Rücksicht auf die oben über $\bar{\varepsilon}_m$ gemachte Bemerkung, schliesslich:

$$\lim_{x'=1} \frac{\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty{}^{\nu} d_\nu x'^\nu} = 0,$$

womit zunächst die Behauptung (4) für den Fall $g = 0$ bewiesen ist.

Ist jetzt g von 0 verschieden und schreibt man die Voraussetzung (3) folgendermaassen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_0^n{}^{\nu} (a_\nu - g \cdot d_\nu)}{\sum_0^n{}^{\nu} d_\nu} = 0,$$

so folgt unmittelbar aus dem eben bewiesenen Satze, dass:

$$\lim_{x'=1} \frac{\sum_0^\infty{}^{\nu} (a_\nu - g \cdot d_\nu) \cdot x'^\nu}{\sum_0^\infty{}^{\nu} d_\nu x'^\nu} = 0,$$

also:

(4) $$\lim_{x'=1} \frac{\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x'^\nu}{\sum_0^\infty{}^{\nu} d_\nu x'^\nu} = g,$$ q. e. d.

Zusatz. Nach dem CAUCHY-STOLZ'schen Grenzwerthsatze [1] hat man:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n} = g,$$

allemal wenn:

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g.$$

Ist also diese letztere (*engere*) Bedingung erfüllt, so besteht gleichfalls die Relation (4) (wie übrigens auch ganz analog, wie oben, *direct* bewiesen werden könnte).

4. Um den Satz von Nr. 3 wirklich anwenden zu können, hat man sich vor allem geeignete Vergleichsreihen von dem dort mit $\sum d_\nu x^\nu$ bezeichneten Typus zu verschaffen. Mit Hülfe der für $|x| < 1$ gültigen binomischen Entwickelung:

$$(1 - x)^{-p} = \sum_0^\infty {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \, . \, x^\nu,$$

wo für $\nu = 0$:

$$(p - 1)_0 = 1$$

und für $\nu \geqq 1$:

$$(p + \nu - 1)_\nu = \frac{p \, . \, (p + 1) \dots (p + \nu - 1)}{1 \, . \, 2 \dots \nu} > 0, \quad \text{wenn } p > 0,$$

gewinnt man, nach Analogie von Ungl. (2), durch Erhebung von Ungl. (1) in die $(-p)^{\text{te}}$ Potenz die Beziehung:

$$(6) \qquad \frac{\left| \sum_0^\infty {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \, . \, x'^\nu \right|}{\sum_0^\infty {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \, . \, |x'|^\nu} < \left(\frac{1}{\gamma}\right)^p \quad (p > 0).$$

Da andererseits:

$$\sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = 1 + p_1 + (p + 1)_2 + \dots (p + n - 1)_n$$
$$= (p + n)_n$$

[1] STOLZ, Math. Ann., Bd. 14 (1879), p. 232. Vorl. über allgem. Arithm. Bd. 1., p. 173.

(wegen: $1 + p_1 = (p+1)_1$ und $(p+k)_\nu + (p+k)_{\nu+1} = (p+k+1)_{\nu+1}$), so erhält man durch Anwendung des Satzes von Nr. 3 den folgenden Satz:

Man hat:

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^p \cdot \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = g, \tag{7}$$

wenn:

$$\sum_0^n a_\nu \cong (p+n)_n \cdot g \quad \text{bezw.} \quad a_n \cong (p+n-1)_n \cdot g. \tag{8}$$ [1]

Mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(p+n)_n}{n^p} = \Gamma(p+1)$$

kann man dann die Relationen (7), (8) auch durch die folgenden ersetzen:

$$\left.\begin{array}{lll} (9) & \lim\limits_{x'=1} (1 - x')^p \cdot \sum\limits_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p+1) \cdot g, & \text{wenn: } \sum\limits_0^n {}_\nu\, a_\nu \cong g \cdot n^p \\ (10) & \lim\limits_{x'=1} (1 - x')^p \cdot \sum\limits_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p) \cdot g, & \text{wenn: } a_n \cong g \cdot n^{p-1} \end{array}\right\} (p > 0).$$

Satz (10) für *reelle positive* x' und a_ν rührt bekanntlich von Herrn Appell her.[2]

5. Es werde nun vorläufig mit λ_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) eine unbegrenzt fortsetzbare Folge positiver Zahlen bezeichnet, welche gleichzeitig mit ν *monoton* (zum mindestens für $\nu > n$) in's Unendliche wachsen und zwar schliess-

---

[1] Eine Relation von der Form:

$$A_n \cong g \cdot B_n$$

bedeutet:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = g.$$

(Vergl. Encykl. der Math. Wiss. Bd. 1, p. 75, Gl. (13)).

[2] Comptes rendus, T. 87 (1878), p. 689. Vgl. im übrigen: Münch. Sitz.-Ber., Bd. 31 (1901), p. 522.

lich *langsamer*, als $(\nu + 1)^{\varepsilon}$ für jedes noch so kleine $\varepsilon < 0$. Dies besagt: jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich eine gewisse natürliche Zahl n_{ε} so zuordnen, dass:

$$1 < \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\varepsilon} \quad \text{für} \quad \nu > n_{\varepsilon}. \tag{11}$$

Da man jedenfalls von vornherein $\varepsilon < 1$ annehmen kann, so hat man also:

$$1 < \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < 1 + \frac{\varepsilon}{\nu}$$

und daher:

$$0 < \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda_\nu}{\nu} \tag{12a}$$

für jedes positive $\varepsilon < 1$ und $\nu > n_{\varepsilon}$. Durch Division mit $\lambda_\nu \,.\, \lambda_{\nu-1}$ folgt sodann, dass analog:

$$0 < \lambda_{\nu-1}^{-1} - \lambda_\nu^{-1} < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda_\nu^{-1}}{\nu} \tag{12b}$$

sodass man also setzen kann:

$$\left.\begin{array}{lr} (13\text{a}) & \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} = \varepsilon_\nu \,.\, \dfrac{\lambda_\nu}{\nu} \\ \text{bezw.:} & \\ (13\text{b}) & \lambda_{\nu-1}^{-1} - \lambda_\nu^{-1} = \varepsilon_\nu \,.\, \dfrac{\lambda_\nu^{-1}}{\nu} \end{array}\right\} \text{wo: } \varepsilon_\nu > 0,\ \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0.$$

Wir wollen nunmehr, von der ursprünglich zur Charakterisirung der λ_ν, eingeführten (engeren) Bedingung (11) absehend, unter λ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine positive Zahlenfolge verstehen, welche der Bedingung (13a) bezw. (13b) genügt, mit dem Zusatze, dass $\lim_{\nu=\infty} \lambda_\nu = \infty$ und $\frac{\lambda_\nu}{\nu}$, zum mindesten von einem gewissen Werthe ν anfangend, *monoton* gegen Null abnimmt.[1]

[1] Diese Bedingung ist gleichfalls in der ursprünglichen Bedingung (11) enthalten. Denn darnach hätte man, zum mindesten von einem bestimmten ν ab:

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < \frac{\nu+1}{\nu} < \frac{\nu}{\nu-1},$$

also in der That:

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu} < \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu-1}.$$

Bedeutet dann r eine *stetige* positive Veränderliche, so soll unter $\lambda(r)$ eine positive monotone Function verstanden werden, die im übrigen lediglich der Bedingung zu genügen hat:

$$\lambda(\nu) = \lambda_\nu . \tag{14}$$

Substituirt man jetzt in (13a) der Reihe nach $\nu = (n+1), (n+2), \ldots, pn$ (wo p eine beliebige natürliche Zahl), so folgt durch Addition:

$$\lambda_{pn} - \lambda_n = \sum_{n+1}^{pn}{}_\nu\, \varepsilon_\nu \cdot \frac{\lambda_\nu}{\nu} .$$

Die ε_ν haben für $\nu = (n+1), (n+2), \ldots$ *in inf.* eine obere Grenze $\bar{\varepsilon}_{n+1}$, welche, wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$, durch Wahl von n *beliebig klein* gemacht werden kann. Man hat nun:

$$\lambda_{pn} - \lambda_n < \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \lambda_{pn} \sum_{n+1}^{pn}{}_\nu \frac{1}{\nu} < \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \lambda_{pn} \cdot \lg p$$

also:

$$\lambda_{pn}(1 - \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \lg p) < \lambda_n ,$$

und, da andererseits $\lambda_n < \lambda_{pn}$:

$$1 < \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_n} < \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}_{n+1} \cdot \lg p} ,$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_n} = 1 . \tag{14}$$

Bedeutet dann n die grösste in r enthaltene ganze Zahl, so hat man:

$$\frac{\lambda_{pn}}{\lambda_{n+1}} < \frac{\lambda(pr)}{\lambda(r)} < \frac{\lambda_{p(n+1)}}{\lambda_n} ,$$

anders geschrieben:

$$\frac{\lambda^n}{\lambda_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_n} < \frac{\lambda(pr)}{\lambda(r)} < \frac{\lambda_{p(n+1)}}{\lambda_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} .$$

Da aber aus (13a) folgt, dass:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 ,$$

so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gl. (14):

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda(pr)}{\lambda(r)} = 1. \tag{15}$$

Man hat nun ferner:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda\left(\frac{p}{q}\cdot r\right)}{\lambda(r)} = \lim_{r=\infty} \frac{\lambda\left(p\cdot\frac{r}{q}\right)}{\lambda\left(\frac{r}{q}\right)} \cdot \frac{\lambda\left(\frac{r}{q}\right)}{\lambda\left(q\cdot\frac{r}{q}\right)},$$

sodass mit Benützung von Gl. (15) die Beziehung resultirt:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda(kr)}{\lambda(r)} = 1, \tag{16}$$

zunächst für jedes *rationale* $k > 0$ und schliesslich, wegen der *Monotonie* von $\lambda(kr)$, *für jedes beliebige positive* k.

6. Als einfachste divergente Reihe mit dem *Divergenz-Maasse* λ_n ergiebt sich vermöge der Identität:

$$\lambda_n = \lambda_{n_0} + \sum_{n_0+1}^{n}{}^{\nu}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

die Reihe $\sum(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$. Dabei wollen wir im folgenden der Bequemlichkeit halber stets $n_0 = 0$ setzen und zwar in dem Sinne, dass wir den Zahlen λ_ν schon von $\nu = 0$ ab die Eigenschaft beilegen, *positiv* zu sein und *niemals abzunehmen*. Sollten etwa die λ_ν in Folge ihrer Definition durch irgend einen bestimmten arithmetischen Ausdruck (z. B. $\lambda_\nu = \lg_2 \nu$) jene Eigenschaft erst für $\nu \geqq n_0$ besitzen, so mag unter λ_ν für $\nu < n_0$ eben *nicht* jener arithmetische Ausdruck verstanden, sondern etwa $\lambda_\nu = \lambda_{n_0}$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n_0$ gesetzt werden. Die Allgemeinheit der hier in Frage kommenden Resultate erleidet hierdurch offenbar keinerlei Einschränkung, da es in jeder Relation von der Form $\lim_{x'=0} F(x') \,.\, \sum_0^\infty{}^{\nu} d_\nu x'^\nu = c$ ohne weiteres freisteht, eine beliebige endliche Anzahl von Anfangsgliedern wegzulassen bezw. in beliebiger Weise abzuändern.

In Folge der Divergenz von $\sum(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$ und der aus Gl. (13a) resultirenden Beziehung: $\lim_{\nu=\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) = 0$ besitzt die Potenzreihe

$\sum(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot x^\nu$ den Convergenz-Radius 1. Um ihr Verhalten bei $x = x' = 1$ zu untersuchen, erscheint es zweckmässig, die Substitution:

$$x = 1 - \frac{1}{y}$$

zu machen. Setzt man alsdann:

$$y = \rho \cdot e^{-\varphi i},$$

so ist die Reihe:

$$F_\lambda(y) = \lambda_0 + \sum_1^\infty{}^\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu \tag{17}$$

convergent, wenn:

$$\left| 1 - \frac{1}{\rho} \cdot e^{\varphi i} \right| < 1,$$

also:

$$\rho \cdot \cos\varphi \equiv \Re(y) > \frac{1}{2} \quad \text{(wo } \Re(y) \text{ den } \textit{reellen Theil} \text{ von } y \text{ bedeutet).} \tag{18}$$

Darnach muss $\cos\varphi > 0$, also $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ sein. Setzt man etwa fest, dass $|\varphi| \leqq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, und versteht unter y' diejenigen y, welche der Bedingung genügen: $\left|\frac{1}{y'}\right| \leqq \cos\varphi$, so hat man nach Ungl. (1a):

$$\left| 1 - \frac{1}{y'} \right| < 1 - \left| \frac{1}{\gamma y'} \right| \quad \left(\text{wo: } \frac{1}{\gamma} = \frac{\cos\varphi_0}{2} > 0\right). \tag{19}$$

Die Reihe (17) convergirt also *rechts* von der parallel zur Ordinaten-Axe verlaufenden Geraden $\Re(y) = \frac{1}{2}$. Sie genügt überdies der Bedingung (18) in dem Bereiche:

$$|y'| \cdot \cos\varphi \geqq 1, \quad \text{wo: } \varphi \leqq \varphi_0, \tag{20}$$

d. h. im Innern und auf den Grenzlinien desjenigen Ebenenstückes, welches *rechts* von der Geraden $\Re(y') = 1$ liegt und ausserdem begrenzt wird von den Schenkeln der beiden Winkel $\varphi = \pm\varphi_0$. Dieser sich in's Unendliche erstreckende Bereich werde als der Bereich $y = y'$ bezeichnet und der Grenzübergang $\lim\limits_{y'=\infty}$ allemal so verstanden, dass y' dem Bereiche (y') angehört und $\lim |y'| = \infty$.

7. Dies vorausgeschickt gilt zunächst der Satz:

Es ist:

$$\lim_{y'=\infty} \lambda(|y'|)^{-1} \cdot F_\lambda(y') = 1. \tag{21}$$

Beweis. Bezeichnet man mit n irgend eine natürliche Zahl und subtrahirt die Identität:

$$\lambda_n = \lambda_0 + \sum_1^n {}_\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

von der Gleichung:

$$F_\lambda(y) = \lambda_0 + \sum_0^\infty {}_\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu,$$

so folgt:

$$F(y) - \lambda_n = \sum_1^n {}_\nu (\lambda_n - \lambda_{\nu-1}) \cdot \left\{\left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu - 1\right\} + \sum_{n+1}^\infty {}_\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu.$$

Man hat nun:

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^\nu - 1 = k_\nu \cdot \nu \cdot \frac{1}{y}, \quad \text{wo: } |k_\nu| < 1,\text{[1]}$$

[1] Nach einem von G. Darboux (Journ. de Mathém. (2), T. 2 [1876], p. 293) und P. Mansion (Ann. de la soc. scient. de Bruxelles, 1885—86, p. 36) bewiesenen Satze hat man für eine *differenzirbare* Function $f(x)$ der *complexen* Veränderlichen x:

$$f(x) = f(0) + k \cdot x \cdot f'(\vartheta x),$$

wo

$$|k| < 1, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Hiernach ergiebt sich:

$$(1 - z)^\nu = 1 - k \cdot \nu z \cdot (1 - \vartheta z)^{\nu-1}$$
$$= 1 - k_\nu \cdot \nu z,$$

wo

$$|k_\nu| = |k| \cdot |1 - \vartheta z|^{\nu-1}$$
$$< 1,$$

wenn:

$$|1 - \vartheta z| \leqq 1,$$

also sicher, wenn:

$$|1 - z| \leqq 1.$$

und somit, wenn man noch Gl. (13 a) berücksichtigt:

$$F_\lambda(y) - \lambda_n = \frac{1}{y}\cdot\sum_1^n{}_\nu\, k_\nu\varepsilon_\nu\,.\,\lambda_\nu + \sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\,\varepsilon_\nu\,\frac{\lambda_\nu}{\nu}\left(1-\frac{1}{y}\right)^\nu.$$

Bedeutet jetzt wiederum $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ die obere Grenze von $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots$ *in inf.*, so hat man:

$$|F_\lambda(y) - \lambda_n| < \left|\frac{1}{y}\right|\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varepsilon_\nu\lambda_\nu + \bar{\varepsilon}_{n+1}\cdot\frac{\lambda_n}{n}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\left|1-\frac{1}{y}\right|^\nu$$

und, wenn man jetzt y auf den Bereich (y') einschränkt, mit Berücksichtigung von Ungl. (19):

$$|F_\lambda(y') - \lambda_n| < \left|\frac{1}{y'}\right|\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varepsilon_\nu\lambda_\nu + \bar{\varepsilon}_{n+1}\cdot\frac{\lambda_n}{n}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\left(1-\frac{1}{\gamma\cdot|y'|}\right)^\nu$$

$$< \left|\frac{1}{y'}\right|\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varepsilon_\nu\lambda_\nu + \bar{\varepsilon}_{n+1}\cdot\frac{\lambda_n}{n}\cdot\gamma\cdot|y'|,$$

also:

$$\left|\frac{F_\lambda(y')}{\lambda_n} - 1\right| < \frac{n}{|y'|}\cdot\frac{\sum_1^n{}_\nu\,\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{n\,.\,\lambda_n} + \gamma\cdot\bar{\varepsilon}_{n+1}\cdot\frac{|y'|}{n}.$$

Da nach dem CAUCHY-STOLZ'schen Satze:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n\lambda_n}\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varepsilon_\nu\lambda_\nu = \lim_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n\lambda_n}{n\,.\,\lambda_n-(n-1)\lambda_{n-1}}$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n\lambda_n}{\varepsilon_n\lambda_n+\lambda_{n-1}} \quad \text{(nach Gl. (13 a))}$$

$$= 0,$$

so folgt, dass $\frac{1}{n\lambda_n}\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varepsilon_\nu\lambda_\nu$ durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n *beliebig klein* gemacht werden kann. Dasselbe gilt bezüglich der Zahl $\bar{\varepsilon}_{n+1}$, sodass man also setzen kann:

$$\frac{1}{n\lambda_n}\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varepsilon_\nu\lambda_\nu < \varepsilon \quad \text{und:} \quad \bar{\varepsilon}_{n+1} < \varepsilon \quad \text{etwa für } n \geq n'.$$

Nimmt man jetzt $|y'| \geq n'$ und setzt $n = [y']$, wo $[y']$ die grösste in $|y'|$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, so wird:

$$\left| \lambda_{[y']}^{-1} \cdot F_\lambda(y') - 1 \right| < \varepsilon \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{|y'|}{|y'|} \right)$$

also:

$$\lim_{y' = \infty} \lambda_{[y']}^{-1} \cdot F_\lambda(y') = 1$$

und schliesslich, wegen: $\lim \lambda(|y'|) \cdot \lambda_{[y']}^{-1} = 1$, wie behauptet:

$$(21) \qquad \lim_{y' = \infty} \lambda(|y'|)^{-1} \cdot F_\lambda(y') = 1.$$

8. Setzt man jetzt:

$$F_\lambda\left(\frac{1}{1-x}\right) = \mathfrak{P}_\lambda(x) \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{P}_\lambda(x) = \lambda_0 + \sum_1^\infty{}^{\nu} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot x^\nu,$$

so nimmt zunächst die Relation (21) die Form an:

$$(22) \qquad \lim_{x' = 1} \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-1} \cdot \mathfrak{P}_\lambda(x') = 1.$$

Daraus ergiebt sich speciell, wenn man $x' = |x'|$ setzt:

$$(23) \qquad \lim_{x' = 1} \lambda\left(\frac{1}{1 - |x'|}\right) \cdot \mathfrak{P}_\lambda(|x'|) = 1.$$

Nun ist aber mit Berücksichtigung von Ungl. (1):

$$\frac{1}{1 - |x'|} \geq \frac{1}{|1 - x'|} \geq \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - |x'|},$$

also:

$$1 \geq \frac{\lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{1 - |x'|}\right)} \geq \frac{\lambda\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - |x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{1 - |x'|}\right)},$$

und daher nach Gl. (16):

$$(24) \qquad \lim_{x' = 1} \frac{\lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{1 - |x'|}\right)} = 1.$$

Darnach lässt sich aber Gl. (23) auch durch die folgende ersetzen:

$$\lim_{x'=1} \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right) \cdot \mathfrak{P}_\lambda(|x'|),$$

sodass in Verbindung mit Gl. (22) folgt:

$$(25) \qquad \lim_{x'=1} \frac{\mathfrak{P}_\lambda(x')}{\mathfrak{P}_\lambda(|x'|)} = 1,$$

d. h. (s. Nr. 2, am Ende):

Die Reihe $\mathfrak{P}_\lambda(x')$ divergirt bei $x' = 1$ gleichmässig.

Da andererseits $\mathfrak{P}_\lambda(1)$ das Divergenz-Maass λ_n besitzt, so gewinnt man mit Benützung des in Nr. 3 angegebenen Vergleichungs-Princips den folgenden Satz:

Besitzt die Reihe $\sum a_\nu$ das Divergenz-Maass $g\lambda_n$, so convergirt $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$ und divergirt bei $x = x' = 1$ gleichmässig, derart dass:

$$(26) \qquad \lim_{x'=1} \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1} \cdot \sum_0^\infty {}^\nu\, a_\nu x'^\nu = g.$$

Dabei ist die auf $\sum a_\nu$ bezügliche Voraussetzung allemal erfüllt, wenn:

$$(26\text{a}) \qquad a_n \cong g(\lambda_n - \lambda_{n-1}).$$

9. Da:

$$\mathfrak{P}_\lambda(x) = \lambda_0 + \sum_1^\infty {}^\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot x^\nu$$

$$= (1 - x) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu \lambda_\nu \cdot x^\nu,$$

so lässt sich Gl. (22) auch folgendermaassen schreiben:

$$(27) \qquad \lim_{x'=1} (1 - x') \cdot \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1} \cdot \sum_0^\infty {}^\nu \lambda_\nu x'^\nu = 1.$$

Wir zeigen nun zunächst, dass die ähnlich gebildete Reihe: $\sum_0^\infty{}_\nu \lambda_\nu^{-1} . x^\nu$, welche offenbar gleichfalls für $|x| < 1$ *convergirt*, für $x = 1$ *divergirt*, einer ganz analogen Relation genügt. Man hat für $|x| < 1$:

$$(28) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu \lambda_\nu x^\nu . \sum_0^\infty{}_\nu \lambda_\nu^{-1} x^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu k_\nu . x^\nu,$$

wenn gesetzt wird:

$$k_n = \lambda_0 . \lambda_n^{-1} + \lambda_1 . \lambda_{n-1}^{-1} + \ldots + \lambda_{n-1} . \lambda_1^{-1} + \lambda_n . \lambda_0^{-1}.$$

Daraus folgt zunächst:

$$k_n \begin{cases} > \lambda_n^{-1}(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \\ < \lambda_n (\lambda_0^{-1} + \lambda_1^{-1} + \ldots + \lambda_n^{-1}) \end{cases}$$

und daher:

$$\frac{k_n}{n+1} \begin{cases} > \dfrac{1}{(n+1) . \lambda_n} . \sum_0^n{}_\nu \lambda_\nu \\ < \dfrac{1}{(n+1) . \lambda_n^{-1}} . \sum_0^n{}_\nu \lambda_\nu^{-1}. \end{cases}$$

Nach dem Cauchy-Stolz'schen Satze ist aber:

$$(29) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n+1) . \lambda_n^{\pm 1}} . \sum_0^n{}_\nu \lambda_\nu^{\pm 1} = \lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n^{\pm 1}}{(n+1) . \lambda_n^{\pm 1} - n . \lambda_{n+1}^{\pm 1}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{\varepsilon_n + 1} \quad \text{(s. Gl. (13 a), (13 b))},$$

$$= 1,$$

sodass sich ergiebt:

$$\lim_{n=\infty} \frac{k_n}{n+1} = 1, \quad \text{also: } k_n \cong n,$$

und somit nach Gl. (10):

$$\lim_{x'=1} (1 - x')^2 . \sum_0^\infty{}_\nu k_\nu x'^\nu = 1.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\sum_0^\infty{}_\nu\, k_\nu x'^\nu$ durch das gleichgeltende Reihen-Product (28) und schreibt die so resultirende Gleichung folgendermaassen:

$$\lim_{x'=1}\left\{(1-x').\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1}.\sum_0^\infty{}_\nu\,\lambda_\nu x'^\nu\right\}.\left\{(1-x').\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right).\sum_0^\infty{}_\nu\,\lambda_\nu^{-1}.x'^\nu\right\}=1,$$

so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gl. (27) die gesuchte Relation:

$$(31)\qquad \lim_{x'=1}(1-x').\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right).\sum_0^\infty{}_\nu\,\lambda_\nu^{-1}.x'^\nu=1.$$

10. Durch Zusammenfassung der Beziehungen (27) und (30) ergiebt sich, wenn man noch des folgenden wegen den unteren Summations-Index 0 durch 1 ersetzt:

$$(31)\qquad \lim_{x'=1}(1-x').\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-\alpha}.\sum_1^\infty{}_\nu\,\lambda_\nu^\alpha.x'^\nu=1,\quad \text{wo: } \alpha=\pm 1.$$

Daraus folgt in's besondere, dass $\sum\lambda_\nu^\alpha.x'^\nu$ bei $x'=1$ *gleichmässig* divergirt, da:

$$\frac{1-|x'|}{|1-x'|}>\frac{1}{\gamma}\quad\text{und:}\quad \lim_{x'=1}\frac{\lambda\left(\frac{1}{1-|x'|}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)}=1\qquad(\text{Gl. }(24)).$$

Um nun aus der Beziehung (31) eine allgemeinere abzuleiten, combiniren wir sie mit der folgenden (aus Gl. (10) resultirenden):

$$(32)\qquad \lim_{x'=1}(1-x')^p.\sum_1^\infty{}_\nu\,\nu^{p-1}.x'^\nu=\Gamma(p)\qquad(p>0).$$

Durch Multiplication mit Gl. (31) ergiebt sich alsdann:

$$(33)\qquad \lim_{x'=1}(1-x')^{p+1}.\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right).\sum_1^\infty{}_\nu\,h_\nu x'^{\nu+1}=\Gamma(p),$$

wenn gesetzt wird:

$$(34)\qquad h_n=\lambda_1^\alpha.n^{p-1}+\lambda_2^\alpha.(n-1)^{p-1}+\ldots+\lambda_{n-1}^\alpha.2^{p-1}+\lambda_n^\alpha.1^{p-1}.$$

Dabei ist, wie zunächst gezeigt werden soll:

$$h_n \cong \frac{1}{p} \cdot n^p \cdot \lambda_n^\alpha. \tag{35}$$

Durch partielle Summation folgt nämlich aus (34):

$$\begin{aligned} h_n = (\lambda_1^\alpha - \lambda_2^\alpha) \cdot n^{p-1} + (\lambda_2^\alpha - \lambda_3^\alpha)\big((n-1)^{p-1} + n^{p-1}\big) + \ldots \\ + (\lambda_{n-1}^\alpha - \lambda_n^\alpha)(2^{p-1} + \ldots + n^{p-1}) + \lambda_n^\alpha(1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + n^{p-1}) \end{aligned}$$

und hieraus, da die Differenzen $\lambda_{\nu-1}^\alpha - \lambda_\nu^\alpha$, gleichgültig ob $\alpha = \pm 1$, jedenfalls gleiches Vorzeichen haben:

$$\begin{aligned} \left| h_n - \lambda_n^\alpha \cdot \sum_1^n \nu^{p-1} \right| = \big| (\lambda_1^\alpha - \lambda_2^\alpha) \cdot n^{p-1} + (\lambda_2^\alpha - \lambda_3^\alpha)\big((n-1)^{p-1} + n^{p-1}\big) + \ldots \\ + (\lambda_{n-1}^\alpha - \lambda_n^\alpha)(2^{p-1} + \ldots + n^{p-1}) \big|. \end{aligned} \tag{36}$$

Sei nun zunächst $p > 1$, also $(\nu + 1)^{p-1} > \nu^{p-1}$, $\lim \nu^{p-1} = \infty$. Aus (36) folgt alsdann:

$$\begin{aligned} \left| h_n - \lambda_n^\alpha \cdot \sum_1^n \nu^{p-1} \right| < \big| (\lambda_1^\alpha - \lambda_2^\alpha) \cdot n^{p-1} + (\lambda_2^\alpha - \lambda_3^\alpha) \cdot 2n^{p-1} + \ldots \\ + (\lambda_{n-1}^\alpha - \lambda_n^\alpha) \cdot (n-1) \cdot n^{p-1} \big| \\ = n^{p-1} \cdot \left| \sum_1^n \lambda_\nu^\alpha - n \cdot \lambda_n^\alpha \right| \end{aligned} \tag{37}$$

und durch Division mit $n^p \cdot \lambda_n^\alpha$:

$$\left| \frac{h_n}{n^p \cdot \lambda_n^\alpha} - \frac{1}{n^p} \sum_1^n \nu^{p-1} \right| < \left| \frac{1}{n \cdot \lambda_a} \cdot \sum_1^n \lambda_n^\alpha - 1 \right|. \tag{38}$$

Da aber:

$$\left\{ \begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \cdot \sum_1^n \nu^{p-1} = \frac{1}{p} \quad \text{(nach dem Cauchy-Stolz'sche Satze)} \\ &\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{n \cdot \lambda_n^\alpha} \cdot \sum_1^n \lambda_\nu^\alpha = 1 \quad \text{(desgl.; s. übrigens Gl. (29))}, \end{aligned} \right. \tag{39}$$

so ergiebt sich, wie behauptet (Gl. (35)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n^p \cdot \lambda_n^\alpha} = \frac{1}{p}$$

Ist jetzt $p < 1$, also $(\nu + 1)^{p-1} < \nu^{p-1}$, so hat man:

$$n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n - \nu + 1)^{p-1} < \nu \cdot (n-\nu)^{p-1} \quad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, (n-1))},$$

und wenn man auf beiden Seiten den Ausdruck

$$\nu\left(n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu+1)^{p-1}\right)$$

addirt:

$$\begin{aligned}(\nu + 1) \cdot \{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu+1)^{p-1}\}& \\ < \nu\{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu)^{p-1}\}&,\end{aligned}$$

also:

$$\frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu+1)^{p-1}}{\nu} < \frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-\nu)^{p-1}}{\nu + 1}.$$

Durch successive Anwendung dieser Relation für $\nu = 1, 2, \ldots, (n-1)$ findet man:

$$\frac{n^{p-1}}{1} < \frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1}}{2} < \ldots < \frac{n^{p-1} + (n-1)^{p-1} + \ldots + 1^{p-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_1^n {}_\nu\, \nu^{p-1},$$

sodass mit Benützung dieser Ungleichungen aus Gl. (36) sich ergiebt:

$$\begin{aligned}\left| h_n - \lambda_n^a \cdot \sum_1^n {}_\nu\, \nu^{p-1} \right| &< \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}_\nu\, \nu^{p-1}\right) \cdot \Big| 1 \cdot (\lambda_1^a - \lambda_2^a) + 2(\lambda_2^a - \lambda_3^a) + \ldots \\ &\qquad\qquad + (n-1) \cdot (\lambda_{n-1}^a - \lambda_n^a) \Big| \\ &= \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}_\nu\, \nu^{p-1}\right) \cdot \left| \sum_1^n {}_\nu\, \lambda_\nu^a - n \cdot \lambda_n^a \right|\end{aligned}$$

und, wenn man wiederum noch durch $n^p \cdot \lambda_n^a$ dividirt:

$$\left| \frac{h_n}{n^p \cdot \lambda_n^a} - \frac{1}{n^p} \cdot \sum_1^n {}_\nu\, \nu^{p-1} \right| < \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_1^n {}_\nu\, \nu^{p-1}\right) \cdot \left| \frac{1}{n \cdot \lambda_n^a} \cdot \sum_1^n {}_\nu\, \lambda_\nu^a - 1 \right|.$$

Daraus folgt dann schliesslich wieder mit Hülfe von (39):

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n^p \cdot \lambda_n^a} = \frac{1}{p}.$$

Für den noch übrig bleibenden Fall $p = 1$, für welchen nach Gl. (34):

$$h_n = \sum_1^n {}_\nu\, \lambda_\nu^\alpha,$$

findet man unmittelbar aus der zweiten Gleichung (39):

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n \cdot \lambda_n^\alpha} = 1,$$

sodass also die Gültigkeit der Beziehung (35) nunmehr für jedes $p > 0$ erwiesen ist.

11. Beachtet man noch, dass Gl. (33) offenbar wieder die *gleichmässige* Divergenz der betreffenden Potenzreihe anzeigt, so liefert der Zusatz von Nr. 3 und das soeben bezüglich der h_ν gewonnene Resultat die folgende Beziehung:

$$(40)\quad \lim_{x'=1} (1 - x')^{p+1} \cdot \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} \cdot \sum_1^\infty {}_\nu\, \nu^p \cdot \lambda_\nu^\alpha \cdot x'^\nu = p \cdot \Gamma(p)$$
$$= \Gamma(p+1) \quad (p > 0,\ \alpha = \pm 1),$$

und, wenn man den Factor $(1 - x')$ unter das Summenzeichen zieht:

$$(41)\quad \lim_{x'=1} (1 - x')^p \cdot \lambda\left(\frac{1}{|1 - x'|}\right)^{-\alpha} \cdot \sum_1^\infty {}_\nu \left(\nu^p \cdot \lambda_\nu^\alpha - (\nu - 1)^p \cdot \lambda_{\nu-1}^\alpha\right) \cdot x'^\nu = \Gamma(p+1).$$

Diese unter der Voraussetzung $p > 0$, $\alpha = \pm 1$ abgeleitete Gleichung gilt offenbar auch für $p > 0$, $\alpha = 0$, da sie alsdann bereits in Gl. (9) enthalten ist; desgl. für $p = 0$, $\alpha = +1$, in welchem Falle sie auf Gl. (22) führt. Da andererseits Gl. (41) wiederum die *gleichmässige* Divergenz der Potenzreihe bei $x' = 1$ erkennen lässt, und da ausserdem die für $x' = 1$ resultirende Reihe das Divergenz-Maass $n^p \cdot \lambda_n^\alpha$ besitzt, so lässt sich unter nochmaliger Anwendung des Satzes von Nr. 3 das Gesammtresultat dieser Untersuchung in folgender Weise formuliren:

Hauptsatz (Erste Form). *Besitzt die Reihe $\sum a_\nu$ das Divergenz-Maass:*

$$g \cdot n^p \cdot \lambda_n^\alpha \quad \begin{cases} \text{wo: } p > 0, \quad \alpha = \pm 1 \text{ oder } 0, \\ \text{oder: } p = 0, \quad \alpha = +1, \end{cases}$$

so convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ *für* $|x| < 1$ *und divergirt bei* $x = x' = 1$ *gleichmässig mit dem Divergenz-Charakter:*

$$\Gamma(p+1).g.\left(\frac{1}{1-x'}\right)^p.\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^\alpha,$$

d. h. man hat:

$$(42)\qquad \lim_{x'=1}(1-x')^p.\lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-\alpha}.\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p+1).g.$$

Die Voraussetzung dieses Satzes, nämlich:

$$\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu \cong g.n^p.\lambda_n^\alpha,$$

ist dann nach dem Cauchy-Stolz'schen Satze oder auch direct im Anschlusse an Gl. (41) wiederum sicher erfüllt, wenn:

$$(43)\qquad a_n \cong g(n^p.\lambda_n^\alpha - (n-1)^p.\lambda_{n-1}^\alpha).$$

Ist nun $p > 0$, so hat man für $\alpha = \pm 1$:

$$n^p\lambda_n^\alpha - (n-1)^p.\lambda_{n-1}^\alpha = (n^p - (n-1)^p).\lambda_n^\alpha + (n-1)^p.(\lambda_n^\alpha - \lambda_{n-1}^\alpha),$$

also:

$$\frac{n^p.\lambda_n^\alpha - (n-1)^p.\lambda_{n-1}^\alpha}{n^{p-1}.\lambda_n^\alpha} = n.\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)^p.n.\frac{\lambda_n^\alpha - \lambda_{n-1}^\alpha}{\lambda_n^\alpha}$$

$$= n.\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)^p.\varepsilon_n \quad \text{(Gl. (13a), (13b))}$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n^p.\lambda_n^\alpha - (n-1)^p.\lambda_{n-1}^\alpha}{n^{p-1}.\lambda_n^\alpha} = p,$$

anders geschrieben:

$$(44)\qquad n^p.\lambda_n^\alpha - (n-1)^p.\lambda_{n-1}^{\alpha} \cong p.n^{p-1}.\lambda_n^\alpha,$$

eine Formel, die offenbar auch im Falle $\alpha = 0$ richtig bleibt, sodass also für $p > 0$ die für die Gültigkeit von Gl. (42) ausreichende Bedingung (43) auch durch die folgende einfachere ersetzt werden kann:

$$(45)\qquad a_n \cong p.g.n^{p-1}.\lambda_n^\alpha.$$

Ist dagegen $p = 0$, so versagt die eben durchgeführte Transformation, sodass es also in diesem Falle bei der Bedingung (43), d. h. (wegen $\alpha = + 1$, wenn $p = 0$):

$$(46) \qquad a_n \cong g(\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

sein Bewenden hat und lediglich das schon durch Gl. (26), (26a) ausgesprochene Resultat wieder zum Vorschein kommt.

Ersetzt man jetzt schliesslich noch in Gl. (45) g durch $\frac{g}{p}$, sodass $\Gamma(p+1).g$ auf der rechten Seite von Gl. (42) in $\Gamma(p).g$ übergeht, so gewinnt man die folgende

Zweite Form des Hauptsatzes. *Es ist $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$ convergent, bei $x = x' = 1$ gleichmässig divergent und genügt der Grenz-Beziehung:*

$$(47) \begin{cases} \text{(a)} \quad \lim\limits_{x'=1} (1-x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-\alpha} . \sum\limits_0^\infty{}^\nu a_\nu x'^\nu = \Gamma(p).g, \\ \qquad\qquad \textit{wenn: } a_n \cong g . n^{p-1} . \lambda_n^\alpha \quad (p > 0,\ \alpha = \pm 1 \text{ oder } 0) \\ \text{(b)} \quad \lim\limits_{x'=1} \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1} . \sum\limits_0^\infty{}^\nu a_\nu x'^\nu = g, \ \textit{wenn: } a_n \cong g(\lambda_n - \lambda_{n-1}). \end{cases}$$

Obschon die a_ν hier *specielleren* Bedingungen genügen müssen, als zuvor für die Gültigkeit von Gl. (42) erforderlich waren, so besitzt doch der Satz in dieser neuen Formulirung, ja sogar schon der in Gl. (47a) enthaltene Theil desselben in Wahrheit keine geringere Tragweite, als der Hauptsatz I — d. h. man kann von Gl. (47a) aus auch wiederum zu Gl. (42), ja sogar mit noch etwas erweiterter Gültigkeits-Bedingung zurück gelangen. Ersetzt man nämlich in (47a) a_ν durch s_ν und setzt sodann $s_n = \sum\limits_0^n{}^\nu a_\nu$, so ergiebt sich zunächst:

$$\lim_{x'=1} (1-x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-\alpha} . \sum_0^\infty{}^\nu s_\nu x'^\nu = \Gamma(p).g,$$

$$\text{wenn } \sum_0^n{}^\nu a_\nu \cong g . n^{p-1} . \lambda_n^\alpha \text{ und } p > 0.$$

Da aber:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, s_\nu x'^\nu = \frac{1}{1-x'} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu x'^\nu,$$

so folgt, wenn man noch $p+1$ statt p schreibt:

$$(48) \qquad \lim_{x'=1} (1-x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-\alpha} . \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu x'^\nu = \Gamma(p+1).g,$$

$$\text{wenn: } \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, a_\nu \cong g.n^p.\lambda_n^\alpha, \quad p+1>0,$$

in voller Übereinstimmung mit Gl. (42), nur mit dem Unterschiede, dass an die Stelle der Gültigkeits-Bedingung $p \geq 0$ jetzt die folgende: $p > -1$ tritt. Dabei ist aber hervorzuheben, dass für $p<0$ und auch schon in dem (oben ausdrücklich ausgeschlossenen) Falle: $p=0$, $\alpha=-1$ die Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu$ nicht mehr *divergirt*, sondern *convergirt* und zwar gegen die Summe *Null*, wie ja auch andererseits der Factor $(1-x')^p . \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-\alpha}$ dann *nicht* mehr den Grenzwerth 0, sondern den Grenzwerth ∞ besitzt. Die Relation (48) macht also in diesem Falle eine Aussage über den Zusammenhang des *Convergenz*-Charakters der Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu x'^\nu$ bei $x'=1$ und des *Convergenz*-Maasses der Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu$. Man bemerke noch, dass alsdann die *Festhaltung* des *unteren* Summations-Index ν, also bei der hier gewählten Formulirung: $\nu=0$, für die Gültigkeit der Gleichung (48) durchaus *wesentlich* ist, während derselbe in dem bisher ausschliesslich betrachteten Falle der *Divergenz* von Σa_ν, wie bereits oben bemerkt wurde (s. Nr. 6), durchaus willkürlich bleibt.

Die zuletzt gemachten Bemerkungen gelten auch für die Relation:

$$(49) \qquad \lim_{x'=1} (1-x')^{-1} . \lambda\left(\frac{1}{|1-x'|}\right)^{-1} . \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu x'^\nu = g, \text{ wenn: } \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, a_n \cong \lambda_n - \lambda_{n-1},$$

welche sich durch die eben benützte Transformation aus Gl. (47 b) ergeben würde.

12. Die Function $\lambda(r)$ war bisher keiner anderen Beschränkung unterworfen, als dass sie *monoton* zunehmen und der Beziehung $\lambda(\nu) = \lambda_\nu$ genügen sollte. Nimmt man jetzt $\lambda(r)$ als *stetig* und *differenzirbar* an, so wird an die Stelle der Bedingung (12a) die folgende treten:

$$(50) \qquad \lambda'(r) < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda(r)}{r} \quad \text{für } r > r_\varepsilon,$$

mit dem Zusatze, dass $\frac{\lambda(r)}{r}$ und $\lambda'(r)$ von einem gewissen r ab *monoton* abnehmen. Alsdann wird nämlich:

$$\begin{aligned}\lambda(r) - \lambda(r-h) &= \lambda'(r - \vartheta h)\,.\,h \\ &< \lambda'(r)\,.\,h < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda(r)}{r}\,.\,h,\end{aligned}$$

also speciell:

$$\lambda(\nu) - \lambda(\nu - 1) < \varepsilon \,.\, \frac{\lambda(\nu)}{\nu},$$

übereinstimmend mit Ungl. (12a).

Man erkennt nun unmittelbar, dass jeder Ausdruck von der Form:

$$(51) \qquad A(r) = (\lg_m r)^q \,.\, (\lg_{m+1} r)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} r)^{q_k},$$

$$\text{wo: } m \geq 1, \quad q > 0, \quad q_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, k) \text{ beliebig reell, incl. } 0,$$

den soeben in Bezug auf $\lambda(r)$, $\lambda'(r)$ statuirten Bedingungen genügen, und dass sodann, im Falle $q < 0$, $A(r)$ dem Typus $\lambda(r)^{-1}$ angehört.

Beachtet man noch, dass:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lg re^{\varphi i}}{\lg r} = \lim_{r=\infty} \frac{\lg r + \varphi i}{\lg r} = 1$$

also

$$(52) \qquad \lim_{x'=1} \frac{\lg \dfrac{1}{1-x'}}{\lg \dfrac{1}{|1-x'|}} = 1 \quad \text{und allgemein:} \quad \lim_{x'=1} \frac{\lg_k \dfrac{1}{1-x'}}{\lg_k \dfrac{1}{|1-x'|}} = 1,$$

wobei man etwa, um eine eindeutige Festsetzung zu treffen, unter $\lg y$ den *Haupt-Logarithmus*, also unter $\lg_2 y = \lg(\lg y)$ den *Haupt-Logarithmus* vom *Haupt-Logarithmus* u. s. f. verstehen mag (was im übrigen für die

Gültigkeit von (52) belanglos ist), so liefert der Hauptsatz I für $\lambda(r)^{\alpha} = \Lambda(r)$ das folgende Resultat:

Besitzt die Reihe $\sum a_\nu$ das Divergenz-Maass:

$$g \cdot n^p \cdot \Lambda(n) \begin{cases} \text{wo: } \Lambda(n) = (\lg_m n)^q \cdot (\lg_{m+1} n)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k}. \\ \quad p \geqq 0 \text{ und im Falle } p = 0 : q > 0, \end{cases}$$

so hat man:

$$(53) \qquad \lim_{x' = 1} (1 - x')^p \cdot \Lambda\left(\frac{1}{1 - x'}\right)^{-1} \cdot \sum_0^\infty a_\nu x'^\nu = \Gamma(p + 1) \cdot g.$$

13. Die Substitution $\lambda(r)^{\alpha} = \Lambda(r)$ würde unmittelbar ein analoges Ergebniss aus der Gleichung (47a) liefern. Um aber für die *beiden* Relationen (47a), (47b) eine in Bezug auf die Normirung der a_n möglichst einheitlich gestaltete Fassung zu gewinnen, verfahren wir folgendermaassen. Es werde gesetzt:

$$(54) \qquad \overline{\Lambda(r)} = (\lg_m r)^{1-q} \cdot (\lg_{m+1} r)^{-q_1} \ldots (\lg_{m+k})^{-q_k},$$

wo $q < 1$, die übrigen q_ν beliebig reell, eventuell auch Null.

Alsdann wird:

$$\overline{\Lambda'(r)} = \overline{\Lambda(r)} \left\{ \frac{1 - q}{r \cdot \lg_1 r \ldots \lg_m r} - \frac{q_1}{r \cdot \lg_1 r \ldots \lg_{m+1} r} - \ldots \right\},$$

also für $r = \infty$:

$$(55) \qquad \overline{\Lambda'(r)} \cong (1 - q) \cdot \frac{\overline{\Lambda(r)}}{r \cdot \lg_1 r \ldots \lg_m r}$$

$$= (1 - q) \frac{1}{L_{m-1}(r) \cdot (\lg_m r)^q \cdot (\lg_{m+1} r)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} r)^{q_k}},$$

wo:

$$(56) \qquad L_\mu(r) = r \cdot \lg_1 r \ldots \lg_\mu r \quad (\mu \geqq 1) \quad \text{und speciell: } L_0(r) = r.$$

Führt man in Gl. (47b) $\lambda(r) = \overline{\Lambda(r)}$ ein, so kann die Bedingung:

$$a_n \cong g(\overline{\Lambda(n)} - \overline{\Lambda(n-1)})$$

mit Hülfe der Relation:

$$\overline{\Lambda(n)} - \overline{\Lambda(n-1)} = \overline{\Lambda'(n - \vartheta)} \cong \overline{\Lambda'(n)},$$

und falls man schliesslich noch $\frac{g}{1-q}$ statt g schreibt, durch die folgende ersetzt werden:

$$a_n \cong \frac{g}{1-q} \cdot \overline{\Lambda(n)} = g \cdot \frac{1}{L_{m-1}(n) \cdot (\lg_m n)^q \cdot (\lg_{m+1} n)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k}} \qquad (q < 1).$$

Setzt man dann noch die zu Gl. (47 a) gehörige Bedingung in die Form:

$$a_n \cong g \cdot \frac{n^p}{n \cdot \lambda_n^{-a}} = g \cdot \frac{n^p}{L_{m-1}(n) \cdot (\lg_m n)^q \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k}} \qquad (q \gtrless 1),$$

so liefern die beiden Beziehungen (47) den folgende Satz:[1]

Ist:

$$a_n \cong g \cdot \frac{n^p}{L_{m-1}(n) \cdot (\lg_m n)^q \cdot (\lg_{m+1} n)^{q_1} \ldots (\lg_{m+k} n)^{q_k}} \qquad (m \geqq 1),$$

so hat man, falls $p > 0$, $q \lesseqgtr 1$:

$$\lim_{x'=1} (1-x')^{p+1} \cdot L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x'}\right) \lg_m \left(\frac{1}{1-x'}\right)^q \cdot \lg_{m+1}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_1} \ldots \lg_{m+k}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_k}$$

$$\times \sum_0^{\infty}{}' a_\nu x'^\nu = \Gamma(p) \cdot g,$$

dagegen für $p = 0$, *in welchem Falle dann allemal* $q < 1$ *sein muss:*[2]

$$\lim_{x'=1} \lg_m \left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q-1} \cdot \lg_{m+1}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_1} \ldots \lg_{m+k}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{q_k} \cdot \sum_0^{\infty}{}' a_\nu x'^\nu = \frac{g}{1-q}.$$

München, Januar 1902.

---

[1] Für *reelle* x' bei E. Lasker, a. a. O. p. 453. Die dort benützte Methode *versagt* für *complexe* x'.

[2] Für $q > 1$, wäre ja $\sum a_\nu$ *convergent.*

NOTE ÜBER DIE SYMMETRISCHEN FUNCTIONEN DER ZWEI ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN GEMEINSAMEN WURZELN

(Auszug aus einem Briefe an den Herausgeber)

VON

LEOPOLD GEGENBAUER

in WIEN

Unter den kleineren Arbeiten ABEL's befindet sich ein Aufsatz, der dadurch von besonderem Interesse ist, dass er, wenigstens für einen besonderen Fall, die Theorie des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen auf die Theorie der symmetrischen Functionen direct zurückführt. Es ist dies die im 17. Bande von GERGONNE's Annales de Mathématiques pures et appliquées erschienene Arbeit *Recherches de la quantité qui satisfait à deux équations algébriques données*, welche lange Zeit in Vergessenheit geraten war — wurde sie doch erst in die zweite Auflage von ABEL's Oeuvres complètes aufgenommen — und auch heute noch zu wenig beachtet zu werden scheint. Daselbst wird für eine rationale Function $\frac{F(x_1)}{G(x_1)}$ der den ganzen Functionen

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

und $g(x)$ gemeinsamen Wurzel x_1 unter der Voraussetzung, dass diese Functionen nur einfache Wurzeln besitzen und dass sie *nur* diese eine Wurzel gemein haben, der Ausdruck

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{F(x_\lambda)}{G(x_\lambda)} \theta(x_\lambda) R_{g(x), f_1(x; x_\lambda)}}{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \theta(x_\lambda) R_{g(x), f_1(x; x_\lambda)}}$$

aufgestellt, in welchem $\theta(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, welche für keine der Grössen x_λ unendlich und für x_1 nicht Null wird, $R_{g(x),h(x)}$ die Resultante der Gleichungen $g(x)=0$, $h(x)=0$ und

$$f_k(x;(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_k}) = \frac{f(x)}{(x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\ldots(x-x_{\lambda_k})}$$

ist. Aus derselben folgt für den grössten gemeinsamen Theiler $x-x_1$ der beiden Functionen die Darstellung

$$\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n}(x-x_\lambda)\,\theta(x_\lambda)\,R_{g(x),f_1(x;x_\lambda)}}{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n}\theta(x_\lambda)\,R_{g(x),f_1(x;x_\lambda)}}.$$

Auf die Bedeutung dieser Abel'schen Form des grössten gemeinsamen Theilers hat Kronecker in seinen algebraischen Vorlesungen wiederholt hingewiesen und zugleich eine Ausdehnung derselben für den Fall gegeben, dass dieser Theiler von einem beliebigen Grade ist, wobei er allerdings die angegebene Beschränkung bezüglich der Wurzeln der beiden Functionen beibehielt. Für denselben stellte er den Ausdruck

$$\frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\ldots(x-x_{\lambda_r})\,R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}}$$

auf und für das Vorhandensein eines grössten gemeinsamen Theiles vom Grade r erhielt er als notwendige und hinreichende Bedingungen die Relationen

$$R_{g(x),f(x)}=0,\qquad R^{(1)}_{g(x),f(x)}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}R_{g(x),f_1(x;x_\lambda)}=0\;,\quad\ldots,$$

$$R^{(r-1)}_{g(x),f(x)}=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-1}}R_{g(x),f_{r-1}(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_{r-1}})}=0,$$

$$R^{(r)}_{g(x),f(x)}=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}=0$$

wo die Summationen in der k-fachen Summe bezüglich der Grössen λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ über alle Combinationen k^{ter} Classe der Zahlen $1,2,\ldots,n$ ohne Wiederholung auszudehnen sind.

Ich habe in meiner in der zweiten Abtheilung des 110. Bandes der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien enschienenen Mittheilung *Über die Abel'sche Darstellung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen* gezeigt, dass die KRONECKER'schen Bedingungen und seine Darstellung des Theilers unter gewissen Bedingungen auch noch beim Vorhandensein mehrfacher Wurzeln bestehen bleiben und weiters bewiesen, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine ganze Function $f(x)$ vom Grade n genau $r \leq n$ unter einander verschiedene Wurzeln besitzt darin bestehen, dass die $(n - r + 1)^{\text{te}}$ von den symmetrischen Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $f(x)$

$$D_{f(x)} = \left| s_{i+k} \right|_{(i, k = 0, 1, \ldots, n-1)}, \qquad D^{(1)}_{f(x)} = \left| s_{i+k} \right|_{(i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-2)} = \sum_{\lambda = 1}^{\lambda = n} D_{f_1(x : x_\lambda)},$$

$$D^{(2)}_{f(x)} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2} D_{f_2(x : x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})} = \left| s_{i+k} \right|_{(i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-3)}, \quad \ldots$$

in denen $D_{h(x)}$ die Discriminante von $h(x)$, und s_k die k^{te} Potenzsumme der Grössen x_λ ist, die *erste* nicht verschwindende ist, und dass diese dann dies Produkt aus den Ordnungszahlen der unter einander verschiedenen Wurzeln von $f(x)$ und der Discriminante jener Gleichung (Stammgleichung) ist, der diese genügen. Für den grössten gemeinsamen Theiler von $f(x)$ und $f'(x)$ gab ich den Ausdruck

$$\frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} (x - x_{\lambda_1})(x - x_{\lambda_2}) \ldots (x - x_{\lambda_{n-r}}) \left| s_{i+k}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right|}{\left| s_{i+k} \right|} \qquad (i, k = 0, 1, 2 \ldots, n-r)$$

an, in welchem mit $s_\tau^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})}$ die τ^{te} Potenzsumme der von $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}$ verschiedenen r Wurzeln bezeichnet ist. In die Reihe der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist in den einzelnen Formeln jede Wurzel so oft aufzunehmen, als ihre Ordnungszahl angibt.

Der grösste gemeinsame Theiler von zwei ganzen Functionen ist eine *symmetrische* Function der den zwei Functionen gemeinsamen Wurzeln; die eben angeführten Resultate lassen sich auch, wie man aus meinen a. a. O. gegebenen Auseinandersetzungen ersieht, auf dem von mir eingeschlagenen Wege sofort dahin erweitern, dass sie die Darstellung irgend einer rationalen symmetrischen Function der r den Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$

gemeinsamen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_r$ liefern. Man erhält für eine solche Function $S(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ die Darstellung

$$\frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} S(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}$$

wo $S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})$ eine beliebige rationale symmetrische Function ist, welche für keines der in betracht kommenden Wertsysteme unendlich und für das Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nicht Null wird.

Ist

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_r)},$$

wo $F(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ und $G(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ganze symmetrische Functionen sind und setzt man

$$S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) = G(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}),$$

so erhält man die Beziehung

$$(1) \qquad S(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} F(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} G(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}},$$

Für eine symmetrische Function der den Gleichungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ gemeinsamen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, ergeben sich die Darstellungen

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho} S(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) \left| s_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)} \right|}{\left| s_{i+k} \right|}, \quad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

$$(2) \qquad S(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho} F(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) \left| s_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)} \right|}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho} G(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) \left| s_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)} \right|}. \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

Um eine Anwendung dieser allgemeinen Formeln zu liefern, will ich zunächst die Bedingungen dafür ermitteln, dass die drei ganzen Functionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ einen grössten gemeinsamen Theiler vom Grade $s < r$ besitzen, wenn die ersten zwei einen solchen vom Grade r besitzen.

Aus der Formel (1) ergiebt sich unmittelbar die Relation

$$R^{(\lambda)}_{h(x),(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_r)} = \frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r} R^{(\lambda)}_{h(x),(x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\dots(x-x_{\lambda_r})} R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\dots,x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r} R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\dots,x_{\lambda_r})}}$$

$$\frac{R^{(\lambda)}_{h(x),g(x),f(x)}}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r} R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\dots,x_{\lambda_r})}}$$

und daher hat man den Satz:

Ist von den symmetrischen Functionen

$$R_{g(x),f(x)}\,,\quad R^{(1)}_{g(x),f(x)}\,,\quad R^{(2)}_{g(x),f(x)}\,,\quad \dots$$

die $(r+1)^{\text{te}}$ und von den symmetrischen Functionen

$$R_{h(x),g(x),f(x)}\,,\quad R^{(1)}_{h(x),g(x),f(x)}\,,\quad R^{(2)}_{h(x),g(x),f(x)}\,,\quad \dots$$

die $(s+1)^{\text{te}}$ die erste nicht verschwindende, so hat der grösste gemeinsame Theiler der drei ganzen Functionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ den Grad s, während die zwei Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen solchen vom Grade $r \geq s$ besitzen.

Als Anwendung der Formel (2) sollen die Bedingungen aufgestellt werden, unter denen eine ganze Function $f(x)$ vom Grade nr unter einander verschiedene Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_r$ besitzt, von denen $r-s$ $(s \leq r)$ einfach sind.

Aus (2) folgt die Relation

$$D^{(\sigma)}_{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\rho)} = \frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-r}} \left| s^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-r}}_{i_1+k_1} \right| \left| s^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-r}}_{i+k} \right|}{\left| s_{i+k} \right|}$$

$$(i,k=0,1,2,\dots,r-1;\ i,k_1=0,1,2,\dots,n-\rho-\sigma-1)$$

wo mit $x_1, x_2, \dots, x_r$ *alle* den Gleichungen $f(x)=0$ und $f'(x)=0$ gemeinsamen Wurzeln bezeichnet sind, so dass sie also die Grössen $x_1, x_2, \dots, x_r$, jede so oft geschrieben als ihre Ordnungszahl anzeigt, sind, und mit $s^{\lambda_1,\lambda_2,\dots}_{\tau}$ die τ^{te} Potenzsumme der Grössen $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_{n-r}}$ bezeichnet ist.

Man hat daher den Satz:

Ist unter den symmetrischen Functionen der n Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Gleichung $f(x)=0$

$$\left| s_{i+k} \right|_{(i,k=0,1,2,n-1)}\,,\qquad \left| s_{i+k} \right|_{(i,k=0,1,2,n-2)}\,,\qquad \left| s_{i+k} \right|_{(i,k=0,1,2,n-3)}\,,\quad \dots$$

die $(n-r+1)^{\text{te}}$ und unter den symmetrischen Functionen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_1+k_1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})} \right|_{(i, k=0, 1, 2, \ldots, r-1;\, i_1, k_1=0, 1, 2, \ldots, n-\rho-1)},$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_1+k_1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})} \right|_{(i, k=0, 1, 3, \ldots, r-1;\, i_1, k_1=0, 1, 2, \ldots, n-\rho-2)},$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_1+k_1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})} \right|_{(i, k=0, 1, 2, \ldots, r-1;\, i_1, k_1=0, 1, 2, \ldots, n-\rho-3)},$$

. . . .

die $(s+1)^{\text{te}}$ die erste nicht verschwindende, so besitzt $f(x)\, r$ unter einander verschiedene Wurzeln, von denen $r-s$ einfach sind.

DIE DIRICHLET'SCHEN REIHEN, DIE ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN UND DIE UNENDLICHEN PRODUKTE VON ENDLICHEM GESCHLECHT

VON

HJ. MELLIN

in HELSINGFORS.

§ 1.

Die von ABEL in der Abhandlung *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies* entwickelten reciproken Formeln

$$\varphi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}, \qquad s = \frac{\sin n\pi}{\pi} x^n \int_0^1 \frac{\varphi(xt)}{(1-t)^{1-n}} dt$$

haben bekanntlich eine ganze Reihe von bemerkenswerthen Untersuchungen veranlasst. Diese Formeln liefern in den Fällen, wo das fragliche Integral eine der obigen Formen besitz und die gegebene Function gewisse Voraussetzungen erfüllt, die Lösung einer sehr ausdehnbaren Aufgabe, welche als Umkehrung (Inversion) eines bestimmten Integrals bezeichnet worden ist. Je nach den Voraussetzungen, welche über die Form der Integrale und über die Eigenschaften der Functionen gemacht werden, ist man für die Lösung der Aufgabe im allgemeinen gezwungen recht verschiedene Wege einzuschlagen. Ein für Untersuchungen dieser Art gemeinsames Ergebniss ist indess eine bemerkenswerthe Reciprocität zwischen den jedesmal in Betracht kommenden Funktionsklassen resp. Integralklassen.

Im Nachstehenden werde ich zunächst zwei solche reciproke Integralklassen (I) und (II) charakterisiren. In den folgenden Paragraphen be-

absichtige ich sodann, den Zusammenhang zwischen den in der Überschrift dieser Arbeit erwähnten Begriffen mit Hülfe von Integralen der Klasse (I) von einer Seite zu beleuchten, welche bereits in meiner Arbeit[1] über unendliche Produkte von endlichem Geschlecht theilweise zur Sprache gekommen ist. Als neu dürften die allgemeinen Formeln angesehen werden können, welche ich für summatorische Funktionen zahlentheoretischer Funktionen erhalte, sowie der innige Zusammenhang, in welchen gewisse der genannten Produkte mit der analytischen Zahlentheorie gebracht werden.

Bezeichnet $F(z)$ eine von $z = u + iv$ abhängige Funktion, welche sich regulär verhält in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen, zur imaginären Axe parallelen Streifens $\alpha \leq u \leq \beta$ und für unendlich grosse, demselben Streifen angehörige Werthe von z auf die Form

$$(1) \qquad |F(z)| = e^{-\vartheta|v|} f(u, v)$$

derart gebracht werden kann, dass ϑ eine von Null verschiedene positive Constante, während f eine Veränderliche ist, welche bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt oder wenigstens nach Multiplikation mit $e^{-\varepsilon|v|}$ diese Eigenschaft bekommt, wie klein auch die positive Constante ε angenommen werden mag, so convergirt das Integral

$$(\mathrm{I}) \qquad J(x\,;\,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}dz \qquad \alpha \leq a \leq \beta$$

gleichmässig in jedem endlichen Theile[2] des durch die Ungleichheiten

$$(2) \qquad -(\vartheta - 2\varepsilon) \leq \theta \leq +(\vartheta - 2\varepsilon)$$

definirten Gebietes von $x = |x|e^{i\theta}$ und befriedigt daselbst zugleich die fundamentale Ungleichheit

$$(3) \qquad |J(x\,;\,a)| < C(a, \varepsilon)\,|x|^{-a},$$

wo C eine von x unabhängige Grösse ist.

[1] *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht.* Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 29. Der Anfang dieser Arbeit ist auch in Bd. 25 dieser Zeitschrift veröffentlicht worden.

[2] Eine kleine Umgebung der Stelle $x = 0$ ist eventuell auszuschliessen.

Das Integral (I) stellt also im Bereiche (2) eine analytische, daselbst überall (die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgeschlossen) regulär sich verhaltende Funktion von x dar. Mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes findet man zugleich, dass es für alle die Bedingung $\alpha \leq a \leq \beta$ erfüllenden Werthe von a eine und dieselbe analytische Function $\Phi(x)$ darstellt. In der Ungleichheit (3) kann hiernach *C bei endlicher Breite des Parallelstreifens* als eine bloss von ε abhängige Constante aufgefasst werden.

Setzt man in (3) das eine Mal $a = \alpha$, das andere Mal $a = \beta$, so ergeben sich die beiden, für den Bereich (2) gültigen Formeln

(4) $$\lim_{x=0} x^k \Phi(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} x^k \Phi(x) = 0,$$

wo k eine beliebige die Bedingung $\alpha < k < \beta$ erfüllende Constante bedeutet. Umgekehrt kann auch eine für den Bereich (2) gültige Ungleichheit $|\Phi(x)| < C|x|^{-a}$, $\alpha < a < \beta$, aus diesen Formeln gefolgert werden.

Zur vollständigen Kenntniss der Integrale (2) gehört überdies der innige Zusammenhang, in welchem sie mit einer anderen allgemeinen Gattung von Integralen der Form

(II) $$\int_0^\infty \Phi(x) x^{z-1} dx$$

stehen. Bezeichnet nämlich hier $\Phi(x)$ die durch das Integral (I) definirte Funktion, so zeigt sich, dass dieses Integral (II) für jeden innerhalb des Streifens $(\alpha < u < \beta)$ gelegenen Werth von $z = u + iv$ nicht nur einen bestimmten Sinn besitzt sondern auch gleich der ursprünglichen Funktion $F(z)$ ist. Man hat also die beiden Formeln

(5) $$\left|\begin{aligned} &\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} dz, && -\vartheta < \theta < +\vartheta, \\ & && \alpha < a < \beta, \\ &F(z) = \int_0^\infty \Phi(x) x^{z-1} dx, && \alpha < \Re(z) < \beta. \end{aligned}\right.$$

Soll $\Phi(x)$ die fundamentale Ungleichheit (3) befriedigen, so muss x im allgemeinen auf den engeren Bereich (2) beschränkt werden, wo ε eine zwar beliebig kleine aber constante Grösse bezeichnet. Dies ist ein wichtiger, bei allen weiteren Specialisirung zu beachtender Umstand.

Zwischen den Formeln (5) *besteht zugleich eine vollständige Reciprocität*, d. h. aus der letzteren kann auch die erstere gefolgert werden, wenn man von $\Phi(x)$ Folgendes annimmt: In dem durch die Ungleichheiten (2) definirten Bereich verhält sich $\Phi(x)$ überall (die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgenommen) regulär und besitzt bei beliebiger, innerhalb desselben Bereiches stattfindender Annäherung von x an die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ die beiden Eigenschaften (4).

Die aus (5) sich ergebenden Formeln

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-z}dz\int_0^\infty \Phi(x)x^{z-1}dx, \\ F(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}\frac{dx}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}dz \end{aligned}\right.$$

bilden offenbar für die oben charakterisirten Funktionen $\Phi(x)$ und $F(z)$ das Analogon zur FOURIER'schen Integralformel für Funktionen einer *reellen* Veränderlichen. Durch passende Substitutionen ist auch ein näherer Zusammenhang nachweisbar.

Die bisher in der analytischen Zahlentheorie verwendeten Integrale, welche ebenfalls die allgemeine Form (I) besitzen, wie z. B.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,\frac{x^z}{z}\,dz, \qquad a > 1$$

dürfen mit den oben charakterisirten Integralen (I) jedoch nicht verwechselt werden. Aus den weiteren Darlegungen wird sich ohne Mühe ergeben, dass die ersteren aus Integralen der Gattung (I) als *Grenzfälle* erhalten werden können.

Die obigen Beziehungen zwischen den beiden allgemeinen Integralklassen (I) und (II) sind zuerst vom Verfasser in der Arbeit *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen* (§ 14 und § 29, Acta Fenn. T. 21) entwickelt worden. Eine vollständige Herleitung derselben findet sich auch in § 7 meiner Arbeit *Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen* (Acta Mathematica Bd. 25), sowie

eine Ausdehnung derselben auf Funktionen mehrerer Veränderlichen in *Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale* (Acta Fenn. T. 22).

§ 2.

Von den DIRICHLET'schen Reihen

$$\mathrm{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{a_n^z}, \tag{7}$$

von denen die Rede sein wird, wollen wir annehmen, dass die Grössen a_n *reelle positive* mit n monoton ins Unendliche wachsende Zahlen sind. Es giebt bekanntlich[1] eine reelle Zahl l, welche dadurch eindeutig bestimmt ist, dass die Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem $\Re(z)$ algebraisch grösser oder kleiner als l ist. Diese Grösse l nennen wir den *Convergenzexponenten*[2] von $\mathrm{S}(z)$. Herr CAHEN zeigt (l. c.), dass die Reihe (7) *gleichmässig* convergirt in jedem endlichen Bereiche, welcher dem Innern der Halbebene $\Re(z) > l$ angehört. In dieser Halbebene stellt sie mithin eine eindeutige analytische Funktion von z dar. Beschränkt man z auf die Halbebene $\Re(z) \geq l + \varepsilon$, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, so bleibt $\left|\frac{1}{z}\mathrm{S}(z)\right|$ unter einer endlichen Grenze. Dies wird von Herrn CAHEN nicht ausdrücklich hervorgehoben, geht aber aus § 4 seiner Arbeit ohne Mühe hervor. Das Gebiet der unbedingten Convergenz ist ebenfalls eine Halbebene $\Re(z) > \lambda$, welche in der Halbebene $\Re(z) > l$ enthalten ist oder mit dieser zusammenfällt: $l \leq \lambda$. Die Grössen l und λ sind, falls sie ≥ 0 sind, von Herrn CAHEN folgenderweise bestimmt worden:

$$l = \limsup_{n=\infty} \frac{\log\left|\sum\limits_{\nu=1}^{n} f(\nu)\right|}{\log a_n}, \qquad \lambda = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum\limits_{\nu=1}^{n} |f(\nu)|}{\log a_n}.$$

[1] Cf. CAHEN: *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.* Annales de l'école norm. 3e Série. T. 9. 1894.

[2] Die analoge Benennung »Convergenzexponent eines unendlichen Produktes von endlichem Geschlecht» kommt schon früher vor in Herrn v. SCHAPERS Dissertation: *Über die Theorie der Hadamard'schen Funktionen*, Göttingen, 1898.

Man scheint aber bisher nicht bemerkt zu haben, dass diese Grössen, falls sie ≥ 0 sind, auch so charakterisirt werden können: *l, resp. λ, ist gleich der unteren Grenze derjenigen Werthe von x, für welche die obere Grenze von*

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu)\right|}{a_n^x}, \qquad \text{resp. } \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |f(\nu)|}{a_n^x}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty,$$

endlich ist. Auf den Beweis dieses Satzes muss ich hier verzichten.

In meiner oben citirten in Acta Fenn. T. 29 publicirten Arbeit habe ich mit Benutzung einer im letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit anzugebenden Formel nachgewiesen, dass es sehr ausgedehnte Gattungen Dirichlet'scher Reihen mit den nachfolgenden Eigenschaften giebt. Die durch eine Reihe der betreffenden Art definirte Funktion $\mathbf{S}(z)$ existirt in der ganzen z-Ebene, wo sie sich überall im Endlichen wie eine rationale Funktion verhält, und besitzt überdies die beiden folgenden Eigenschaften: 1) in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite findet sich höchstens nur eine endliche Anzahl Pole von $\mathbf{S}(z)$, 2) in jedem solchen Streifen nähert sich $\mathbf{S}(z)e^{-\varepsilon|z|}$ bei wachsendem $|z|$ der Null, wie klein auch die positive Constante ε angenommen werden mag. — Die hierdurch charakterisirten Dirichlet'schen Reihen sollen bei den nachfolgenden Erörterungen vorzugsweise berücksichtigt werden. Die einfachste unter denselben ist die für die Zahlentheorie fundamentale Funktion $\zeta(z)$.

Die Bedeutung dieser Funktionen bei der Ermittelung von gewissen asymptotischen Formeln soll zunächst angegeben werden.

Bezeichnen $\Phi(x)$ und $F(z)$ zwei reciproke Funktionen der in § 1 angegebenen Art so ergeben sich mit Benutzung von (5) die Formeln

$$(8) \quad \left|\begin{aligned} &\Psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)\mathbf{S}(z)x^{-z}dz, \qquad -\vartheta < \theta < +\vartheta, \\ &F(z)\mathbf{S}(z) = \int_0^\infty \Psi(x)x^{z-1}dx, \end{aligned}\right.$$

wo $\mathbf{S}$ durch (7), resp. Ψ durch die Reihe

$$(9) \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,\Phi(a_n x)$$

definirt ist. Zur Gültigkeit der Formeln (8) ist indess erforderlich, dass die in (5) angegebene Parallelstreifen $\alpha < \Re(z) < \beta$ und die Halbebene $\Re(z) > l$ einen gemeinsamen Theil haben. Auf diesen Theil hat man die Veränderliche z des zweiten Integrals sowie den Integrationsweg des ersten zu beschränken. Durch die Annahme $\Phi(x) = e^{-x}$, $F(z) = \Gamma(z)$ ergeben sich die gewöhnlichsten in (8) enthaltenen Specialfälle.

Die erstere Formel (8) ist nun besonders bemerkenzwerth. Ihr hauptsächlichstes Interesse erhält sie wegen der überaus grossen Menge *asymtotischer Formeln*, welche daraus für Reihen der Form (9) herfliesst. Es bezeichne $S(z)$ eine Dirichlet'sche Reihe der soeben angegebenen Art. Verhält sich nun auch die Funktion $F(z)$ in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite ähnlich wie S, während sie für unendlich grosse, dem betreffenden Streifen angehörige Werthe $z = u + iv$ auf die Form

$$F(z) = e^{-\vartheta |z|} f(u, v),$$

gebracht werden kann, wo ϑ und f die in § 1 angegebene Bedeutung haben, so kann der Integrationsweg des ersteren Integrals unter Berücksichtigung des Cauchy'schen Satzes beliebig weit in der negativen Richtung der reellen Axe verschoben werden, ohne dass das Integral aufhört, in jedem endlichen Theile des durch die Ungleichheiten

$$-(\vartheta - \varepsilon) \leqq \theta \leqq +(\vartheta - \varepsilon)$$

definirten Bereiches von $x = |x| e^{i\theta}$ gleichmässig zu convergiren. Die Summe der zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen stellt alsdann die Reihe (9) für *kleine* Werthe von x asymptotisch dar, während das Integral mit dem neuen Integrationswege das Restglied repräsentirt. Das Verhalten dieses Gliedes bei abnehmendem $|x|$ kann auf Grund der fundamentalen Ungleichheit (3) beurtheilt werden.

Im folgenden Paragraphen wird eines der bemerkenswerthesten in (8) enthaltenen Integrale besonders erörtert.

§ 3.

In diesem und in den Paragraphen 4, 5 und 6 werde ich den Zusammenhang besprechen, in welchen gewisse der in § 1 charakterisirten

Integrale mit einer der interessantesten Aufgaben der analytischen Zahlentheorie gebracht werden können, mit der Aufgabe, einen asymptotischen Ausdruck für die *summatorische Funktion*

$$F(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

einer gegebenen Zahlentheoretischen Function $f(n)$ zu finden.

In meiner Arbeit in Acta Math. Bd. 25 habe ich mit Hülfe der leicht zu bestätigenden Formel

$$(10) \qquad \log(1+x) + \sum_{\lambda=1}^{p} (-1)^{\lambda} \frac{x^{\lambda}}{\lambda} = (-1)^{p} \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{x^{z}}{z} dz,$$

$$-\pi < \theta < +\pi, \qquad p+1 < a < p+2,$$

für die Logarithmen unendlicher Produkte von endlichem Geschlecht (p):

$$(11) \qquad \Pi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{-\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \ldots + (-1)^p \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p} \right\}^{f(n)}$$

die folgende Formel enthalten:

$$(12) \qquad \log \Pi(x) = (-1)^p \mathbf{S}(p+1) \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \mathbf{S}(z) \frac{x^z}{z} dz,$$

$$p+1 < a < p+2,$$

wo

$$(13) \qquad \mathbf{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{a_n^z}.$$

Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass es sich um solche Produkte $\Pi(x)$ handelt, in denen die Grössen $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$ die Bedingung erfüllen

$$(14) \qquad -\pi < -\vartheta \leq \theta_n \leq +\vartheta < +\pi \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty,$$

unter ϑ eine reelle nicht negative Zahl verstanden, welche kleiner als π ist. *Unter dieser Voraussetzung* (14) *stellt alsdann die obige Formel* (12) *in dem durch die Ungleichheiten*

$$(15) \qquad -(\pi - \vartheta) < \theta < +(\pi - \vartheta)$$

charakterisirten Bereiche von $x = |x| e^{i\theta}$ *den Logarithmus von* $\Pi(x)$ *dar.*

Setzen wir weiterhin, wie es bei den in der Zahlentheorie auftretenden DIRICHLET'schen Reihen meistens der Fall ist, die Grössen a_n als *reelle positive* Zahlen voraus, so ist $\theta = 0$, d. h. *der Convergenzbereich des Integrals* (12) *wird alsdann durch die ganze x-Ebene, mit Ausschluss der negativen Hälfte der reellen Axe, geometrisch dargestellt.*

Die Formel (12) vermittelt nun offenbar einen bemerkenswerthen Zusammenhang zwischen den DIRICHLET'schen Reihen (13) und den unendlichen Produkten von endlichem Geschlecht (11). Ihr hauptsächlichstes Interesse erhält sie — ähnlich wie die erstere Formel (8) — wegen der unzähligen *asymptotischen Formeln*, welche daraus erhalten werden können. Gehört nämlich $\mathbf{S}(z)$ der allgemeinen, in § 2 charakterisirten Gattung solcher DIRICHLET'schen Reihen an, welche ausserhalb ihrer Convergenzbereiche analytisch fortgesetzt werden können und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzen, so kann der Integrationsweg von (12) unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes in negativer Richtung beliebig weit verschoben werden. Die Summe der zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen stellt dann den Logarithmus von $\Pi(x)$ für *grosse* Werthe von x asymptotisch dar, während das Integral mit dem neuen Integrationswege das *Restglied* repräsentirt. Das Verhalten dieses Gliedes bei wachsendem $|x|$ giebt die im Bereiche $-(\pi-\varepsilon)\leq\theta\leq+(\pi-\varepsilon)$ gültige fundamentale Ungleichheit

$$(16) \qquad |J(x\,;b)| < C(b,\varepsilon)\,|x|^b \qquad b < a$$

an, wo $J(x;b)$ das betreffende Integral bedeutet, während ε eine zwar beliebig kleine aber constante positive Grösse bezeichnet. Das Verhalten des Produktes $\Pi(x)$ im Unendlichen hängt also ab von dem Verhalten der Funktion $\mathbf{S}(z)$ ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe (13).

Die soeben angegebenen Bedeutung der Formel (12) ist schon in meiner früheren Arbeit (Acta Math. Bd. 25; Acta Fenn. T. 29) umständlich besprochen worden. Ich gehe nunmehr zur zahlentheoretischen Bedeutung derselben über.

Ich setze voraus, dass $\mathbf{S}(z)$ eine Reihe der oben angegebenen Art bezeichnet. Durch Verschiebung des Integrationsweges in negativer Richtung ergiebt sich eine Gleichung der Form

$$(17) \qquad \log\Pi(x) = R(x) + J(x\,;b), \qquad b < a,$$

wo $R(x)$ die Summe der Residuen bezeichnet, welche zu den zwischen den Integrationswegen $\Re(z) = a$ und $\Re(z) = b$ gelegenen Polen des Integranden gehören. Es verdient besonders beachtet zu werden, dass $J(x;b)$ bei wachsendem $|x|$ von kleinerer Ordnung ist als die sämmtlichen Glieder der Summe $R(x)$. Man findet nämlich leicht, dass jedes Glied von $R(x)$ eine Potenz von x enthält, deren Exponent[1] grösser ist als b; während $J(x;b)$ nach der fundamentalen Ungleichheit (16) von kleinerer Ordnung ist als $|x|^b$.

Die reellen positiven Grössen a_n seien so geordnet, dass $a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$. Substituirt man in (17) das eine Mal $x = \rho e^{(\pi-\varepsilon)i}$, das andere Mal $x = \rho e^{-(\pi-\varepsilon)i}$, so ergiebt sich durch Subtraktion eine Gleichung, deren einzelne Theile bei abnehmendem ε gegen bestimmte endliche Grenzwerthe convergiren. Nehmen wir nämlich ρ zwischen a_n und a_{n+1} an, so ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \log \frac{\Pi(\rho e^{(\pi-\varepsilon)i})}{\Pi(\rho e^{-(\pi-\varepsilon)i})} = 2\pi i\,[f(1) + f(2) + \ldots + f(n)],$$

während $R(\rho e^{(\pi-\varepsilon)i}) - R(\rho e^{-(\pi-\varepsilon)i})$ sich ebenfalls einer endlichen Grenze nähert, für welche ein mathematischer Ausdruck $2\pi i r(\rho)$ stets ohne Mühe erhalten werden kann. Hieraus schliessen wir, *dass sich auch der Ausdruck*

$$J(\rho e^{(\pi-\varepsilon)i}) - J(\rho e^{-(\pi-\varepsilon)i}) = \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\sin(\pi-\varepsilon)z}{\sin \pi z}\, \mathbf{S}(z)\, \frac{\rho^z}{z}\, dz$$

einer bestimmten endlichen Grenze $2\pi i g(\rho)$ nähern muss. Auf diese Weise ergiebt sich durch Grenzübergang

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = r(\rho) + g(\rho), \qquad a_n < \rho < a_{n+1}, \tag{18}$$

wo $r(\rho)$ eine aus Potenzen von ρ und $\log \rho$ gebildete endliche Summe bedeutet, welche nach der Formel

$$r(\rho) = \frac{R(\rho e^{\pi i}) - R(\rho e^{-\pi i})}{2\pi i} \tag{19}$$

---

[1] Diese Exponenten sind *reelle* Zahlen, falls die Pole von $\mathbf{S}(z)$ alle auf der reellen Axe liegen, was in der That mit den oben beabsichtigten DIRICHLET'schen Reihen der Fall ist.

berechnet werden kann, während $g(\rho)$ bloss als Grenzwerth definirt ist

$$(20) \qquad g(\rho) = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\sin(\pi - \varepsilon)z}{\sin \pi z} \mathbf{S}(z) \frac{\rho^z}{z} dz.$$

Da indess $J(x; b)$, wie oben gezeigt wurde, von geringerer Ordnung als $R(x)$ ist, so wird man zu der ganz natürlichen *Vermutung* veranlasst, dass auch die Grenzwerthe $g(\rho)$ und $r(\rho)$ in derselben Beziehung zu einander stehen, *dass also $g(\rho)$ bei wachsendem ρ wahrscheinlich von geringerer Ordnung als $r(\rho)$ ist.* — Man stösst indess schon in einzelnen Fällen auf grosse Schwierigkeiten, wenn man die Richtigkeit dieser Vermutung streng zu beweisen versucht.

Die hier dargelegte *heuristische*[1] Methode zur Ermittelung eines asymtotischen Ausdrucks für die summatorische Funktion einer gegebenen zahlentheoretischen Funktion hat vor der verwandten Methode von Halphen[2] den Vorzug, dass unsere Betrachtungen von dem Umstande unabhängig sind, ob das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathbf{S}(z) \frac{\rho^z}{z} dz = \lim_{h=\infty} \int\limits_{b-ih}^{b+ih} \mathbf{S}(z) \frac{\rho^z}{z} dz$$

einen bestimmten Sinn hat oder nicht, während die Erörterungen von Halphen nur dann stichhaltig sind, wenn dieses Integral einen bestimmten Sinn besitzt, was indess ausserhalb des Convergenzbereiches von $\mathbf{S}(z)$ nur ausnahmsweise der Fall sein kann. Zu Gunsten unserer Methode spricht noch die Aussicht, dass die Formel (20) als Ausgangspunkt für weitere, die Ordnung von $g(\rho)$ betreffende Untersuchungen vielleicht dienen kann.

---

[1] Siehe Bachmann, *Anal. Zahlentheorie.* S. 468.

[2] Comptes Rendus. T. 96, p. 634.

§ 4.

Als Beispiele zu den Erörterungen des vorigen Paragraphen betrachten wir die beiden Produkte

$$(21) \qquad \Pi_1(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\}^{T(n)},$$

$$(22) \qquad \Pi_2(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2} \right\}^{S(n)},$$

wo $T(n)$ die Anzahl und $S(n)$ die Summe aller Theiler von n bezeichnet.

Nach der allgemeinen Formel (12) und auf Grund der bekannten Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^z} = [\zeta(z)]^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^z} = \zeta(z)\zeta(z-1)$$

hat man, falls der Integrationsweg zwischen p und $p+1$ verlegt wird:

$$(23) \qquad \log \Pi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} [\zeta(z)]^2 \frac{x^z}{z} \, dz = J_1(x; a), \qquad 1 < a < 2,$$

$$(24) \qquad \log \Pi_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \zeta(z)\zeta(z-1) \frac{x^z}{z} \, dz = J_2(x; a), \qquad 2 < a < 3.$$

Hieraus ergeben sich unter Berücksichtigung des Cauchy'schen Satzes die asymtotischen Entwickelungen:

$$(25) \qquad \log \Pi_1(x) = R_1(x) + J_1(x; a), \qquad -2k-1 < a < 2k+1,$$

$$(26) \qquad \log \Pi_2(x) = R_2(x) + J_2(x; a), \qquad -\infty < a < 0,$$

wo

$$(27)\qquad R_2(x) = -\frac{1}{2}x\log^2 x + (1-2E)x\log x + (1+2E)x$$

$$+\frac{1}{4}\log x + \log\sqrt{2\pi} - E^2 + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{B_\nu}{2\nu}\right)^2 \frac{x^{-(2\nu-1)}}{2\nu-1},$$

$$(28)\qquad R_1(x) = \frac{\pi^2}{12}x^2\log x + \frac{1}{2}\left[\zeta'(2) - \frac{\pi^2}{12}(1-2E)\right]x^2 + \frac{1}{2}x\log x$$

$$+\left[\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E\right]x + \frac{1}{24}\log x + \frac{1}{12}\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\zeta'(-1).$$

In diesen Formeln bezeichnet E die EULER'sche Constante.

Während die Anzahl der Glieder in $R_1(x)$ von der Lage des Integrationsweges abhängt, so ist diese Anzahl in $R_2(x)$ constant, sobald nur der Integrationsweg in der Halbebene $\Re(z) < 0$ gelegen ist. Dies rührt davon her, dass diese Halbebene infolge $\zeta(-n-1)\zeta(-n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, keinen Pol des Integranden von $J_2(x; a)$ enthält. Der Werth dieses Restintegrals ist mithin von der Lage des Integrationsweges in der genannten Halbebene unabhängig. Hieraus folgt weiter mit Benutzung der fundamentalen Ungleichheit (16), dass der Ausdruck

$$x^m\left[\log\Pi_2(x) - R_2(x)\right] = x^m J_2(x; a),$$

obwohl die Anzahl der Glieder von $R_2(x)$ constant ist, die sehr bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt, bei wachsendem $|x|$ sich der Grenze Null zu nähern, *wie gross auch die positive Zahl m angenommen werden mag.*

Wendet man nun die allgemeinen Formeln (18), (19), (20) auf die gegenwärtigen Fälle an, so folgt:

$$(29)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} T(\nu) = \rho\log\rho + (2E-1)\rho + \frac{1}{4} + g_1(\rho),$$

$$n < \rho < n+1.$$

$$(30)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} S(\nu) = \frac{\pi^2}{12}\rho^2 - \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{24} + g_2(\rho).$$

Vergleichen wir diese mit den aus der Zahlentheorie bekannten Formeln

$$\sum_{\nu=1}^{n} T(\nu) = \log n + (2E - 1)n + O(\sqrt{n}),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} S(\nu) = \frac{\pi^2}{12} n^2 + O(n \log n),$$

so bestätigt die erstere hinsichtlich der Ordnung von $g_1(\rho)$ die im vorigen Paragraphen motivirte Vermutung, während die letztere damit nicht in Widerspruch steht, da $O(n \log n)$ eine Grösse bezeichnet, welche *höchstens* von der Ordnung $n \log n$ ist. Unsere Formel (30) deutet aber an, dass sie wahrscheinlich nur von der Ordnung n ist.

§ 5.

Wir kehren wieder zu der allgemeinen Aufgabe zurück, einen Ausdruck für die summatorische Funktion einer gegebenen Zahlentheoretischen Funktion zu ermitteln. Diese Aufgabe ist durch die Formeln (18), (19), (20) wenigstens theoretisch gelöst worden, obwohl die sehr wesentliche Frage nach der Ordnung von $g(\rho)$ künftiger Untersuchungen bedürftig ist. Eben deshalb dürfte der Umstand ein gewisses Interesse beanspruchen können, dass diese Formeln keineswegs alleinstehend sind, sondern dass es vielmehr unendlich viele Integrale der in § 1 charakterisirten Art giebt, von denen $g(\rho)$ als Grenzwerth dargestellt werden kann.

Zur Erzeugung solcher Integrale eignen sich besonders die hypergeometrischen Integrale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z-\rho_1) \ldots \Gamma(z-\rho_m) x^{-z} dz,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z-\rho_1) \ldots \Gamma(z-\rho_m) \Gamma(\sigma_1 - z) \ldots \Gamma(\sigma_n - z) x^{-z} dz.$$

Bei dieser Gelegenheit werden wir nur das einfachste unter ihnen

$$J(x\,; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz \tag{31}$$

verwenden. Mit Hülfe desselben können wir unendlich viele *discontinuirliche Faktoren* erzeugen, je nachdem wir den Integrationsweg in verschiedene Theile der z-Ebene verlegen.

Ist erstens $a > 0$, so ist $J(x\,;a) = e^{-x}$ und mithin

$$(32)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-\left(\frac{a_n}{x}\right)^m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\mathbf{S}(mz)x^{mz}\,dz, \qquad a > 0,\ ma > l,$$

wo m eine so grosse reelle positive Zahl bezeichnet, dass ma grösser ist als der Convergenzexponent l von

$$(33)\qquad \mathbf{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{a_n^z}.$$

Durch eine einfache Substitution erhält die rechte Seite von (32) die Form

$$(34)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-\left(\frac{a_n}{x}\right)^m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma\left(1+\frac{z}{m}\right)\mathbf{S}(z)x^z\frac{dz}{z}, \qquad a > l,$$

wo a grösser als der Convergenzexponent l von $\mathbf{S}(z)$ sein muss.

Lassen wir jetzt m ohne Ende wachsen, so ergiebt sich mit Berücksichtigung des discontinuirlichen Faktors

$$(35)\qquad \lim_{m=\infty} e^{-x^m} = \begin{cases} 1\,, & x < 1, \\ e^{-1}\,, & x = 1, \\ 0\,, & x > 1, \end{cases}$$

die Formel [1]

$$(36)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \lim_{m=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma\left(1+\frac{z}{m}\right)\mathbf{S}(z)x^z\frac{dz}{z}, \qquad a > l,\quad a_n < x < a_{n+1}.$$

Wird durch die Reihe $\mathbf{S}(z)$ eine Funktion definirt, welche ausserhalb des Convergenzbereiches dieser Reihe existirt und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzt, so kann der Integrationsweg *vor dem Grenzübergange* unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes in negativer

[1] Der genauere Beweis, dass die linke Seite von (36) der Grenzwerth der linken Seite von (32) ist, wird dem Leser überlassen.

Richtung verschoben werden. Durch Wiederholung der in § 3 angestellten Erörterungen gelangt man auch jetzt zu der Formel

$$(37) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = r(x) + g(x), \qquad a_n < x < a_{n+1},$$

wo $r(x)$ eine aus Potenzen von x und $\log x$ gebildete endliche Summe bezeichnet, während $g(x)$ bloss als Grenzwerth definirt ist:

$$(38) \qquad g(x) = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma\left(1 + \frac{z}{m}\right) \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z}, \qquad b < l.$$

Die Vermutung, dass $g(x)$ wahrscheinlich von geringerer Ordnung als $r(x)$ ist, kann ähnlich wie in § 3 motivirt werden.

Da aus den bei der Herleitung von (37) anzustellenden Erörterungen die Existenz des Grenzwerthes (38) unmittelbar einleuchtet, so sind dieselben von dem Umstande unabhängig, ob das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z} = \lim_{h=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ih}^{b+ih} \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z}$$

einen Sinn hat oder nicht.

Es verdient beachtet zu werden, dass die Berechnung des Ausdruckes $r(x)$ sich hier einfacher gestaltet als in § 3, weil der Integrand in (34) bei hinreichend grossem m keine anderen Pole zwischen den Integrationswegen $\Re(z) = a$ und $\Re(z) = b$ besitzt als diejenigen des Ausdruckes $\frac{x^z}{z} \mathbf{S}(z)$: Es lässt sich ohne Mühe zeigen, *dass $r(x)$ einfach gleich der Summe der Residuen ist, welche zu den zwischen den genannten Geraden gelegenen Polen dieses Ausdruckes gehören.* — Hiermit vergleiche man die verwandte Methode von HALPHEN.

§ 6.

Nehmen wir zweitens an, dass a in dem Integrale (31) einen zwischen den negativen ganzen Zahlen $-k$ und $-(k+1)$ gelegenen Werth besitzt, so ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)x^{-z}dz = \sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{(-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}} = e^{-x} - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}}$$

$$-(k+1) < a < -k.$$

Setzt man also

$$(39)\qquad E_k(x) = \frac{\underline{|k}}{(-x)^k}\left[\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}} - e^{-x}\right] = (-1)^{k-1}\frac{\underline{|k}}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)x^{-k-z}dz,$$

$$-(k+1) < a < -k,$$

so ist

$$\lim_{x=0}E_k(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty}E_k(x) = 1,$$

$$\lim_{x=1}E_k(x) = (-1)^{k-1}\underline{|k}\left[e^{-1} - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\right] = C.$$

Da $-k-a > 0$, so erhalten wir mit Benutzung von (39):

$$(40)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}f(n)E_k\left[\left(\frac{x}{a_n}\right)^m\right] = (-1)^{k-1}\frac{\underline{|k}}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\mathbf{S}(-mk-mz)x^{-mk-mz}dz,$$

$$-(k+1) < a < -k,$$

wo $\mathbf{S}(z)$ durch (33) definirt ist und m so gross sein muss, dass $(-k-a)$ grösser ist als der Convergenzexponent von $\mathbf{S}(z)$.

Lassen wir jetzt m ohne Ende wachsen, so ergiebt sich mit Berücksichtigung des discontinuirlichen Faktors

$$(41)\qquad \lim_{m=\infty}E_k(x^m) = \begin{cases} 0\,, & x < 1, \\ C\,, & x = 1, \\ 1\,, & x > 1, \end{cases}$$

die Formel

$$(42)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}f(\nu) = \lim_{m=\infty}(-1)^{k-1}\frac{\underline{|k}}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\mathbf{S}(-mk-mz)x^{-mk-mz}dz$$

$$a_n < x < a_{n+1}, \qquad -(k+1) < a < -k.$$

Die rechte Seite von (40) besitzt offenbar die Eigenschaft, dass sie sich der Grenze Null nähert, falls der Integrationsweg ohne Ende in negativer Richtung verschoben wird. Mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes ergiebt sich also für (40) eine neue Reihenentwicklung. Setzt man dieselbe in (42) ein, so hat man die Formel

$$(43)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \lim_{m=\infty} \underline{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|k+\nu}} S(m\nu) x^{m\nu},$$

$$a_n < x < a_{n+1}.$$

Der einfachste Fall tritt ein, wenn $k = 0$ angenommen wird. Die obigen Formeln (40), (42), (43) nehmen alsdann die folgenden Formen an:

$$(44)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\left\{1 - e^{-\left(\frac{x}{a_n}\right)^m}\right\} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) S(-mz) x^{-mz} dz,$$

$$(45)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = -\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) S(-mz) x^{-mz} dz,$$

$$-1 < a < 0, \qquad a_n < x < a_{n+1}.$$

$$(46)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} S(m\nu) x^{m\nu}, \qquad a_n < x < a_{n+1}.$$

Die letzte Formel ist als Herrn HELGE VON KOCH zugehörig anzusehen. In seiner Arbeit *Sur la distribution des nombres premiers* (Acta Math. Bd. 24) wendet er nämlich mit bemerkenswerthem Erfolg einige Specialfälle von (46) an. Dass die Methode, wodurch er dieselben erhält, auch zu der allgemeinen Formel (46) führt, kann Herrn VON KOCH natürlich nicht entgangen sein, obgleich er die Allgemeinheit seiner Methode nicht Ausdrücklich hervorhebt. Die Übereinstimmung der beiden in (44) und (46) vorkommenden Reihenentwicklungen kann in der That auch ohne Zuhülfenahme des obigen Integrals erwiesen werden, worauf sich die Formel (46) ergiebt, indem man $m = \infty$ setzt; und dies ist eben die Methode des Herren VON KOCH.

Der oben hervorgebrachte Zusammenhang dieser und aller vorangehenden Entwicklungen mit den betreffenden Integralen scheint vor allem deshalb nicht unwichtig zu sein, weil sich hierdurch die Aussicht eröffnet,

die Erforschung der Zahlentheoretischen Gesetze den Methoden der CAUCHY'schen Integraltheorie zugänglich zu machen.

Mit Hülfe der Formel (45) ist man im Stande, einen interessanten Zusammenhang zu entdecken zwischen den Formeln des Herrn VON KOCH und denjenigen, welche Herr VON MANGOLDT (Crelles Journ. Bd. 114) im Anschluss an RIEMANN zum ersten Male streng bewiesen hat. Nimmt man nämlich $S(z)$ gleich $-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ an, so ist das Schlussergebniss folgendes. Man gelangt zu den erstgenannten oder letztgenannten Formeln, je nachdem der Integrationsweg des Integrals (44) in negativer oder in positiver Richtung verschoben wird und sodann $m = \infty$ gesetzt resp. hinreichend gross angenommen wird.

§ 7.

Setzt man

$$\mathbf{S}(s, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{(w+n)^s},$$

$$F(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$$

$$\mathbf{T}(s, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{(w+n)^s},$$

so ist $\mathbf{T}(s, w+1) - \mathbf{T}(s, w) = -\mathbf{S}(s, w)$. Zwischen den beiden Reihen bestehen auch andere interessante Beziehungen.

In diesem Paragraphen werde ich eine Methode entwickeln, nach welcher man einen *asymtotischen* Ausdruck für die Summe

$$\sum_{n=1}^{m-1} \mathbf{S}(s, w+\nu)$$

in allen Fällen erhalten kann, wo die durch die Reihe $\mathbf{S}$ definirte Funktion ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe existirt und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzt. Gleichzeitig mit dem asymtotischen Ausdrucke ergiebt sich auch für die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{'} \mathbf{S}(s, w+\nu) = \mathbf{T}(s, w) \tag{47}$$

eine neue Entwicklung, welche ihre analytische Fortsetzung darstellt.

Mit Benutzung der leicht zu bestätigenden Formel

$$(48)\qquad \frac{\Gamma(s)}{(x+y)^s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)}{x^{s-z}}\frac{\Gamma(z)}{y^z}dz \qquad \Re(s) > a > 0,$$

ergiebt sich zunächst die Formel

$$\Gamma(s)\mathbf{S}(s, w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)}{w^{s-z}}\Gamma(z)\mathbf{S}(z)dz$$

$$a > 0, \quad a > l, \quad \Re(s) > a,$$

wo $\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}(z, 0)$, und mit ihrer Hülfe

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\mathbf{S}(s, w+\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\mathbf{S}(s, w+\nu) - \sum_{\nu=0}^{\infty}\mathbf{S}(s, w+m+\nu)$$

$$= \mathbf{T}(s, w) - \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(s-z)}{(w+m+\nu)^{s-z}}\Gamma(z)\mathbf{S}(z)dz$$

$$= \mathbf{T}(s, w) - \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(s-z)}{\Gamma(s)}\zeta(s-z, w+m)\Gamma(z)\mathbf{S}(z)dz$$

$$a > 0, \quad a > l, \quad \Re(s) > a + 1,$$

wo l den Convergenzexponenten von $\mathbf{S}(z)$ bezeichnet und

$$\zeta(s, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^s}.$$

In der obigen Formel muss s zunächst auf die durch die Ungleichheiten definirte Halbebene beschränkt werden. Gehört aber $\mathbf{S}(z)$ wieder der in § 2 charakterisirten, umfassenden Klasse solcher Dirichlet'schen Reihen an, welche ausserhalb ihrer Convergenzbereiche analytisch fortgesetzt werden können und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzen, so kann der Integrationsweg $\Re(z) = a$ unter Berücksichtigung des Cauchy'-

schen Satzes beliebig weit in negativer Richtung verschoben werden, wodurch sich ergiebt:

$$(49)\qquad \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathbf{S}(s, w+\nu) = \mathbf{T}_1(s, w) - R(s, w+m; a) - I(s, w+m; a),$$
$$\Re(s) > a + 1,$$

wo R die Summe der zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen bezeichnet, während I das Integral mit dem neuen Integrationswege bedeutet. *Gleichzeitig mit dieser Verschiebung hat sich aber auch in derselben Richtung die Halbebene $\Re(s) > a + 1$ erweitert, in welcher das Integral I eine eindeutige und regulär sich verhaltende Funktion von s darstellt.* Da $\Re(s - z) > 1$, so ist $\lim\limits_{m=\infty} \zeta(s - z, w + m) = 0$. Hieraus folgt leicht $\lim\limits_{m=\infty} I(s, w + m; a) = 0$. Die Formel (49) stellt also die Summe zur Linken für grosse Werthe von m *asymtotisch* dar, wobei s einen beliebigen Werth in der Halbebene $\Re(s) > a + 1$ besitzen darf.

Die Formel (49) kann aber auch von einem anderen Gesichtspunkte aus aufgefasst werden. Dadurch wird nämlich $\mathbf{T}(s, w)$ zugleich folgenderweise als Grenzwerth dargestellt:

$$(50)\qquad \mathbf{T}_1(s, w) = \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{m-1} \mathbf{S}(s, w+\nu) + R(s, w+m; a) \right\},$$

und zwar gilt diese Darstellung für die Halbebene $\Re(s) > a + 1$. Die Anzahl der in R vorkommenden Glieder ist bei wachsendem m constant aber von a abhängig. Mit Benutzung von (50) lässt sich $\mathbf{T}(s, w)$ weiter in der Form einer Reihe darstellen:

$$(51)\qquad \mathbf{T}(s, w)$$
$$= R(s, 0; a) + \sum_{m=0}^{\infty}{}' \left\{ \mathbf{S}(s, w+m) + R(s, w+m+1; a) - R(s, w+m; a) \right\},$$

und zwar convergirt die rechte Seite gleichmässig in jedem endlichen Theile der Halbebene $\Re(s) > a + 1$, welcher keine Pole der Glieder dieser Reihe enthält. Indem man $|a|$ hinreichend gross annimmt kann man bewirken, dass die rechte Seite die analytische Fortsetzung der linken Seite in einem beliebigen Theile der s-Ebene darstellt. Vergleicht man (51) mit

der Darstellung (47) welche einen beschränkteren Gültigkeitsbereich besitzt, so ist die Analogie mit dem neueren MITTAG-LEFFLER'schen Satze auffallend.

Ohne noch zu den im folgenden Paragraphen zu besprechenden vielfachen Integralen die Zuflucht zu nehmen, kann man die Untersuchung der durch die Reihe

$$\mathbf{R}(s, u+v) = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \frac{f(\mu)g(\nu)}{[a(u+\mu)^\alpha + b(v+\nu)^\beta]^s}$$

definirten Funktion auf eine Discussion des nachstehenden Integrals zurückführen

$$\Gamma(s)\mathbf{R}(s, u, v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)}{a^{s-z}}\frac{\Gamma(z)}{b^z}\mathbf{S}(\alpha s - \alpha z, u)\mathbf{T}(\beta z, v)dz$$

$$c > 0, c > \frac{l'}{\beta}, \ \Re(s) > c + \frac{l}{\alpha},$$

wo $\mathbf{S}$ und $\mathbf{T}$ durch die Reihen

$$\mathbf{S}(s, u) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{f(\mu)}{(u+\mu)^s}, \qquad \mathbf{T}(s, v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g(\nu)}{(v+\nu)^s}$$

definirt sind, deren Convergenzexponenten mit l und l' bezeichnet sind. Diese Integralformel ist ebenfalls eine unmittelbare Folge von (48) und giebt zu Untersuchungen Veranlassung, welche den vorangehenden ähnlich, zugleich aber allgemeiner als dieselben sind.

§ 8.

Aus den nachfolgenden Auseinandersetzungen wird sich ergeben, welcher umfassenden Verallgemeinerung die im vorangehenden Paragraphen angewandte Methode noch fähig ist. Die erweiterte Methode hat zum Ziele, nicht nur die Existenz der analytischen Fortsetzung einer durch eine DIRICHLET'sche Reihe definirten Funktion unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen nachzuweisen, sondern auch das Verhalten dieser Fortsetzung im Unendlichen sowohl als im Endlichen genau festzustellen.

Bei dieser Gelegenheit muss ich mich auf einige Andeutungen allgemeiner Art beschränken und den Leser für das nähere hierüber auf meine

Arbeit *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlicher Geschlecht* (Acta Fenn. T. 29) verweisen, wo die fragliche Methode ausführlich entwickelt worden ist.

Es handelt sich zunächst um die Herleitung einer fundamentalen Transformationsformel, mittels deren die betreffenden DIRICHLET'schen Reihen auf einfachere Formen zurückgeführt werden.

Zu dem Ende ersetze man in der Formel (48) y durch $y + v$ und wende unter dem Integralzeichen dieselbe Formel (48) an. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergiebt sich die folgende Verallgemeinerung von (48):

$$(52) \qquad \frac{\Gamma(s)}{(w_0 + w_1 + \ldots + w_p)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} \cdots \int_{a_p - i\infty}^{a_p + i\infty} \frac{\Gamma(s - z_1 - \ldots - z_p)}{w_0^{s - z_1 - \ldots - z_p}} \frac{\Gamma(z_1)}{w_1^{z_1}} \cdots \frac{\Gamma(z_p)}{w_p^{z_p}} dz_1 \ldots dz_p$$

$$a_\nu > 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, p, \ \Re(s) > a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 0,$$

Durch eine nähere Erwägung überzeugt man sich, dass diese Formel wenigstens dann gültig ist, wenn die reellen Theile der Grössen w positiv sind.

Bezeichnet nun $R(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von $v_1, \ldots, v_n$ oder, noch allgemeiner, ein Polynom der Form

$$(53) \qquad R(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\nu=0}^{p} C_\nu v_1^{k_\nu^{(1)}} v_2^{k_\nu^{(2)}} \ldots v_n^{k_\nu^{(n)}},$$

wo die Exponenten k reelle nicht negative Zahlen bezeichnen, so erhält man mit Hülfe von (52) die Formel:

$$(54) \qquad \frac{\Gamma(s)}{[R(v_1, v_2, \ldots, v_n)]^s}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} \cdots \int_{a_p - i\infty}^{a_p + i\infty} \frac{\Gamma(l_0)}{C_0^{l_0}} \frac{\Gamma(z_1)}{C_1^{z_1}} \cdots \frac{\Gamma(z_p)}{C_p^{z_p}} \frac{dz_1 \ldots dz_p}{v_1^{l_1} \ldots v_n^{l_n}},$$

wo

$$(55)\quad \begin{cases} l_0 = s - z_1 - z_2 - \ldots - z_p, \\ l_1 = k_0^{(1)}(s - z_1 - \ldots - z_p) + k_1^{(1)} z_1 + \ldots + k_p^{(1)} z_p, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ l_n = k_0^{(n)}(s - z_1 - \ldots - z_p) + k_1^{(n)} z_1 + \ldots + k_p^{(n)} z_p. \end{cases}$$

Diese Formel hat wenigstens dann einen bestimmten Sinn, *wenn die reellen Theile der Coefficienten C sowie die Grössen v positiv sind.*

Nunmehr stelle man sich die Grössen v als positive unstetige Veränderliche vor, von denen jede unabhängig von den übrigen eine solche Folge unbeschränkt wachsender Werthe durchläuft, dass die bezüglichen Reihen

$$(56)\qquad \mathrm{S}_1(s) = \sum_{(v_1)} \frac{\varphi_1(v_1)}{v_1^s}, \quad \ldots, \quad \mathrm{S}_n(s) = \sum_{(v_n)} \frac{\varphi_n(v_n)}{v_n^s},$$

unter $\varphi_\nu(v_\nu)$ eine nur von v_ν abhängige Grösse verstanden, für hinreichend grosse Werthe von $\Re(s)$ unbedingt convergiren. Da die reellen Theile der Coefficienten C als positiv vorausgesetzt sind, so ergiebt sich ohne Mühe — und zwar am schnellsten mit Hülfe von (54) — dass auch die Reihe

$$(57)\qquad \mathrm{S}(s) = \sum_{(v_1, \ldots, v_n)} \frac{\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\ldots\varphi_n(v_n)}{[R(v_1, v_2, \ldots, v_n)]^s},$$

wo v_ν genau dieselben Werthe durchläuft wie in $\mathrm{S}_\nu(s)$, in einer gewissen Halbebene unbedingt convergirt. Mit Benutzung dieser Bezeichnungen ergiebt sich nun schliesslich aus (54) die Transformationsformel

$$(58)\qquad \Gamma(s)\mathrm{S}(s)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} \ldots \int_{a_p - i\infty}^{a_p + i\infty} \frac{\Gamma(l_0)}{C_0^{l_0}} \frac{\Gamma(z_1)}{C_1^{z_1}} \ldots \frac{\Gamma(z_p)}{C_p^{z_p}} \mathrm{S}_1(l_1) \ldots \mathrm{S}_n(l_n) dz_1 \ldots dz_p,$$

wo die positiven Grössen a und der reelle Theil von s solche Werthe besitzen müssen, dass die l_ν in den Convergenzbereichen der bezüglichen Reihen S_ν bleiben. Es wird zugleich wie früher angenommen, dass die reellen Theile der Coefficienten C positiv sind.

Bezeichnet man die Werthe, welche v_ν in den obigen Formeln durchläuft mit $a_\lambda^{(\nu)}$, $\lambda = 0, 1, \ldots, \infty$, sowie die entsprechenden Werthe von $\varphi_\nu(v_\nu)$ mit $f_\nu(\lambda)$, so können die Reihen (56) und (57) auch folgenderweise geschrieben werden

$$(59) \qquad \mathbf{S}_1(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{\left[a_\lambda^{(1)}\right]^s}, \quad \ldots, \quad \mathbf{S}_n(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{\left[a_\lambda^{(n)}\right]^s},$$

$$(60) \qquad \mathbf{S}(s) = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0}^{\infty} \frac{f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) \ldots f_n(\lambda_n)}{\left[R\left(a_{\lambda_1}^{(1)}, a_{\lambda_2}^{(2)}, \ldots, a_{\lambda_n}^{(n)}\right)\right]^s}.$$

In meiner oben citirten Arbeit ist nun die durch die Reihe $\mathbf{S}(s)$ definirte Funktion unter den folgenden Voraussetzungen in Bezug auf die durch die Reihen $\mathbf{S}_\nu(s)$ definirten Funktionen ausführlich erörtert worden. Von diesen Funktionen $\mathbf{S}_\nu$ wurde nämlich angenommen, *dass sie in der ganzen s-Ebene existirende eindeutige Funktionen sind, welche sich an jeder endlichen Stelle wie rationale Funktionen verhalten und überdies die beiden folgenden Eigenschaften besitzen:* 1) *in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite giebt es höchstens nur eine endliche Anzahl Pole der* $\mathbf{S}_\nu$, 2) *im jedem solchen Streifen convergiren die* $\mathbf{S}_\nu$, *nach Multiplikation mit* $e^{-\varepsilon|s|}$, *bei wachsendem* $|s|$ *gegen die Null, wie klein auch die positive Zahl* ε *angenommen werden mag.* Unter diesen Voraussetzungen wurde gezeigt, *dass das Produkt* $\Gamma(s)\mathbf{S}(s)$ *ebenfalls eine in der ganzen s-Ebene existirende eindeutige Funktion ist, welche zugleich die beiden anderen Eigenschaften der* $\mathbf{S}_\nu$ *besitzt. Liegen die Pole der* $\mathbf{S}_\nu$ *alle auf der reellen Axe, so gilt dasselben auch von den Polen von* $\mathbf{S}$. *Sind die Coefficienten* C *insbesondere* ***reelle positive*** *Zahlen, so besitzt nicht nur das Produkt* $\Gamma(s)\mathbf{S}(s)$ *sondern auch die Funktion* $\mathbf{S}(s)$ *alle oben genannten Eigenschaften.*

Sieht man von gewissen mit dem Problem der Primzahlen unmittelbar oder mittelbar zusammenhängenden Reihen ab, so dürften die meisten übrigen Dirichlet'schen Reihen, welche für die Zahlentheorie von Interesse sind oder voraussichtlich sein werden, in der soeben charakterisirten allgemeinen Klasse enthalten sein. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass das Verhalten der durch die betreffenden Reihen definirten Funktionen im Unendlichen noch genauer dahin präcisirt werden kann, dass sie, *schon nach Multiplikation mit einer passenden Potenz von s*, bei wachsendem $|s|$ sich der Grenze Null nähern, falls s zugleich auf einen beliebigen Streifen der

oben angegebenen Art beschränkt ist. Eine nähere Begründung der letzteren Behauptung hängt mit dem Umstande zusammen, dass die Funktion $\zeta(s, w)$, welche bekanntlich in der analytischen Zahlentheorie eine fundamentale Rolle spielt, die letztgenannte Eigenschaft besitzt, falls w reell und positiv ist. Hierbei beachte man auch die nachfolgenden Specialisirungen der obigen Transformationsformel.

Setzt man beispielsweise $a_\lambda^{(\nu)} = w_\nu + \lambda$ und $f_\nu(\lambda) = 1$ für $\lambda = 0, 1, \ldots, \infty$, so wird

$$\mathrm{S}_\nu(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(w_\nu + \lambda)^s} = \zeta(s, w_\nu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$\mathrm{S}(s) = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0}^{\infty} \frac{1}{[R(w_1 + \lambda_1, \ldots, w_n + \lambda_n)]^s}.$$

Da die Funktion $\zeta(s, w)$ alle von den S_ν angenommen Eigenschaften besitzt, so ist der folgende Satz nur ein einfaches Corollarium aus dem Obigen:

Bezeichnet $R(w_1, \ldots, w_n)$ eine beliebige ganze rationale Funktion oder allgemeiner ein Polynom der Form (53), *dessen Coefficienten die Bedingung erfüllen, dass ihre reellen Theile positiv sind, in welchem Falle die Reihe* $\mathrm{S}(s)$ *einen durch eine gewisse Halbebene darstellbaren Convergenzbereich besitzt, so wird durch diese Reihe eine in der ganzen s-Ebene existirende eindeutige Funktion definirt, welche sich an jeder endlichen Stelle wie eine rationale Funktion verhält. Die Pole dieser Funktion liegen alle auf der reellen Axe. Beschränkt man die Veränderliche s auf einen beliebigen, zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite, so nähert sich $e^{-\varepsilon|s|}\Gamma(s)\mathrm{S}(s)$ bei wachsendem $|s|$ der grenze Null, wie klein auch die positive Grösse ε angenommen werden mag. Sind die Coefficienten C* reelle positive *Zahlen, so besitzt nicht nur $e^{-\varepsilon|s|}\Gamma(s)\mathrm{S}(s)$ sondern auch $e^{-\varepsilon|s|}\mathrm{S}(s)$ die letztgenannte Eigenschaft.*

Identificiren wir die Reihen (59) mit den bei der Bestimmung der Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen auftretenden Reihen

$$\sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \tag{61}$$

so besitzen die durch die entsprechenden Reihen (60) definirten Funktionen ebenfalls alle soeben genannten Eigenschaften. Aus der Abhandlung des

Herrn HURWITZ: *Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen etc.* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 27, S. 86) geht nämlich hervor, dass die Reihen (61) im wesentlichen linear durch Reihen der Form $\zeta(s, w)$ darstellbar sind und somit die für die Gültigkeit des obigen Satzes erforderlichen Eigenschaften besitzen. Die Reihen (61) machen einen Theil von denjenigen aus, welche DIRICHLET in der Arbeit über die arithmetische Progression gebraucht hat und Herr LIPSCHITZ in seiner Arbeit *Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen* (Crelles Journal, Bd. 105) einer eingehenden Erörterung unterworfen hat. Identificirt man die S_ν mit diesen allgemeineren Reihen, so erfährt auch die Klasse der Reihen (60), welche die Transformationsformel (58) auf die S_ν zurückführt, eine entsprechende Erweiterung.[1]

[1] Der in § 1 charakterisirten, bisher wenig beachteten Klasse (I) von bestimmten Integralen habe ich schon früher grössere oder kleinere Theile der folgenden Arbeiten gewidmet: *Om definita integraler, hvilka hafva till gränser hypergeometriska funktioner af särskilda ordningar,* 1893. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. 20. — *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen.* Acta Fenn. T. 21. — *Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale.* Acta Fenn. T. 22. — *Über eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Function $\zeta(s)$.* Acta Fenn. T. 24. — *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht.* Acta Fenn. T. 29 und Acta Math. Bd. 25. — *Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen.* Acta Math. Bd. 25.

In diesen Arbeiten habe ich es nicht unterlassen, auf die neue und einfache, zugleich aber recht allgemeine Methode zur Herleitung von asymptotischen Formeln aufmerksam zu machen, welche aus der Anwendung des Residuenkalküls auf die betreffenden Integrale hervorgeht. (Cf. § 2 und § 3 der vorliegenden Arbeit.) Herr E. W. BARNES hat nun neuerdings, nachdem er im Jahre 1899 auf ein briefliches Ersuchen nebst anderen meiner Arbeiten auch diejenigen *Über eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Function $\zeta(s)$* erhalten hatte, in seinen Arbeiten *The Theory of the Gamma Function* (Messenger of Math. Bd. 29) und *The Theory of the Double Gamma Function* (Phil. Trans. Bd. 196) dieselbe Methode zur Herleitung der STIRLING'schen und einer analogen Formel angewandt, ohne dabei die Beziehung dieser Herleitungen zu meiner Arbeit deutlich anzugeben. Dies veranlässt mich hervorzuheben, dass die STIRLING'sche Formel in meiner genannten Arbeit zum ersten Male nach der betreffenden neuen Methode her-

geleitet worden ist, und dass ich daselbst (§ 12) ausdrücklich angegeben habe, dass dieselbe Methode auch in anderen Fällen anwendbar ist, um für unendliche Produkte von endlichem Geschlecht der STIRLING'schen analoge Formeln zu erhalten. Die allgemeine Formel (12) in § 3 der vorliegenden Arbeit, von welcher alle diese Formeln erhalten werden können, kommt bisher nur in meinen Arbeiten vor.

DAS ABEL'SCHE THEOREM UND DAS LIE'SCHE THEOREM ÜBER TRANSLATIONSFLÄCHEN

VON

GEORG SCHEFFERS
in DARMSTADT.

Bei der hundertsten Wiederkehr von ABEL's Geburtstag gedenkt man unwillkürlich auch seines Landsmannes SOPHUS LIE. Wenn auch im Ganzen die Forschungen beider auf verschiedenen Gebieten stattfanden, so treffen sie sich doch an einigen Punkten. Eine besondere Genugthuung empfand LIE, als es ihm nach mühevollen Ansätzen gelang, ein rein geometrisches Problem, das der *Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung*, in einen höchst merkwürdigen Zusammenhang mit dem *Abel'schen Theorem* zu bringen.[1]

[1] Die Abhandlungen von SOPHUS LIE, die hier in Betracht kommen, sind folgende:

1) *Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien.* Christ. Forh. 1872, S. 27, Zeile 1—4.

2) *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen.* I. *Über reelle algebraische Minimalflächen.* Archiv for Math. Bd. 2, 1877, S. 157—198.

3) *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen.* I. und II. Math. Annalen Bd. 14 und 15, 1879, S. 331—416 bez. 465—506.

4) *Bestimmung aller in eine algebraische Developpabele eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung* $s = 0$. Archiv for Math. Bd. 4, 1879, S. 334—344.

5) *Weitere Untersuchungen über Minimalflächen.* Archiv for Math. Bd. 4, 1880, S. 477—506.

6) *Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.* Archiv for Math. Bd. 7, 1882, S. 155—176.

7) *Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel.* Comptes Rendus T. 114, 1892, S. 277—280.

8) *Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions.* Comptes Rendus T. 114, 1892, S. 334—337.

Die Art, wie Lie das Problem löste, ist für seine Forschungsweise charakteristisch: Zuerst, von 1869 an, fand er durch Benutzung von Abbildungen eines Raumes auf einen andern Beispiele von solchen Flächen, die mindestens vier Scharen von je einfach unendlich vielen congruenten und gleichgestellten Curven enthalten. Diese Flächen waren im allgemeinen *transcendent*. Er bemerkte aber, dass zu jeder von ihnen eine gewisse ebene *algebraische* Curve in enger Beziehung stand. Es zeigte sich nämlich, dass die Tangenten jener vier Curvenscharen die unendlich ferne Ebene in den Punkten einer Curve *vierter* Ordnung schnitten. Aber den inneren Grund für diese *nachträglich* festgestellte Erscheinung konnte er lange nicht erkennen, weshalb er von 1881 bis 1889 wiederholt gesprächsweise die Aufmerksamkeit anderer Mathematiker darauf hinlenkte. Dabei gab er auch der Vermutung Ausdruck, dass diese Erscheinung mit dem Abel'schen Theorem in Zusammenhang stehen dürfte. Durch sehr umständliche Rechnungen gelang es ihm 1882, *alle* Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung zu bestimmen.[1]

Im Winter 1891 bis 92 fand er dann, dass das Abel'sche Theorem, angewandt auf den Schnitt einer Curve vierter Ordnung mit einer veränderlichen Geraden, bei zweckmässiger Deutung eine ausgedehnte Familie von Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung lieferte. Ja, es zeigte sich, dass sich diese Flächenfamilie in ihrem Umfang mit der von ihm gefundenen deckte. Und so wurde er zu dem letzten Schritt geführt, direct zu beweisen, dass das Abel'sche Theorem *alle* Flächen von der gesuchten Art liefert. Dabei kam es darauf an, die Integrabilitätsbedingungen eines Systems von zwei homogenen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu discutieren. Zunächst ergaben sich drei Bedingungen; vor ihrer directen Aufstellung schreckte er jedoch zurück, da sie nach seiner

9) *Untersuchungen über Translationsflächen.* Leipziger Berichte 1892, S. 447—472, 559—579.

10) *Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem.* Leipziger Berichte 1896, S. 141—198.

11) *Geometrie der Berührungstransformationen.* I. Bd. Dargestellt von Lie und Scheffers, Leipzig 1896, S. 404—411.

12) *Das Abel'sche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten* Leipziger Berichte 1897, S. 181—248.

[1] Siehe die 6. in der vorigen Anmerkung genannte Arbeit.

Meinung »fast unausführbare Rechnungen« erforderte.[1] Es gelang ihm aber in äusserst scharfsinniger Weise durch seine bewährte Methode, nämlich durch das Herbeiziehen begrifflicher geometrischer Überlegungen, diese analytischen Schwierigkeiten zu umgehen und zu erkennen, dass sich alle drei Bedingungen auf eine einzige reducieren, die er, ohne die Rechnungen auszuführen, dennoch vollständig genau aufstellen konnte. Von da bis zum Endergebnis war es nur ein leichter Schritt.

Nachdem Lie das Problem gelöst hat, wird man versuchen dürfen, eine einheitliche Methode bei der Behandlung einzuführen, d. h. den Wechsel zwischen rein analytischen und rein geometrischen Schlüssen zu vermeiden. Man wird wünschen, den analytischen Ansatz, den Lie selbst gegeben hat, auch auf rein analytischem Wege bis zum Schlussergebnis durchzuführen. Es gelingt in der That durch eine leichte Abänderung der analytischen Fassung, jene »fast unausführbaren Rechnungen« einfach zu gestalten; ja es zeigt sich, dass die wichtige Integrabilitätsbedingung in einer viel bequemeren Form hervorgeht, als es die von Lie selbst gefundene ist. Die Lie'sche Formel war so wenig handlich, dass er sich genötigt sah, bei ihrer geometrischen Deutung wieder andersartige Überlegungen heranzuziehen, nämlich die letzten Schlüsse auf Abzählungen zu stützen. Benutzt man dagegen die Integrabilitätsbedingung in jener wirklich überraschend einfachen Gestalt, die der rechnerische Weg liefert, so führt ihre Deutung von selbst, ohne dass man etwas vom Endergebnis zu wissen braucht, zur Curve vierter Ordnung und damit zum Abel'schen Theorem.[2]

Ich glaube daher, diesem Berichte über den Zusammenhang zwischen dem Abel'schen Theorem und dem Lie'schen Translationsflächen-Theorem einen selbständigen Wert geben zu können, indem ich, *ausgehend von dem Lie'schen Ansatze*, aber auf anderem, nämlich rein analytischem Wege, das Problem der Translationsflächen bis zu dem Lie'schen Ergebnis verfolge.

Nachher wurde ich daran einige Bemerkungen über die geometrischen Deutungen des Ergebnisses und über die Verallgemeinerungen anschliessen.

---

[1] Siehe die 10. in der ersten Anmerkung genannte Arbeit, S. 190. In dieser Arbeit berichtet Lie selbst ausführlich über die Geschichte seines Problems.

[2] Vgl. im Folgenden § 6 und § 8.

§ 1. *Allgemeines über Translationsflächen.*

Ehe wir an das Problem herangehen, ist der Begriff der Translationsfläche zu erörtern.[1]

Wird eine starr gedachte Curve, etwa die durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = A_1(u_1), \qquad y = B_1(u_1), \qquad z = C_1(u_1)$$

mit dem Parameter u_1 dargestellte, ohne Änderung ihrer Stellung im Raume, also mittels Schiebungen oder Translationen stetig in neue Lagen übergeführt, so erzeugt sie eine *Schiebungs- oder Translationsfläche*. Die Fläche enthält daher unendlich viele congruente und gleichgestellte Curven; durch jeden Punkt der Fläche geht eine von ihnen.

Da alle Punkte der Curve (1) bei diesen stetigen Schiebungen beständig congruente und gleichgestellte Bahnen durchlaufen, so enthält die Fläche noch eine zweite Schar von congruenten und gleichgestellten Curven. Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Curve der ersten und eine Curve der zweiten Schar.

Demnach gestattet die Translationsfläche noch eine zweite Erzeugung: Durch stetige Schiebungen kann man eine Curve der zweiten Art über die Fläche hinwegführen.

Jede Translationsfläche gestattet demnach zwei Arten der Erzeugung durch stetige Translationen von Curven.

Zum Überfluss zeigt dies ihre analytische Darstellung: Wollen wir den Punkten (x, y, z) der Curve (1) stetige Schiebungen erteilen, so haben wir zu ihren Coordinaten Functionen einer Veränderlichen u_2 zu addieren, etwa die Functionen $A_2(u_2)$, $B_2(u_2)$, $C_2(u_2)$, sodass die Curve (1) die Translationsfläche erzeugt:

$$(2) \quad x = A_1(u_1) + A_2(u_2), \qquad y = B_1(u_1) + B_2(u_2), \qquad z = C_1(u_1) + C_2(u_2).$$

Auf dieser Fläche sind u_1 und u_2 Gaussische Parameter; sowohl die Pa-

[1] Wir reproducieren hier Betrachtungen aus LIE's 10. Abhandlung, S. 162—164.

rametercurven $u_1 =$ Const. als auch die Parametercurven $u_2 =$ Const. sind einander congruent und gleichgestellt.

Die Tangenten der durch die Punkte *einer* Curve $u_1 =$ Const. gehen den ∞^1 Curven $u_2 =$ Const. haben Richtungscosinus proportional der Grössen:

$$A_1'(u_1), \qquad B_1'(u_1), \qquad C_1'(u_1),$$

die von u_2 frei sind, d. h. alle jene ∞^1 Tangenten sind einander parallel und bilden daher einen Cylinder, der die Translationsfläche (2) längs der betrachteten Curve $u_1 =$ Const. umhüllt. Hieraus folgt:

Die beiden Curvenschaaren $u_1 =$ Const. und $u_2 =$ Const. auf der Translationsfläche (2) sind zu einander im Dupin'schen Sinne conjugiert.

Es folgt dies auch daraus, dass die zweiten Ableitungen $x_{u_1 u_2}, y_{u_1 u_2}, y_{u_1 u_2}$ der Functionen (2) gleich Null sind.

Da alle Curven $u_2 =$ Const. einander congruent und gleichgestellt sind, sind die Richtungen der Tangenten einer von ihnen dieselben wie die der Tangenten aller andern. Legen wir z. B durch den Anfangspunkt die Parallelen zu allen Tangenten einer Curve $u_2 =$ Const., so entsteht ein Richtungskegel, dessen Erzeugende auch den Tangenten aller anderen Curven $u_2 =$ Const. parallel sind. Ebenso gehört zu den Curven $u_1 =$ Const. ein gemeinsamer Richtungskegel.

Denken wir uns das Unendlichferne wie in der projectiven Geometrie als eine Ebene, so können wir auch so sagen: Jene beiden Richtungskegel treffen die unendlich ferne Ebene in zwei Curven γ_1 und γ_2. *Alle Tangenten aller Curven $u_2 =$ Const. treffen die unendlich ferne Ebene in den Punkten der einen Curve γ_1 und alle Tangenten aller Curven $u_1 =$ Const. treffen sie in den Punkten der anderen Curve γ_2.*

Analytisch kann man die beiden unendlich fernen Curven so festlegen: Wenn wir diejenige Richtung, auf der x, y, z um dx, dy, dz wachsen, durch die beiden Bestimmungsstücke

$$\xi = \frac{dx}{dz}, \qquad \eta = \frac{dy}{dz} \tag{3}$$

ausdrücken, sodass ihre Cosinus proportional

$$\xi, \eta, 1$$

sind, so können wir zugleich ξ, η als Coordinaten desjenigen Punktes in der unendlich fernen Ebene deuten, in dem alle Geraden von dieser Richtung die unendlich ferne Ebene treffen. Für die Richtungen der Tangenten der Curven $u_2 = \text{Const.}$, bei denen u_1 veränderlich ist, wollen wir ξ und η mit dem Index 1 versehen. Alsdann giebt (2), wenn wir nur u_1 ändern:

$$\xi_1 : \eta_1 : 1 = A_1'(u_1) : B_1'(u_1) : C_1'(u_1).$$

Dies sind zwei Gleichungen, aus denen wir uns u_1 eliminiert denken:

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Dies ist alsdann die zwischen den Richtungen des ersten Richtungskegels bestehende Beziehung oder auch *die Gleichung der unendlich fernen Curve* γ_1. Analog folgt aus:

$$\xi_2 : \eta_2 : 1 = A_2'(u_2) : B_2'(u_2) : C_2'(u_2)$$

durch Elimination von u_2 die *Gleichung*

$$\varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0$$

der unendlich fernen Curve γ_2.

§ 2. *Die partielle Differentialgleichung der Translationsflächen.*[1]

Es seien jetzt umgekehrt irgend zwei Curven γ_1 und γ_2 in der unendlich fernen Ebene gegeben, etwa durch die Gleichungen:

(4) $$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad \varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0.$$

Dann ist es leicht, eine partielle Differentialgleichung aufzustellen, der jede solche Translationsfläche genügen muss, bei der die Tangenten der einen Curvenschar nach γ_1 und die Tangenten der anderen Curvenschar nach γ_2 gehen.

Ist nämlich (x, y, z) ein Punkt einer solchen Translationsfläche, die wir uns analytisch in der Form

$$z = f(x, y)$$

[1] A. a. O., S. 165.

ausgedrückt denken, und bezeichnen wir wie üblich die Ableitungen von z so:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

so ist für jede Fortschreitung $(dx:dy:dz)$ auf der Fläche vom Punkte (x, y, z) aus:

$$pdx + qdy - dz = 0$$

oder, wenn $dx:dz$ und $dy:dz$ wie in (3) mit ξ und η bezeichnet werden:

$$p\xi + q\eta = 1. \tag{5}$$

Dass die Gleichung *linear* in ξ und η ist, entspricht dem Umstande, dass die Tangentenebene des Flächenpunktes (x, y, z) die unendlich ferne Ebene in einer *Geraden* schneidet.

Nun soll durch den Punkt (x, y, z) der Fläche eine Curve $u_2 =$ Const. und eine Curve $u_1 =$ Const. gehen, und es ist vorgeschrieben, dass die Tangenten dieser beiden Curven nach den durch (4) gegebenen unendlich fernen Curven γ_1 und γ_2 laufen. Mithin werden die Bestimmungsstücke ξ_1, η_1 der Tangente der einen Curve durch die beiden Gleichungen

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad p\xi_1 + q\eta_1 = 1 \tag{6}$$

und die Bestimmungsstücke ξ_2, η_2 der Tangente der andern Curve durch die beiden Gleichungen:

$$\varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0, \qquad p\xi_2 + q\eta_2 = 1 \tag{7}$$

gegeben. Beide Richtungen aber sollen nach dem Früheren zu einander conjugiert sein. Da x und y längs der einen nach (3) um solche Grössen wachsen, die ξ_1, η_1 proportional sind, und längs der anderen um solche, die ξ_2, η_2 proportional sind, so drückt sich das Conjugiertsein nach bekannter Regel so aus:

$$\xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0. \tag{8}$$

Setzen wir hierin die aus (6) und (7) folgenden Werte von ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2, die Functionen von p und q sind, ein, so geht *eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* hervor, die die Form hat:

$$\Phi(p, q)r + X(p, q)s + \Psi(p, q)t = 0,$$

und ihr müssen die zu den gegebenen unendlich fernen Curven oder Richtungskegeln (4) gehörigen Translationsflächen

$$z = f(x, y)$$

genügen.

Es ist sofort klar, dass die partielle Differentialgleichung auch von denjenigen ∞^4 Flächen erfüllt wird, die aus einer ihr genügenden Fläche durch alle ∞^3 Schiebungen oder durch ähnliche Vergrössung hervorgehen, da sich dabei p, q, $r : s : t$ nicht ändern. Aus einer Translationsfläche gehen auf diese Weise offenbar immer wieder Translationsflächen hervor. Die Differentialgleichung hat also, sobald sie eine Translationsfläche als Lösung zulässt, sicher unendlich viele Lösungen, die Translationsflächen vorstellen. Es ist leicht einzusehen, dass jede Lösung der Differentialgleichung eine Translationsfläche ist, sobald sie nicht abwickelbar ist. Doch brauchen wir hierauf an dieser Stelle nicht näher einzugehen.

§ 3. *Das Problem und sein Ansatz.*

Das Lie'sche Problem ist nun dies:

Es sollen alle diejenigen Translationsflächen bestimmt werden, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufzufassen sind. Da jede Translationsfläche an sich schon, wie wir sahen, zwei Erzeugungen durch stetige Schiebungen zulässt, so ist dies natürlich so gemeint:

Wir fragen nach denjenigen Flächen, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthalten, sodass durch jeden Punkt der Fläche je eine Curve c_1, c_2, c_3, c_4 von jeder Schar geht, indem dann die Fläche vier Erzeugungen zulässt, einmal durch Verschieben von c_1 längs c_2 (wobei ein bestimmter Punkt von c_1 längs c_2 hinläuft), dann durch Verschieben von c_2 längs c_1, drittens durch Verschieben von c_3 längs c_4 und viertens durch Verschieben von c_4 längs c_3.

Zu dem Curvenpaar c_1, c_2 gehören als Örter der Schnittpunkte ihrer Tangenten mit der unendlich fernen Ebene zwei Curven γ_1, γ_2. Ebenso gehören zu dem Curvenpaar c_3, c_4 zwei Curven γ_3, γ_4. Dabei seien ξ_3, η_3 die auf die Tangenten von c_3 und ξ_4, η_4 die auf die Tangenten von c_4 bezüglichen Bestimmungsstücke (3) der Richtungen.

Zu γ_3 und γ_4 könnten wir, wenn wir ihre Gleichungen analog (4) gegeben hätten, ebenfalls die partielle Differentialgleichung analog (8) aufstellen. Die gesuchten Translationsflächen müssten beiden partiellen Differentialgleichungen genügen. Demnach stellen wir uns zunächst das analytische Problem:

Man soll vier Gleichungen:

$$(9) \qquad \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \quad \varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0, \quad \varphi_3(\xi_3, \eta_3) = 0, \quad \varphi_4(\xi_4, \eta_4) = 0$$

so bestimmen, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen für z:

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0, \\ \xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0, \end{cases}$$

in denen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \xi_4, \eta_4$ *die durch* (9) *und durch*

$$(11) \qquad p\xi_1 + q\eta_1 = 1, \quad p\xi_2 + q\eta_2 = 1, \quad p\xi_3 + q\eta_3 = 1, \quad p\xi_4 + q\eta_4 = 1$$

bestimmten Functionen der ersten Ableitungen p, q *bedeuten, wenigstens eine gemeinsame Integralfläche*

$$z = f(x, y)$$

haben.[1]

Wir werden nun die beiden Differentialgleichungen (10) ein wenig umformen, indem wir

$$(12) \qquad \frac{\eta_1}{\xi_1} = \tau_1, \quad \frac{\eta_2}{\xi_2} = \tau_2, \quad \frac{\eta_3}{\xi_3} = \tau_3, \quad \frac{\eta_4}{\xi_4} = \tau_4$$

[1] So hat LIE selbst das Problem formuliert, siehe a. a. O., S. 167. Von hier ab verlassen wir den von LIE eingeschlagenen Weg, indem wir zunächst den Ansatz ein wenig abändern und darauf im nächsten Paragraphen an die analytische Lösung gehen.

einführen, wodurch sie die Formen annehmen:

$$r + (\tau_1 + \tau_2)s + \tau_1\tau_2 t = 0,$$
$$r + (\tau_3 + \tau_4)s + \tau_3\tau_4 t = 0.$$

Die aus (12) folgenden Werte von $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ setzen wir in (9) und (11) ein. Die Gleichungen (9) gehen dann in Gleichungen zwischen den ξ_i und τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) über, sodass folgendes Problem vorliegt:

Man soll vier Gleichungen:

$$(13) \qquad \psi_1(\xi_1, \tau_1) = 0, \quad \psi_2(\xi_2, \tau_2) = 0, \quad \psi_3(\xi_3, \tau_3) = 0, \quad \psi_4(\xi_4, \tau_4) = 0$$

so bestimmen, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen für z:

$$(14) \qquad \begin{cases} r + (\tau_1 + \tau_2)s + \tau_1\tau_2 t = 0, \\ r + (\tau_3 + \tau_4)s + \tau_3\tau_4 t = 0, \end{cases}$$

in denen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ die durch (13) und durch:

$$(15) \qquad p\xi_1 + q\xi_1\tau_1 = 1, \quad p\xi_2 + q\xi_2\tau_2 = 1, \quad p\xi_3 + q\xi_3\tau_3 = 1, \quad p\xi_4 + q\xi_4\tau_4 = 1$$

bestimmten Functionen der ersten Ableitungen p, q bedeuten, wenigstens eine gemeinsame Integralfläche

$$z = f(x, y)$$

haben.

Von den abwickelbaren Flächen wollen wir dabei absehen. Denn es ist nicht schwer einzusehen, dass eine abwickelbare Fläche nur dann Translationsfläche ist, wenn sie eine Cylinder ist. Ein Cylinder aber kann auf unendlich viele Weisen durch Schiebung einen Curve erzeugt werden; man wähle nämlich irgend eine Curve auf dem Cylinder aus.

Ist nun aber die fragliche gemeinsame Integralfläche

$$z = f(x, y)$$

nicht abwickelbar, so sind bekanntlich

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

von einander unabhängige Functionen von x und y. *Daher können wir auf der Fläche p und q statt x und y als unabhängige Veränderliche benutzen.*

§ 4. *Die Integrabilitätsbedingung.*

Nach (14) muss auf der fraglichen Fläche:

$$(16)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{(\tau_1 + \tau_2)\tau_3\tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} \cdot s, \\[2ex] t = -\dfrac{\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} \cdot s \end{cases}$$

sein. Auch müssen r, s, t die Bedingungen erfüllen:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x},$$

die wir, wenn wir p und q als Veränderliche statt x, y benutzen wollen, so schreiben werden:

$$\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}$$

oder, da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = t$$

ist, so

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial p}s + \dfrac{\partial r}{\partial q}t = \dfrac{\partial s}{\partial p}r + \dfrac{\partial s}{\partial q}s, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial p}s + \dfrac{\partial s}{\partial q}t = \dfrac{\partial t}{\partial p}r + \dfrac{\partial t}{\partial q}s. \end{cases}$$

Hierin wollen wir die Werte (16) von r und t einführen. Es empfiehlt sich, dabei zur Abkürzung die in (16) rechts auftretenden Factoren von s mit U und V zu bezeichnen:

$$(18)\qquad \frac{(\tau_1 + \tau_2)\tau_3\tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} = U, \qquad -\frac{\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} = V,$$

sodass nach (16):

$$r = Us, \qquad t = Vs$$

ist. Setzen wir diese Werte in (17) für r und t ein, so kommt:

$$\frac{\partial \log s}{\partial p} = \frac{V_q + UV_p}{1 - UV}, \qquad \frac{\partial \log s}{\partial q} = \frac{U_p + VU_q}{1 - UV}.$$

Eine Function s von p und q giebt es hiernach nur dann, wenn:

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{V_q + UV_p}{1 - UV} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{U_p + VU_q}{1 - UV} \tag{19}$$

ist.

Mithin ist (19) eine *notwendige* Bedingung; wir werden später sehen, dass sie auch hinreicht.[1]

§ 5. *Ausrechnung der Bedingung.*

Zur Ausrechnung der Bedingung bedürfen wir vorerst der Ableitungen von U und V nach p und q. Nach (18) sind U und V Functionen der τ; und diese sind nach (13) und (15) Functionen von p und q. Nach (13) sind z. B. ξ_1 und τ_1 von einander abhängig, und nach (15) ist:

$$(p + q\tau_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial p} + q\xi_1\frac{\partial \tau_1}{\partial p} = -\xi_1,$$

$$(p + q\tau_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial q} + q\xi_1\frac{\partial \tau_1}{\partial q} = -\xi_1\tau_1.$$

Multipliciren wir diese beiden Gleichungen mit

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial q} \quad \text{bez.} \quad -\frac{\partial \tau_1}{\partial p}$$

und addiren wir sie dann, so kommt mit Rücksicht auf die Abhängigkeit von ξ_1 und τ_1:

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial q} - \tau_1\frac{\partial \tau_1}{\partial p} = 0.$$

[1] Lie stellt drei Integrationsbedingungen auf, die höhere Differentialquotienten nach p und q, nämlich vierte, enthalten, während unsere Bedingung (19) nur erste und zweite enthält. Lie beweist, dass seine drei Bedingungen auf eine zurückkommen. Diesen Nachweis brauchen wir garnicht zu führen. Unsere Bedingung wird, wie wir sehen werden, gerade jene eine Lie'sche liefern.

So ist überhaupt allgemein:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \tau_i \frac{\partial \tau_i}{\partial p}. \qquad (i=1,2,3,4) \tag{20}$$

Im Folgenden soll zur Abkürzung der Bezeichnung der Accent die Differentiation nach p andeuten, sodass

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial p} = \tau_i' \qquad (i=1,2,3,4)$$

und nach (20):

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \tau_i \tau_i' \qquad (i=1,2,3,4) \tag{21}$$

ist.

Nach der zweiten Gleichung (18) ist nun:

$$\begin{aligned}(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_p = \; & (\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4)\tau_1' + (\tau_1-\tau_3)(\tau_1-\tau_4)\tau_2' \\ & + (\tau_4-\tau_1)(\tau_4-\tau_2)\tau_3' + (\tau_3-\tau_1)(\tau_3-\tau_2)\tau_4'\end{aligned}$$

oder kürzer:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_p = \alpha_1\tau_1' + \alpha_2\tau_2' + \alpha_3\tau_3' + \alpha_4\tau_4', \tag{22}$$

wenn wir nämlich für den Augenblick

$$\left|\begin{aligned}&(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4) = \alpha_1,\\ &(\tau_1-\tau_3)(\tau_1-\tau_4) = \alpha_2,\\ &(\tau_4-\tau_1)(\tau_4-\tau_2) = \alpha_3,\\ &(\tau_3-\tau_1)(\tau_3-\tau_2) = \alpha_4\end{aligned}\right. \tag{23}$$

setzen. Infolge von (21) ergiebt sich aus (22) sofort noch:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_q = \alpha_1\tau_1\tau_1' + \alpha_2\tau_2\tau_2' + \alpha_3\tau_3\tau_3' + \alpha_4\tau_4\tau_4',$$

sodass hieraus und aus (22) folgt:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 (V_q + UV_p) = \sum_1^4 {}_i\, \alpha_i(\tau_i + U)\tau_i'.$$

Aber nach (18) ist

$$\tau_1 + U = \frac{\tau_2\alpha_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4},$$

und ähnliche Werte gehen für $\tau_2 + U$, $\tau_3 + U$, $\tau_4 + U$ hervor, sodass wir schliesslich wegen der Werte (23) erhalten:

$$(24)\quad \left| \begin{aligned} &(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^3(V_q + UV_p) = (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4) \\ &\qquad \times (\tau_2\tau_1' + \tau_1\tau_2' - \tau_4\tau_3' - \tau_3\tau_4'). \end{aligned} \right.$$

Aus (18) folgt ferner

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 U_p = -\alpha_1\tau_3\tau_4\tau_1' - \alpha_2\tau_3\tau_4\tau_2' - \alpha_3\tau_1\tau_2\tau_3' - \alpha_4\tau_1\tau_2\tau_4',$$

und hieraus ziehen wir nach (21) sofort den Schluss:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 U_q = -\alpha_1\tau_1\tau_3\tau_4\tau_1' - \ldots,$$

wo es genügt, das erste der vier Glieder hinzuschreiben. Beide Formeln geben:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2(U_p + VU_q) = -\alpha_1\tau_3\tau_4(1 + \tau_1 V)\tau_1' - \ldots.$$

Weil aber nach (18):

$$1 + \tau_1 V = -\frac{\alpha_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}$$

u. s. w. ist, so folgt hieraus wegen der Werte (23):

$$(25)\quad \left| \begin{aligned} &(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^3(U_p + VU_q) = (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4) \\ &\qquad \times \left[\tau_3\tau_4(\tau_1' + \tau_2') - \tau_1\tau_2(\tau_3' + \tau_4')\right]. \end{aligned} \right.$$

Nach (18) ist ferner:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2(1 - UV) = (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4).$$

Daher giebt (24) und (25):

$$\frac{V_q + UV_p}{1 - UV} = \frac{\tau_2\tau_1' + \tau_1\tau_2' - \tau_4\tau_3' - \tau_3\tau_4'}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4},$$

$$\frac{U_p + VU_q}{1 - UV} = \frac{\tau_3\tau_4(\tau_1' + \tau_2') - \tau_1\tau_2(\tau_3' + \tau_4')}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}.$$

Hiermit sind die in der auszuwertenden Bedingung (19) auftretenden Quotienten berechnet, sodass die Bedingung so geschrieben werden kann:

$$(26)\qquad \frac{\partial}{\partial q}\,\frac{\tau_2\tau_1' + \tau_1\tau_2' - \tau_4\tau_3' - \tau_3\tau_4'}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} = \frac{\partial}{\partial p}\,\frac{\tau_3\tau_4(\tau_1' + \tau_2') - \tau_1\tau_2(\tau_3' + \tau_4')}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}.$$

Um nun die noch erforderlichen partiellen Differentiationen nach q und p auszuführen, haben wir zu bedenken, dass der Accent die Differentiation nach p bedeutet. Aus (21) schliessen wir, dass

$$\frac{\partial \tau_i'}{\partial q} = \frac{\partial^2 \tau_i}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \frac{\partial(\tau_i \tau_i')}{\partial p} = \tau_i'^2 + \tau_i \tau_i''$$

ist. Bei der Ausführung der Differentiationen in (26) haben wir hiernach die folgenden vier Regeln zu beachten:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial p} = \tau_i', \qquad \frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \tau_i \tau_i',$$

$$\frac{\partial \tau_i'}{\partial p} = \tau_i'', \qquad \frac{\partial \tau_i'}{\partial q} = \tau_i'^2 + \tau_i \tau_i''.$$

Wenn wir hiernach die Differentiation nach q bez. p in (26) ausführen, so finden wir *ein überraschend einfaches Ergebnis.* Es zeigt sich nämlich, dass alle Glieder bis auf vier einander gegenseitig fortheben, indem einfach bleibt:

$$(27) \qquad \tau_1'' + \tau_2'' + \tau_3'' + \tau_4'' = 0.$$

Dies also ist die zu discutirende Bedingung.[1]

[1] Bei Lie ergiebt sich a. a. O., S. 193, diese Bedingung:

$$\sum_1^4 {}_i \frac{\dfrac{d^2\eta_i}{d\xi_i^2}}{\left(p + q\dfrac{d\eta_i}{d\xi_i}\right)^3} = 0.$$

Dass dies nichts anderes als die Gleichung (27) oben ist, erkennt man leicht, wenn man die Relationen

$$\tau_i = \frac{\eta_i}{\xi_i}$$

und

$$\xi_i p + \eta_i q = 1, \qquad \xi_i' p + \eta_i' q = -\xi_i, \qquad \xi_i'' p + \eta_i'' q = -2\xi_i'$$

benutzt, insbesondere auch die aus den drei letzten folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & 1 \\ \xi_i' & \eta_i' & -\xi_i \\ \xi_i'' & \eta_i'' & -2\xi_i' \end{vmatrix} = 0.$$

§ 6. *Die Curve vierter Ordnung.*

Wir gehen jetzt an die Deutung dieser Bedingung (27). Da die Accente die Differentiation nach p andeuten, so sagt sie aus, *dass die Summe der τ_i linear in p ist:*

$$(28) \qquad \sum \tau_i = \alpha p + \beta,$$

wo α und β Functionen von q sind. Aber hieraus können wir noch mehr schliessen. Differenzieren wir nämlich diese Formel nach q, so folgt wegen (21):

$$\sum \tau_i \tau_i' = \frac{d\alpha}{dq} p + \frac{d\beta}{dq}.$$

Weil aber der Strich die Differentiation nach p andeutet, so ist die linke Seite der halbe Differentialquotient von $\sum \tau_i^2$ nach p. Also folgt hieraus, *dass die Summe der τ_i^2 quadratisch in p ist.* Wenden wir auf sie nochmals dasselbe Verfahren an, so ergiebt sich mit Hülfe von (21), *dass die Summe der τ_i^3 vom dritten Grade in p ist.* Ebenso ist *die Summe der τ_i^4 vom vierten Grade in p.* Dabei sind die Coefficienten Functionen von q.

Nun erfüllen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ die biquadratische Gleichung für τ:

$$(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4) = 0.$$

Ordnen wir sie nach Potenzen von τ:

$$\tau^4 - a_1 \tau^3 + a_2 \tau^2 - a_3 \tau + a_4 = 0,$$

so sind die Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 symmetrische Functionen von $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. Bekanntlich lassen sich die Summen der Potenzen von τ_i durch sie wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\sum \tau_i &= a_1, \\
\sum \tau_i^2 &= a_1^2 - 2a_2, \\
\sum \tau_i^3 &= a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3, \\
\sum \tau_i^4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4.
\end{aligned}$$

Da nun, wie wir sahen, die linken Seiten vom 1., 2., 3. bez. 4. Grade in p sind, so lehrt die erste Gleichung, dass a_1 linear in p ist, die zweite alsdann, dass a_2 vom 2. Grade, die dritte, dass a_3 vom 3. Grade und die vierte, dass a_4 vom vierten Grade in p ist.

Also erfüllen τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 eine biquadratische Gleichung:

$$\tau^4 - a_1\tau^3 + a_2\tau^2 - a_3\tau + a_4 = 0,$$

in der a_1, a_2, a_3, a_4 ganze Functionen von p sind, deren Grade durch die Indices angegeben werden. Die Coefficienten dieser Functionen sind Functionen von q.

Nun war allgemein, vgl. (12), das Zeichen τ für $\eta:\xi$ gebraucht worden. Jedes Wertepaar ξ_i, η_i erfüllt also die Gleichung in ξ und η:

$$\eta^4 - a_1\eta^3\xi + a_2\eta^2\xi^2 - a_3\eta\xi^3 + a_4\xi^4 = 0.$$

Ferner ist nach (11):

$$p = \frac{1 - q\eta_i}{\xi_i}.$$

Setzen wir aber in den Functionen a_1, a_2, a_3, a_4 für p den Wert

$$\frac{1 - q\eta}{\xi}$$

ein, so heben sich die Nenner ξ fort, da a_1 mit ξ, a_2 mit ξ^2, a_3 mit ξ^3 und a_4 mit ξ^4 behaftet ist. Also geht alsdann eine Gleichung vierten Grades zwischen ξ und η hervor, deren Coefficienten nur noch von q abhängen.

Alle vier Wertepaare ξ_i, η_i erfüllen somit eine in ξ und η biquadratische Gleichung, deren Coefficienten nur noch von q abhängen.

Da diese Gleichung von dem Wertepaare ξ_1, η_1 z. B. erfüllt wird, andererseits aber nach (9) und (11) die Grössen ξ_1, η_1 zwei Gleichungen:

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad p\xi_1 + q\eta_1 = 1$$

erfüllen sollen, so muss jene Gleichung, gebildet für ξ_1, η_1, eine Folge von diesen beiden sein. Weil sie aber von p frei ist, kann sie nur eine Folge der ersten, $\varphi_1 = 0$, allein sein, d. h. sie ist auch von q frei.

Somit hat sich ergeben:

Alle vier Wertepaare ξ_i, η_i erfüllen eine in ξ und η biquadratische Gleichung mit constanten Coefficienten.

Anders ausgesprochen:

Alle vier unendlich fernen Curven γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 gehören ein und derselben Curve vierter Ordnung an.[1]

Wenn es also Translationsflächen giebt, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthalten, *so müssen die Tangenten aller vier Scharen die unendlich ferne Ebene in ein und derselben Curve vierter Ordnung schneiden.*

§ 7. *Anwendung des Abel'schen Theorems.*

Unser Problem kommt hiernach auf folgendes hinaus:

In der unendlich fernen Ebene ist eine Curve vierter Ordnung gegeben. Gefragt wird, ob es eine Fläche giebt, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält, deren Tangenten sämtlich jene Curve vierter Ordnung treffen.

Nun liefert uns das Abel'sche Theorem, angewandt auf die Schnitte jener Curve vierten Ordnung mit einer veränderlichen Geraden, in der That derartige Flächen.[2]

Ist nämlich

$$F(\xi, \eta) = 0$$

eine Gleichung vierten Grades in ξ und η, also F eine ganze Function

[1] Lie schliesst dies aus seiner in der letzten Anmerkung angegebenen Bedingung a. a. O., S. 194—196, so: Nach einem Satze von Reiss ist die Bedingung für die Schnitte einer Curve vierter Ordnung mit einer beweglichen Geraden erfüllt. Andererseits kann man durch Abzählung erkennen, dass die Bedingung nur von ∞^{14} Curven erfüllt sein kann. Es giebt aber gerade ∞^{14} ebene Curven vierter Ordnung; also giebt die Bedingung gerade und nur alle Curven vierter Ordnung.

[2] Dies erkannte Lie 1891—92. Siehe die 7. oben erwähnte Abhandlung.

vierten Grades von ξ und η, so ist, wenn die durch $F = 0$ dargestellte Curve vierter Ordnung durch die veränderliche Gerade

$$p\xi + q\eta = 1$$

in den vier Punkten (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4) geschnitten wird; nach dem Abel'schen Theorem:

$$\int^{\bullet}\frac{\xi_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int^{\bullet}\frac{\xi_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}} + \int^{\bullet}\frac{\xi_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} + \int^{\bullet}\frac{\xi_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}} = 0,$$

$$\int^{\bullet}\frac{\eta_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int^{\bullet}\frac{\eta_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}} + \int^{\bullet}\frac{\eta_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} + \int^{\bullet}\frac{\eta_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}} = 0,$$

$$\int^{\bullet}\frac{d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int^{\bullet}\frac{d\xi_2}{F_{\eta_2}} + \int^{\bullet}\frac{d\xi_3}{F_{\eta_3}} + \int^{\bullet}\frac{d\xi_4}{F_{\eta_4}} = 0,$$

sobald die Grenzen der Integrale die zu zwei Lagen der Geraden gehörigen Schnittpunktscoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sind. Hierbei bedeutet natürlich F_{η_i} die partielle Ableitung vom $F(\xi_i, \eta_i)$ nach η_i. Aus allen Integralen hat man sich die η mittels der Gleichungen

$$F(\xi_i, \eta_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

entfernt zu denken, sodass unter den Integralen nur die Veränderlichen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 vorkommen. Bildet man nun die Gleichungen:

$$(19) \qquad \left|\begin{aligned} x &= \int^{\bullet}\frac{\xi_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int^{\bullet}\frac{\xi_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}}, \\ y &= \int^{\bullet}\frac{\eta_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int^{\bullet}\frac{\eta_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}}, \\ z &= \int^{\bullet}\frac{d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int^{\bullet}\frac{d\xi_2}{F_{\eta_2}}, \end{aligned}\right.$$

so ist nach den obigen Formeln des Abel'schen Theorems auch:

$$(20) \qquad \left|\begin{aligned} x &= -\int^{\bullet}\frac{\xi_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} - \int^{\bullet}\frac{\xi_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}}, \\ y &= -\int^{\bullet}\frac{\eta_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} - \int^{\bullet}\frac{\eta_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}}, \\ z &= -\int^{\bullet}\frac{d\xi_3}{F_{\eta_3}} - \int^{\bullet}\frac{d\xi_4}{F_{\eta_4}}. \end{aligned}\right.$$

Nun stellen aber die Gleichungen (19) eine Fläche mit den Gaussischen Parameter ξ_1, ξ_2 und die Gleichungen (20) also dieselbe Fläche, aber mit den Gaussischen Parameter ξ_3, ξ_4, dar. Da jedesmal jede der Coordinaten eine Summe von zwei Functionen ist, von denen die eine nur den einen Parameter, die andere nur den anderen Parameter enthält, so haben die Gleichungen (19) und (20) die für Translationsflächen charakteristische allgemeine Form (2).

Mithin haben wir eine Fläche erhalten, die sich in *zwei* Arten, (19) und (20), als Translationsfläche darstellen lässt. Beide Darstellungen sind wesentlich von einander verschieden, denn die durch den Punkt (x, y, z) der Fläche gehenden Parameterlinien $\xi_2 = \text{Const.}$ und $\xi_1 = \text{Const.}$ haben dort Tangenten, deren Richtungscosinus proportional

$$\xi_1, \eta_1, 1 \quad \text{bez.} \quad \xi_2, \eta_2, 1$$

sind, während die Parameterlinien $\xi_4 = \text{Const.}$ und $\xi_3 = \text{Const.}$ dort Tangenten haben, deren Richtungscosinus proportional

$$\xi_3, \eta_3, 1 \quad \text{bez.} \quad \xi_4, \eta_4, 1$$

sind. Weil nun für alle Wertepaare ξ_i, η_i die Gleichung

$$p\xi + q\eta = 1$$

besteht, so gehen die vier Tangentenrichtungen in der Tangentenebene des Punktes (x, y, z) nach denjenigen vier unendlich fernen Punkten (ξ_i, η_i) der Curve vierter Ordnung

$$F(\xi, \eta) = 0,$$

in denen sie von der unendlich fernen Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

geschnitten wird, und sind daher für einen allgemein gewählten Punkt (x, y, z) der Fläche von einander verschieden.

In der That also stellen die Gleichungen (19) *oder* (20) *eine Fläche dar, die* **vier** *Scharen von je* ∞^1 *congruenten und gleichgestellten Curven enthält derart, dass in einem allgemein gewählten Punkte der Fläche die Richtungen der vier hindurchgehenden Curven von einander verschieden sind.*

§ 8. *Die allgemeinste Lösung des Problems.*

Hat uns somit das Abel'sche Theorem, angewandt auf den Schnitt der gefundenen unendlich fernen Curve vierter Ordnung mit einer veränderlichen Geraden, *eine* Lösung des gestellten Problems gegeben, so ist es schliesslich auch leicht, unabhängig hiervon die allgemeinste Lösung abzuleiten.[1]

Denn wenn wieder

$$F(\xi, \eta) = 0$$

eine gegebene unendlich ferne Curve vierter Ordnung ist, so handelt es sich darum, eine Translationsfläche zu finden, deren erzeugende Curven solche Tangenten haben, die diese Curve treffen. Da nach (3) längs einer Richtung $(dx:dy:dz)$ die Proportion:

$$dx:dy:dz = \xi:\eta:1$$

besteht, so wird die *allgemeinste* Curve, deren Tangenten nach jener unendlich fernen Curve $F = 0$ hingehen, gegeben durch:

$$x = \int \rho \xi d\xi, \qquad y = \int \rho \eta d\xi, \qquad z = \int \rho d\xi,$$

wo ρ eine zunächst beliebige Function von ξ bedeutet und unter η die durch

$$F(\xi, \eta) = 0$$

bestimmte Function von ξ zu verstehen ist, sodass längs der Curve ξ die Veränderliche ist. Ist nun auf der fraglichen Fläche

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

so müssen die Tangenten der vier durch den Punkt (x, y, z) der Fläche

[1] Lie begnügt sich damit, zu zeigen, dass die Curve vierter Ordnung mittels des Abel'schen Theorems Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung liefert. Aber natürlich muss noch gezeigt werden, dass die Curve vierter Ordnung sonst keine (ausser ähnlich vergrösserten) ergiebt. Diesen übrigens sehr leichten Nachweis deuten wir im gegenwärtigen Paragraphen an.

gehenden Curven der vier Scharen von je ∞^1 congruenten Curven die unendlich ferne Ebene in den vier Schnittpunkten (ξ_i, η_i) der Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

mit der Curve $F = 0$ treffen. Demnach muss die Fläche, wenn ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 zu dem ersten Curvenpaar und ξ_3, η_3 und ξ_4, η_4 zu dem zweiten Curvenpaar gehören, sowohl in der Form:

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \int \rho_1 \xi_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \xi_2 d\xi_2, \\ y = \int \rho_1 \eta_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \eta_2 d\xi_2, \\ z = \int \rho_1 d\xi_1 \quad + \int \rho_2 d\xi_2 \end{cases}$$

als auch in der Form:

$$\begin{aligned} x &= \int \sigma_3 \xi_3 d\xi_3 + \int \sigma_4 \xi_4 d\xi_4, \\ y &= \int \sigma_3 \eta_3 d\xi_3 + \int \sigma_4 \eta_4 d\xi_4, \\ z &= \int \sigma_3 d\xi_3 \quad + \int \sigma_4 d\xi_4 \end{aligned}$$

darstellbar sein, wobei $\rho_1, \rho_1, \sigma_3, \sigma_4$ bezüglich Functionen von $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ bedeuten. Es muss also, wenn wir σ_3, σ_4 mit $-\rho_3, -\rho_4$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} &\int \rho_1 \xi_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \xi_2 d\xi_2 + \int \rho_3 \xi_3 d\xi_3 + \int \rho_4 \xi_4 d\xi_4 = 0, \\ &\int \rho_1 \eta_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \eta_2 d\xi_2 + \int \rho_3 \eta_3 d\xi_3 + \int \rho_4 \eta_4 d\xi_4 = 0, \\ &\int \rho_1 d\xi_1 \quad + \int \rho_2 d\xi_2 \quad + \int \rho_3 d\xi_3 \quad + \int \rho_4 d\xi_4 \quad = 0 \end{aligned}$$

sein, vorausgesetzt, dass die Integrale wieder erstreckt sind zwischen zwei Lagen der Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

in der unendlich fernen Ebene. Indem man die sich durch totale Differentiation ergebenden Formeln:

$$p d\xi_i + q d\eta_i = -\xi_i dp - \eta_i dq \qquad (i=1,2,3,4)$$

und

$$F_{\xi_i} d\xi_i + F_{\eta_i} d\eta_i = 0 \qquad (i=1,2,3,4)$$

benutzt, um hierin und ebenso in den früheren drei Formeln des ABEL'schen Theorems (S. 83) die Differentiale $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ durch dp und dq auszudrücken, ist es leicht, durch Vergleichung zu erkennen, dass $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ proportional

$$\frac{1}{F_{\zeta_1}}, \frac{1}{F_{\zeta_2}}, \frac{1}{F_{\zeta_3}}, \frac{1}{F_{\zeta_4}}$$

sein müssen. Da nun ρ_1 nur von ξ_1, ρ_2 nur von ξ_2 u. s. w. abhängt, so folgt, dass allgemein:

$$\rho_i = \frac{c}{F_{\zeta_i}}$$

ist, wo c eine für alle vier ρ_i gemeinsame *Constante* bedeutet. Setzen wir nun die Werte:

$$\rho_1 = \frac{c}{F_{\zeta_1}}, \qquad \rho_2 = \frac{c}{F_{\zeta_2}}$$

in (21) ein, so finden wir wieder die Werte (19) von x, y, z, aber multipliciert mit einer Constanten c. *Die allgemeinste Fläche also, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält, geht aus der Fläche* (19) *durch ähnliche Vergrössung hervor.*

Natürlich liefert auch jede *Schiebung* der Fläche (19) wieder eine Lösung, aber alle diese Lösungen sind schon in (19) enthalten, da die *unteren* Grenzen der Integrale verschieden gewählt werden können, indem die Anfangslage der Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

willkürlich ist.

§ 9. *Formulierung des Lie'schen Theorems.*

Wir sind zu Ende mit der Lösung des Problems und können das Ergebnis formulieren: [1]

Jede nicht abwickelbare Fläche, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält, sodass die durch einen allgemein gewählten Punkt der Fläche gehenden Curven verschiedene Tangenten haben, ergiebt sich

[1] Siehe die 10. der oben genannten LIE'schen Abhandlungen, S. 197.

so: Man stellt die Gleichung einer beliebigen algebraischen Curve vierter Ordnung in ξ *und* η *auf:*

$$F(\xi, \eta) = 0$$

und bildet die drei Abel'schen Integrale erster Gattung:

$$\varphi(\xi) = \int \frac{\xi d\xi}{F_\eta}, \qquad \chi(\xi) = \int \frac{\eta d\xi}{F_\eta}, \qquad \psi(\xi) = \int \frac{d\xi}{F_\eta}.$$

Sind $\varphi(\xi_i)$, $\chi(\xi_i)$, $\psi(\xi_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *diese Integrale, hinerstreckt zwischen den vier Schnittpunkten einer festen Geraden und den vier Schnittpunkten* (ξ_i, η_i) *einer veränderlichen Geraden*

$$p\xi + q\eta = 1$$

mit der Curve vierter Ordnung $F(\xi, \eta) = 0$, *so sind:*

$$x = c[\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)],$$
$$y = c[\chi(\xi_1) + \chi(\xi_2)],$$
$$z = c[\psi(\xi_1) + \psi(\xi_2)]$$

die Gleichung einer Fläche von der gesuchten Art; sie lässt sich auch so darstellen:

$$x = -c[\varphi(\xi_3) + \varphi(\xi_4)],$$
$$y = -c[\chi(\xi_3) + \chi(\xi_4)].$$
$$z = -c[\psi(\xi_3) + \psi(\xi_4)].$$

Dabei bedeutet c *eine beliebige Constante. So findet man* alle *Flächen von der gewünschten Art.*

§ 10. *Zur Anwendung des Lie'schen Theorems.*

Wir haben, um das Wesentliche der Folgerungen hervortreten zu lassen, einige nebensächliche Punkte mit Stillschweigen übergangen, die Lie ausführlich hervorgehoben hat. Mit einigen Worten seien sie hier erwähnt:

Ist die Curve vierter Ordnung irreducibel, so bilden alle vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven auf der zugehörigen Fläche im Grunde genommen eine einzige irreducible Schar. Sie ist aber so beschaffen, dass durch jeden allgemein gewählten Punkt P der Fläche vier verschiedene Curven c_1, c_2, c_3, c_4 der Schar gehen. Sie sind alle vier einander congruent und gleichgestellt, aber der Punkt P ist natürlich nicht auf den vier Curven überall der homologe Punkt. Wenn man c_1 mit einem ihrer Punkte längs c_2 stetig hinschiebt, geht die Fläche hervor; ebenso umgekehrt, wenn c_2 mit einem ihrer Punkte längs c_1 stetig hingeschoben wird. Ebenso liefern c_3 und c_4 zwei Erzeugungsarten.

Ist die Curve vierter Ordnung reducibel, so darf sie nicht etwa aus zwei zusammenfallenden Curven zweiter Ordnung bestehen, vielmehr muss immer noch eine allgemein gewählte Gerade sie in vier verschiedenen Punkten treffen.

Die Curve vierter Ordnung kann in zwei verschiedene Kegelschnitte zerfallen. *Dies giebt Anlass zu zwei wesentlich verschiedenen Flächenarten.* Man kann nämlich, wenn man die Curve durch eine Gerade schneidet, als Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) entweder Punkte auf demselben Kegelschnitt oder Punkte auf verschiedenen Kegelschnitten wählen. Im ersteren Falle hat die Fläche eine höchst merkwürdige Eigenschaft; LIE hat gezeigt, dass die beiden Kegelschnitte durch irgend ein Paar von Kegelschnitten desjenigen Büschels ersetzt werden dürfen, das von jenen beiden Kegelschnitten bestimmt wird. D. h. alsdann *gestattet die Fläche unendlich viele Erzeugungen durch Translation von Curven.* Wenn insbesondere der eine Kegelschnitt der Kugelkreis ist, so gehen *Minimalflächen* hervor. Unter anderen tritt hier die SCHERK'sche Minimalfläche und die Minimalschraubenfläche auf.[1]

Im Fall des Büschels von Kegelschnitten hat die Fläche mindestens eine Schar von ebenen Erzeugenden, da das Büschel mindestens einen in Geraden zerfallenden Kegelschnitt enthält.

Auch wenn die Curve vierter Ordnung in eine Curve dritter Ordnung und eine Gerade zerfällt, hat die Fläche eine Schar von ∞^1 congruenten gleichgestellten ebenen Curven. Ist die Gerade eine Wendetangente der

---

[1] Unter Leitung des Verfassers hat R. KUMMER (siehe seine Dissertation, Leipzig 1894) Modelle der Translationsflächen mit unendlich vielen Erzeugungen hergestellt, die Eigentum des mathem. Instituts an der Universität Leipzig sind.

Curve dritter Ordnung, so sind diese Curven Parabeln, und nur in diesem Fall treten Parabeln als erzeugende Curven auf.[1]

Die grosse Zahl verschiedenartiger Typen von Translationsflächen, die sich aus dem Lie'schen Theorem ergeben, ist bisher, so viel ich weiss, noch nicht genauer untersucht worden, obgleich ihre Betrachtung wegen des innigen Zusammenhanges mit dem Abel'schen Theorem sowohl in geometrischer als auch in analytischer Hinsicht gewiss sehr lohnend sein würde.

§ 11. *Verallgemeinerungen und andere Beweise des Lie'schen Theorems.*

Dass sich das Theorem über die Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung auf Räume höherer Dimensionenzahl verallgemeinern lässt, hat Lie selbst schon erkannt und zum Teil in seinen Schriften mitgeteilt.[2] So hat er ausführlich gezeigt, dass das Abel'sche Theorem alle dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des Raumes von vier Dimensionen liefert, die in mehrfache Weise als Translationsmannigfaltigkeiten aufgefasst werden können. Auf diese Verallgemeinerungen gedenke ich jedoch nicht einzugehen; meine Absicht war es nur, dem Wunsche zu entsprechen, im gegenwärtigen Aufsatze das Lie'sche Theorem für die Translationsflächen des gewöhnlichen Raumes so abzuleiten, dass auch denjenigen, die den Lie'schen Ideenkreisen ferner stehen oder den von Lie mit so grosser Meisterschaft gehandhabten Wechsel zwischen analytischen und synthetischen Betrachtungen nicht lieben, ein Einblick in den Beweis und das Wesen des Lie'schen Theorems gegeben wird. Schliesslich möchte ich noch erwähnen, dass Poincaré zwei andere Beweise des Lie'schen Theorems geliefert hat, von denen der zweite sozusagen intuitiv und ohne, dass man die Lie'schen partiellen Differentialgleichungen braucht, zum Ziele führt.[3]

[1] Von G. Wiegner (siehe seine Dissertation, Leipzig 1893, auch Archiv for Math. Bd. 14) sind hierzu Modelle hergestellt worden, die sich ebenfalls im Leipziger math. Institut befinden.

[2] Vgl. die 7. und 12. der oben angegebenen Abhandlungen.

[3] *Remarques diverses sur les fonctions abéliennes*, Journal de Math. pures et appl. 5. série, t. 1 (1895), S. 219—314, und: *Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes*, Bulletin de la Société math. t. 29 (1901). S. 61—86.

Er beruht wesentlich auf Continuitätsbetrachtungen und ist von Poincaré selbst auf höhere Dimensionenzahlen ausgedehnt worden. Lie's eigener Weg darf gewiss nicht als intuitiv bezeichnet werden, was aus den Bemerkungen in der Einleitung und in den Anmerkungen, in denen ich den oben eingeschlagenen Weg mit dem Lie'schen verglichen habe, wohl zur Genüge erhellt. Man darf aber nicht vergessen, dass es etwas ganz anderes ist, ob man ein neues Theorem zum ersten Mal entdeckt und beweist oder ob man nachträglich einen anderen Zugang zu ihm sucht. Wer den von Lie selbst gegebenen Beweis in den Leipziger Berichten von 1896 verfolgt, wird vielmehr dem Scharfsinn, mit dem er in langen Jahren das neue Theorem allmählich auffand und bewies, die grösste Bewunderung zollen und sich freuen, dass seine eigenartige Methode der Wissenschaft diesen höchst merkwürdigen Zusammenhang zwischen seinem rein geometrischen Problem und dem Theorem von Abel geschenkt hat.

Darmstadt, 8. Febr. 1902.

SUR L'EMPLOI D'UN THÉORÈME D'ABEL DANS LA THÉORIE DE L'INTÉGRALE DE DIRICHLET

PAR

T. BRODÉN

À LUND.

1. Le théorème III du mémoire d'ABEL sur la série du binôme[1] permet des applications importantes à la théorie de l'intégrale de DIRICHLET. Dans les lignes suivantes, l'auteur se propose d'examiner de plus près ce fait, tout en se rapportant à un de ses travaux antérieurs.[2] Nous avons voulu ainsi contribuer un peu à éclaircir l'applicabilité très étendue des travaux mathématiques d'ABEL.

2. La question de l'admissibilité de l'équation de DIRICHLET

$$\lim_{\omega=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\omega x}{\sin x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(+0)\qquad (0<a<\pi)$$

(où $f(x)$ signifie une fonction finie intégrable avec valeur déterminée de $f(+0)$) se laisse réduire à la même question pour la relation

$$\lim_{\omega=\infty} I=\lim_{\omega=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\omega\pi x}{x}\,dx\qquad (0<a<1)\tag{1}$$

où $f(+0)=0$.[3]

[1] Journal de Crelle, t. I, p. 314; Oeuvres complètes de N. H. ABEL, édition SYLOW-LIE, t. I, p. 222.

[2] *Über das Dirichlet'sche Integral,* Math. Annalen, t. 52, p. 177—227. Dans le suivant ce travail sera désigné par *D. I.*

[3] Voir *D. I.*, p. 178, 220—21.

Soit $\alpha(\omega)$ une fonction positive de ω pour laquelle $\lim_{\omega=\infty} \alpha(\omega) = 0$. Alors l'intégrale

$$I_a = \int_0^{\alpha(\omega)} f(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx$$

tend vers la limite zéro, non seulement dans le cas où

$$\lim \omega \cdot \alpha = 0 \tag{2}$$

mais encore aussitôt que

$$\lim g(\alpha) \cdot \log(\omega\alpha) = 0, \tag{3}$$

où $g(\alpha)$ signifie la limite supérieure de $|f(x)|$ dans l'intervalle $0 \ldots \alpha$ (et, par conséquent, si $\lim g \cdot \omega \cdot \alpha$ disparaît sans que cela arrive pour $\lim \omega \cdot \alpha$); et la fonction $\alpha(\omega)$ se laisse toujours déterminer de manière à remplir la condition (3) quoique $\lim \omega \cdot \alpha = \infty$.[1] Cela posé, nous choisissons une fonction α quelconque qui remplisse la condition (2) ou (3) et une quantité constante arbitraire ε entre 0 et 1, et puis nous considérons la valeur limite

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^{\frac{1}{\omega}} dx \cdot \left| \sum_{i=k}^{m-1} \left\{ \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i} - \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1} \right\} \right|, \tag{4}$$

où les nombres entiers k et m sont déterminés de la manière suivante:

$$\alpha(\omega) < \frac{2k}{\omega} \leqq \alpha(\omega) + \frac{2}{\omega}, \qquad \frac{2m}{\omega} < \varepsilon \leqq \frac{2m+2}{\omega},$$

et où l'on ne fait entrer en ligne de compte que les ω pour lesquels $m - 1$ sera $> k$, ce qui doit arriver toujours pour des ω suffisamment grands, à cause de la supposition $\lim \alpha = 0$. Alors il se laisse prouver d'abord que (4) sera indépendante du choix de la fonction α et de la quantité ε, et puis que $\lim I$ disparaîtra, si $f(x)$ est de nature à faire disparaître (4).[2]

---

[1] *D. I.* p. 179—80. — Une troisième condition suffisante, un peu plus compliquée, pour que $\lim I_a$ disparaisse se trouve mentionnée *D. I.* p. 183.

[2] *D. I.* p. 188.

Cette condition très étendue pour la validité de (1) — elle contient, en effet, comme cas spéciaux toutes ou presque toutes les conditions posées jusqu'ici [1] — peut en premier lieu se spécialiser dans le sens que la valeur numérique de la somme

$$(5)\qquad \sum_{i=k}^{m-1}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i}-\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1}\right\}$$

pour une fonction $\alpha(\omega)$ de l'espèce mentionnée ci-dessus et sous la condition $0 < x < 1$ se rapproche uniformément, quand croît ω, de la valeur zéro,[2] ce qui a lieu dans ce cas indépendamment de ε.

Nous supposons maintenant que pour une certaine fonction $\alpha(\omega)$ [remplissant la condition (2) ou (3)] et une certaine valeur ε

$$(6)\qquad -G < \sum_{i=2k}^{p}(-1)^i f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{i}{\omega}\right) < G$$

(avec $0 < x < 1$, mais entre ces limites indépendamment de x) aussitôt que

$$2k \leq p \leq 2m-1,$$

où G signifie une certaine quantité positive finie. Je dis que, dans ce cas, $\lim I = 0$.

Si l'on applique le théorème d'Abel mentionné ci-dessus aux sommes $\sum$ figurant dans les inégalités (6), on reconnaît immédiatement que la valeur numérique de la somme (5) est moindre que

$$\frac{G}{x+2k}.$$

Donc, si nous supposons d'abord que $\lim \omega\,.\,\alpha = \infty$, et, par conséquent, $\lim k = \infty$, un rapprochement uniforme de la somme (5) vers la valeur zéro a lieu, et, selon ce que nous venons de constater, $\lim I = 0$. Si, au contraire, $\lim \omega\,.\,\alpha$ est fini (≥ 0), nous prenons une fonction $\alpha_1(\omega)$ pour laquelle $\lim \omega\,.\,\alpha_1 = \infty$ (ce qui est possible, voir ci-dessus). Pour les ω

[1] Cfr. *D. I.* p. 185—86, 191—92.

[2] ou, plus généralement, d'une fonction $\theta(x)$ de la nature caractérisée en *D. I.* p. 192—93 (»Satz 4» et »Satz 5»).

suffisamment grands sera alors $\alpha_1(\omega) > \alpha(\omega)$, et $k_1 > k$, où k_1 a la même relation à α_1, que k à α. On a donc

$$\sum_{i=2k_1}^{p} F_i = \sum_{i=2k}^{p} F_i - \sum_{i=2k}^{2k_1-1} F_i,$$

où, pour le moment, F_i signifie l'expression sous le signe Σ dans (6); partant, en tout cas,

$$-2G < \sum_{i=2k_1}^{p} F_i < 2G.$$

Comme $\lim \omega \cdot \alpha_1 = \infty$, il s'ensuit maintenant, tout comme ci-dessus, que $\lim I = 0$. — On doit remarquer que la condition ainsi obtenue, pour que $\lim I = 0$, n'est pas indépendante ni de α ni de ε: si $\alpha_1(\omega) < \alpha_2(\omega)$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ elle peut être remplie pour $\alpha = \alpha_2$, mais non pour $\alpha = \alpha_1$, et pour $\varepsilon = \varepsilon_1$, non pour $\varepsilon = \varepsilon_2$.

De cette proposition on obtient très aisément comme cas spécial la condition de Dirichlet bien connue.[1]

De l'autre côté on peut donner à la proposition démontrée une intéressante interprétation géometrique.[2]

3. Dans le domaine dont il est question, le théorème d'Abel est important aussi sous un autre point de vue. Une conséquence de ce théorème est, comme on sait, le théorème du calcul intégral indiqué par Weierstrass et publié par Du Bois-Reymond (Journal de Crelle t. 69, p. 78; voir aussi Dini, Fondamenti etc. § 204) que l'on désigne souvent par »zweiter Mittelwerthsatz». Et à l'aide de ce théorème, on obtient aisément, si la fonction $f(x)$ est donnée sous la forme d'un produit,

$$f(x) = F(x) \cdot \varphi(x),$$

certaines conditions pour la validité de l'équation de Dirichlet relatives aux deux facteurs F et φ. A cet égard nous renvoyons le lecteur à *D. I.* p. 216—18 et au livre de M. Dini, Serie di Fourier etc. (Pisa 1880).

---

[1] Voir *D. I.* p. 196.

[2] *D. I.* p. 218—20. — Toute cette suite d'idées se trouve d'ailleurs dans certains rapports à l'article de Kronecker *Über das Dirichlet'sche Integral* (»Sitzungsberichte» de l'académie de Berlin 1885); voir *D. I.* p. 181, 191 etc.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

P. BOUTROUX

à PARIS.

Introduction.

L'éude directe des développement en série, à laquelle ABEL a su donner une si brillante impulsion, et qu'il a appelée »la partie la plus essentielle des mathématiques», a occupé, dans les travaux de ses successeurs, une place prépondérante Le moment est venu maintenant de considérer en eux-mêmes et d'analyser avec quelques détails les types généraux de fonctions dont la science a été ainsi enrichie. Or il faut bien reconnaître que les propriétés d'une fonction n'apparaissent que rarement sur un développement infini. C'est pourquoi il sera souvent avantageux de substituer à l'étude d'un développement celle de caractères moins précis mais plus intuitifs, aptes à servir de marque aux fonctions d'une classe déterminée, en permettant de les distinguer des fonctions voisines et de les reconnaître lorsqu'elles sont définies par une équation différentielle ou de toute autre manière.

Le mode de croissance, objet des beaux travaux de MM. HADAMARD et BOREL, paraît être, pour les fonctions entières, un tel caractère. Toutefois, si l'on veut que la connaissance de ce mode de croissance puisse, dans une étude ultérieure, tenir lieu de celle de la fonction, il est nécessaire de le déterminer avec plus de précision qu'on ne l'a fait encore. C'est la tâche que je me suis proposée dans ce mémoire.

MM. HADAMARD et BOREL ont montré [1] que le module d'une fonction entière dépend étroitement de celui du $n^{\text{ième}}$ zéro. Toutefois l'on avait

[1] Des généralisations des théorèmes de MM. HADAMARD et BOREL viennent d'être tout récemment indiquées par M. E. LINDELÖF qui a établi des propositions voisines de celles qui sont exposées dans la première partie de ce travail. M. LINDELÖF a également obtenu, de son côté, un exemple de fonction de genre zéro se trouvant la somme de deux fonctions de genre *un*. (Voir page 141.)

lieu de craindre que ce rapprochement ne pût être poussé très loin et qu'il fallût pour arriver à un résultat un peu précis tenir compte des arguments des zéros. Je montre qu'il n'en est rien en général, et j'obtiens alors une représentation asymptotique du module maximum pour $|z| = r$ d'une fonction entière de genre fini. Ce résultat me permet d'étudier en détail le cas resté obscur où le module maximum d'une fonction de genre p se comporte approximativement comme e^{r^p}. Je constate que dans ce cas la fonction peut exceptionnellement perdre tous les caractères qui la distinguent des fonctions de genre $p - 1$. D'ailleurs dans ce cas encore, les propriétés fondamentales de la fonction résultent de son mode de croissance qui apparaît alors comme plus important que le genre; *une telle fonction de genre p peut en effet être la somme de deux fonctions de genre $p - 1$*. Ce fait vient contredire l'opinion générale qui était, comme on sait, que la somme de deux fonctions de genre p est toujours de genre p au plus.

Les conclusions de ma première partie me conduisent à faire ressortir de nouveau l'importance toute speciale des fonctions à croissance régulière signalées par M. Borel, c'est à dire des fonctions dont le module maximum $M(r)$ satisfait à partir d'une certaine valeur de r à la double inégalité

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Toutefois j'ai pensé qu'il y avait intérêt à ne pas se borner à ces fonctions précisément afin d'avoir un moyen de les reconnaître lorsqu'on les rencontre dans une application: j'ai donc cherché à ne faire que les hypothèses strictement indispensables pour rendre possible un résultat précis. Dans le même ordre d'idées j'ai défini ainsi une classe assez étendue de fonctions dont le module maximum pour $|z| = r$ est égal à e^{hn}, n étant le nombre des zéros dont le module est inférieur à r, et h un nombre positif fini.

La seconde partie de ce travail est consacrée à la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini. On sait déjà que le module maximum d'une fonction entière est comparable à celui de sa dérivée. Mais j'ai pu obtenir un résultat beaucoup plus précis. Si l'on exclut du champ de la variable certaines aires fermées entourant les pôles, aires dont la somme peut être rendue négligeable, la dérivée logarithmique d'une fonction de genre fini reste comparable, partout ailleurs, à une puissance finie de la variable; j'étudie alors, dans le champ conservé, son module maximum pour $|z| = r$. La méthode suivie s'applique, sans modifications, à des

fonctions méromorphes d'un type plus général, et l'on obtient alors, au sujet de ces fonctions, une théorie de tous points analogue à celle qui a servi de base à l'étude des fonctions entières.

Je donne une application de cette théorie en étudiant la croissance des fonctions méromorphes récemment découvertes par M. P. Painlevé au cours de ses recherches sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. M. Painlevé a signalé trois types d'équations dont les intégrales sont des fonctions méromorphes nouvelles. Je montre que les intégrales des deux premiers types se définissent à l'aide de fonctions entières de genre 2 ou 3 dont le module maximum croît comme

$$e^{r^2} \quad \text{ou} \quad e^{r^3}.$$

Dans la troisième partie, je cherche à étendre les résultats des deux premières au cas des fonctions de genre infini, et j'étudie le troisième type d'équations à intégrales méromorphes nouvelles signalé par M. Painlevé. Je constate que les fonctions entières correspondantes croissent comme e^{e^r}, $e^{e^{2r}}$ ou $e^{e^{\frac{4}{3}r}}$.

J'ai abordé dans la quatrième partie un problème un peu différent en cherchant à préciser les résultats obtenus par MM. Borel et Lindelöf sur la croissance des intégrales d'une équation différentielle algébrique du premier ordre et j'ai été conduit ainsi à définir une classe d'équations dont les intégrales ont un mode de croissance très analogue à celui des fonctions entières de genre fini. J'indique, pour terminer, la conclusion qui me semble devoir être tirée de ces divers résultats. La relation remarquable qui existe entre la croissance d'une fonction entière et sa nature analytique (en particulier, avec le nombre des branches de la fonction inverse) ne nous paraît pas tenir à des circonstances fortuites ou spéciales: elle n'est vraisemblablement que la manifestation d'une propriété plus générale des fonctions analytiques.

PREMIÈRE PARTIE.

Je vais me borner, pour commencer, à l'étude des fonctions entières de genre fini; me réservant de montrer, dans une partie postérieure, comment la méthode employée pour ces fonctions peut être appliquée aux fonctions de genre infini.

1. Désignons par $F(z)$ une fonction entière de genre fini p. Soit $M(r)$ son module maximum pour $|z| = r$, r_i le module de son $i^{\text{ème}}$ zéro, enfin n le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur à r.

MM. Hadamard et Schou [1] ont donné une limite supérieure du nombre n. Ils ont montré que l'inégalité

$$M(r) < e^{V(r)} \tag{1}$$

supposée satisfaite pour toute valeur de r, entraîne

$$n < CV(r), \tag{2}$$

C étant une constante finie.

La réciproque du théorème de M. Hadamard est-elle vraie? On n'a pas encore complètement répondu à cette question, et c'est elle qui doit nous préoccuper tout d'abord.

Bien entendu, la question n'aura un sens que si $F(z)$ est un produit de facteurs primaires: si cette fonction contenait un facteur exponentiel $e^{H(z)}$, son ordre de grandeur pourrait être absolument indépendant du nombre n; c'est donc le produit de facteurs primaires, $G(z)$, contenu dans $F(z)$ que je vais me proposer d'étudier. Les résultats que j'obtiendrai ne s'en appliqueront pas moins au cas le plus général: soit en effet

$$F(z) = G(z)e^{H(z)},$$

[1] Hadamard, Journ. de Math., 1893. Schou, Comptes rendus, t. 125, p. 763.

j'ai le droit de supposer que l'ordre de grandeur de $e^{H(z)}$ est inférieur ou égal à celui de $G(z)$; car, si cette condition n'était pas réalisée pour $F(z)$, elle le serait certainement pour $F(z) - a$, quel que soit a (sauf pour une valeur de a au plus).[1]

Considérons donc le produit infini $G(z)$. M. Borel s'est proposé de lui trouver une limite supérieure (pour $|z| = r$), et il a démontré la proposition suivante:[2]

Soit ρ un nombre positif tel que l'on ait, quelque petit que soit α, à partir d'une certaine valeur de n

$$(3) \qquad r_n > n^{\frac{1}{\rho+\alpha}}.$$

On aura, quel que soit ε, à partir d'une certaine valeur de r,

$$(4) \qquad |G(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

M. Borel a appelé *ordre* de $G(z)$ le plus petit nombre ρ satisfaisant à la condition (3). Ce nombre est tel que la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho-\alpha}}$ soit divergente et la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho+\alpha}}$ convergente, quel que soit α.

2. Voulant donner du module maximum pour $|z| = r$, $M(r)$, une représentation asymptotique aussi exacte que possible, je dois chercher avant tout si l'on ne peut pas obtenir une limite supérieure de $M(r)$ plus précise que la limite (4).

Quelque naturelle que semble cette recherche, on a pu se demander s'il y avait lieu de l'entreprendre. Nous ne savons pas en effet, *à priori*, jusqu'où va la relation observée entre la croissance de $M(r)$ et le nombre n défini plus haut: or s'il fallait pour déterminer $M(r)$ avec quelque précision faire intervenir des éléments nouveaux comme, par exemple, les arguments des zéros, les difficultés du problème seraient singulièrement accrues.

---

[1] Cela résulte de la généralisation du théorème classique de M. Picard sur les fonctions entières. Voir Borel, *Sur les zéros des fonctions entières*. (Acta Math. 1896.)

[2] Acta Math. 1896 (Art. cité); *Leçons sur les fonctions entières*, p. 61.

Il semble précisément à première vue que cette circonstance défavorable se présente. Considérons, en effet, avec M. Borel,[1] les deux fonctions $\sin \pi z$ et $\frac{1}{\Gamma(z)}$. Leurs zéros ont mêmes modules $1, 2, 3, \ldots$ et cependant leurs modules maxima sont respectivement proportionnels à e^r et à r^r. M. Borel fut tenté de conclure qu'il faut ou tenir compte des arguments des zéros ou se contenter de la limite (4).

Fort heureusement il se trouve que les deux fonctions signalées par M. Borel rentrent dans un cas d'exception: nous constaterons qu'on a en général le droit de faire abstraction des arguments des zéros. C'est là ce qui permet de préciser notablement les résultats de MM. Hadamard et Borel.

Une représentation exacte de $M(r)$ aura surtout son intérêt lorsque l'on étudièra la classe, fondamentale en pratique, des fonctions à croissance régulière définies par M. Borel (*voir* Introduction). Mais il convient peut-être de s'attacher, pour commencer, à des types de fonctions plus généraux; il est utile, en effet, de connaître des propositions applicables à des fonctions dont on ne sait pas encore si elles sont à croissance régulière. On aura précisément ainsi un moyen de démontrer, s'il y a lieu, que leur croissance est bien régulière.

3. Pour établir les résultats que j'ai en vue, j'aurai à évaluer certaines intégrales définies où figure la fonction r_i ou une fonction $\psi(i)$ comparable à r_i. Cette évaluation ne sera évidemment possible que si l'on fait certaines hypothèses sur la croissance de cette fonction $\psi(i)$; mais des hypothèses très générales suffiront. C'est ainsi qu'il n'est pas nécessaire de supposer que $\psi(i)$ est à *croissance régulière* (la définition de M. Borel étant étendue aux fonctions croissantes qui restent comparables à une puissance finie de la variable). En d'autres termes, nos calculs pourront porter sur des fonctions $\psi(x)$ qui ne satisfont pas nécessairement, à partir d'une certaine valeur de x, à une double inégalité de la forme

$$x^{\lambda-\varepsilon} < \psi(x) < x^{\lambda+\varepsilon} \quad (\varepsilon \text{ arbitrairement petit}).$$

L'analyse n'a pas cru devoir s'occuper jusqu'ici de semblables fonctions: il

[1] *Leçons sur les fonctions entières*, p. 99.

est cependant possible d'effectuer sur elles des calculs précis, moyennant des hypothèses assez larges sur leur mode de croissance.

Evalution de certaines intégrales définies.

4. $G(z)$ étant un produit de facteurs primaires de genre p, je suppose ses zéros rangés par ordre de modules croissants suivant la règle de Weierstrass, en sorte que l'on a

$$r_i \leq r_{i+1},$$

si l'on désigne par r_i le module du zéro de rang i.

Les r_i étant connus, il est toujours possible de former une fonction de x holomorphe, réelle et positive qui, pour x entier et égal à i, prenne la valeur r_i. J'appelle $\omega(x)$ une telle fonction.

On peut définir la fonction $\omega(x)$ au moyen d'une formule d'interpolation quelconque; mais je supposerai, ce qui est évidemment légitime, qu'elle ne cesse pas de croître lorsque x varie de 0 à $+\infty$.

Cela posé, désignant par m, n deux entiers positifs finis ($m < n$) et par λ un nombre positif, proposons-nous de déterminer une limite supérieure d'une somme de la forme

$$\sum_{i=m+1}^{i=n} [\omega(i)]^{-\lambda}, \qquad \sum_{i=n+1}^{\infty} [\omega(i)]^{-\lambda}.$$

Nous augmentons évidemment ces sommes en les remplaçant par les intégrales définies

$$\int_m^n [\omega(x)]^{-\lambda} dx, \qquad \int_n^\infty [\omega(x)]^{-\lambda} dx.$$

Tout revient donc à trouver des limites supérieures de ces intégrales. Pour y parvenir, je substituerai à $\omega(x)$ une fonction $\psi(x)$ qui, pour x réel et positif, soit elle-même réelle, positive et inférieure à $\omega(x)$, cette fonction $\psi(x)$ étant choisie de telle manière que l'on sache calculer les intégrales

$$I = \int_l^n [\psi(x)]^{-\lambda} dx, \qquad I_1 = \int_n^\infty [\psi(x)]^{-\lambda} dx$$

dont la seconde est supposée avoir une limite.

Il nous faut chercher quelles hypothèses il convient de faire a priori sur $\psi(x)$ pour obtenir aisément une limite de ces intégrales définies

La solution la plus simple consisterait à prendre pour $\psi(x)$ une puissance de x. J'ai rappelé qu'il existe un nombre ρ (ordre de la fonction entière) tel que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > i^{\frac{1}{\rho+\alpha}} \tag{3}$$

quelque petit que soit α. On peut donc faire

$$\psi(x) = x^{\frac{1}{\rho+\alpha}}.$$

Ce choix nous ramènerait à la méthode qu'a suivie M. Borel, dans les travaux cités plus haut, pour évaluer le module maximum du produit $G(z)$.

Mais on sait qu'il peut exister un écart considérable entre la fonction $\omega(x)$ et la puissance de x, $x^{\frac{1}{\rho+\alpha}}$. C'est là une conséquence de l'existence des fonctions à croissance irrégulière.[1] D'autre part, dans le cas même où l'ordre d'infinité de r_i est déterminé (d'après la définition de M. Borel), il est souvent possible d'assigner au module r_i une limite inférieure plus précise que la limite (3). On aura par exemple

$$r_i > i^{\frac{1}{\rho+\alpha}}(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

σ étant un nombre fini. Il est à prévoir que l'on obtiendra des limites plus exactes si l'on peut, dans les divers calculs effectués, remplacer $x^{\frac{1}{\rho+\alpha}}$ par une fonction $\psi(x)$ plus voisine de $\omega(x)$.

Laissons donc de côté, pour un moment, la fonction $\omega(x)$ et faisons à priori certaines hypothèses sur $\psi(x)$, en montrant que ces hypothèses rendront possible la limitation des intégrales définies I et I_1.

5. Faisant d'abord varier x entre m et n, *supposons qu'il existe deux nombres positifs* μ *et* ν *tels que les fonctions* $\frac{x^\mu}{\psi}$ *et* $\frac{\psi}{x^\nu}$ *soient croissantes ou du moins ne décroissent pas lorsque* $m < x < n$. Nous distinguerons alors divers cas suivant la valeur qu'a λ dans l'intégrale I.

---

[1] Voir dans l'*Introduction*, la définition de M. Borel. M. Borel a montré qu'il est facile de former des fonctions à croissance irrégulière.

Premier cas. *μ est inférieur à $\frac{1}{\lambda}$.*

Exprimons que les dérivées logarithmiques des deux fonctions $\frac{x^{\lambda\mu}}{\phi^{\lambda}}$ et $\frac{\phi^{\lambda}}{x^{\lambda\nu}}$ sont positives: nous obtenons

$$\frac{\lambda\nu}{x} < \frac{\frac{d\phi^{-\lambda}}{dx}}{\phi^{-\lambda}} \leq \frac{\lambda\mu}{x}$$

et nous en déduisons la double inégalité

$$(1 - \lambda\mu)\phi^{-\lambda} \leq \phi^{-\lambda} + x\frac{d\phi^{-\lambda}}{dx} \leq (1 - \lambda\nu)\phi^{-\lambda}$$

où $1 - \lambda\mu$ et $1 - \lambda\nu$ sont des nombres positifs.

D'où, en intégrant:

$$\frac{1}{1 - \lambda\nu}[x\phi^{-\lambda}]_m^n \leq \int_m^n \phi^{-\lambda} dx < \frac{1}{1 - \lambda\mu}[x\phi^{-\lambda}]_m^n.$$

Par suite, on peut poser

$$\int_m^n \phi^{-\lambda} dx = cn[\phi(n)]^{-\lambda} \tag{5}$$

et c conserve une valeur finie lorsque n augmente indéfiniment $\left(c < \frac{1}{1 - \lambda\mu}\right)$.

6. **Deuxième cas.** *ν est supérieur à $\frac{1}{\lambda}$.*

En procédant exactement comme dans le premier cas, nous aboutissons cette fois à l'inégalité

$$(\lambda\nu - 1)\phi^{-\lambda} \leq -\frac{d}{dx}(x\phi^{-\lambda})$$

où l'on a $\lambda\nu - 1 > 0$.

Si l'on intègre, on pourra poser

$$\int_m^n \phi^{-\lambda} dx = cm[\phi(m)]^{-\lambda}$$

et c restera fini lorsque n augmentera indéfiniment.

Si donc les conditions imposées à $\phi(x)$ ne cessent pas d'être vérifiés pour $x > m$, on aura

$$\int_m^x \phi^{-\lambda} dx = c_1 m [\phi(m)]^{-\lambda}$$

c_1 étant une constante positive finie, et par suite (si l'on remplace m par n, en se reportant aux notations du § 4)

$$I_1 = c_1 n [\phi(n)]^{-\lambda}.$$

7. **Troisième cas.** Supposons maintenant que l'on ne puisse trouver ni un nombre μ inférieur à $\frac{1}{\lambda}$, ni un nombre ν supérieur à $\frac{1}{\lambda}$ satisfaisant dans l'intervalle mn aux conditions énoncées ce qu'on peut exprimer grossièrement en disant que, dans cet intervalle, $\phi^{-\lambda}$ croît approximativement comme $\frac{1}{x}$. Nous sommes alors conduits à imposer au choix de $\phi(x)$ une condition supplémentaire. Je supposerai qu'il existe deux nombres μ_1 et ν_1 tels que les fonctions

$$\frac{x(\log x)^{\mu_1}}{\phi^{\lambda}} \quad \text{et} \quad \frac{\phi^{\lambda}}{x(\log x)^{\nu_1}}$$

soient croissantes ou du moins ne décroissent pas dans l'intervalle mn. La dérivée logarithmique de $\phi^{-\lambda}$ satisfera, pour $m < x < n$ aux inégalités

$$\frac{1}{x} + \frac{\nu_1}{x \log x} < -\frac{\frac{d\phi^{-\lambda}}{dx}}{\phi^{-\lambda}} \leqq \frac{1}{x} + \frac{\mu_1}{x \log x}.$$

Ici encore, suivant les valeurs de μ_1 et ν_1 diverses circonstances pourront se présenter.

Soit d'abord $\mu_1 < 1$. On aura

$$(1 - \mu_1)\phi^{-\lambda} < \frac{d}{dx}(\phi^{-\lambda} x \log x).$$

On pourra, par suite, poser, lorsque n devient très grand

$$\int_m^n \phi^{-\lambda} dx = cn \log n [\phi(n)]^{-\lambda} \quad (c \text{ nombre fini}). \tag{7}$$

[1] $\log x$ représente ici la valeur arithmétique du logarithme.

Soit maintenant $\nu_1 > 1$. On aura

$$(\nu_1 - 1)\psi^{-\lambda} \leq -\frac{d}{dx}(\psi^{-\lambda} x \log x),$$

ce qui permettra de poser

$$\int_m^\infty \psi^{-\lambda} dx = cm \log m [\psi(m)]^{-\lambda}, \tag{8}$$

où c reste fini lorsque m augmente indéfiniment.

Soit enfin $\mu_1 > 1$, $\nu_1 < 1$. On peut exprimer ce fait en disant que dans l'intervalle mn (ou du moins dans un intervalle intérieur à mn), la fonction $\psi^{-\lambda}$ se comporte à la façon de $\dfrac{1}{x \log x}$. Je ne puis rien dire alors sur la valeur des intégrales précédentes, à moins de faire une hypothèse plus précise sur la croissance de la fonction $\psi(x)$.

Posant, d'une manière générale,

$$\log_2 x = \log \log x, \qquad \log_3 x = \log \log_2 x, \quad \ldots,$$

et désignant par μ_k un nombre quelconque inférieur à 1, par ν_k un nombre quelconque supérieur à 1, je supposerai que l'un des deux rapports

$$\frac{x \log x \ldots (\log_k x)^{\mu_k}}{\psi^\lambda}, \qquad \frac{\psi^\lambda}{x \log x \ldots (\log_k x)^{\nu_k}}$$

soit croissant (ou du moins ne décroisse pas), lorsque k dépasse un certain entier fini.

Dans le premier cas, l'intégrale

$$\int_m^n \psi^{-\lambda} dx$$

est divergente et a une valeur de la forme

$$I = c\psi^{-\lambda} n \log n . \log_2 n \ldots \log_k n \quad (c \text{ positif fini}). \tag{9}$$

Dans le second cas, la même intégrale est convergente, et nous obtenons pour elle une valeur de la forme

$$c\psi^{-\lambda} m \log m \ldots \log_k m \quad (c \text{ positif fini}).$$

Si l'on fait croître n jusqu'à $+\infty$ et que l'on change m et n, en se reportant aux notations du § 4, on pourra écrire l'égalité

$$I_1 = c_1 \psi^{-\lambda} n \log n \ldots (\log_k n) \tag{10}$$

où c_1 conserve, lorsque n augmente, une valeur positive finie.

8. On constate ainsi que les hypothèses faites sur $\psi(x)$ permettent bien d'assigner, pour les grandes valeurs de x, une limite supérieure aux intégrales[1] I et I_1.

Il est à remarquer d'ailleurs que les raisonnements précédents n'exigent nullement que λ, μ et ν soient positifs. Soit, d'une manière générale, une fonction réelle et positive $f(x)$, satisfaisant aux conditions suivantes: il existe deux nombres positifs ou négatifs, μ et ν, tels que les fonctions $\frac{x^\nu}{f(x)}$ et $\frac{f(x)}{x^\mu}$ soient croissantes. Si nous écartons, pour simplifier, le cas exceptionnel où $\mu < -1 < \nu$, nous pourrons affirmer que l'intégrale *indéfinie de $f(x)$ devient infinie comme $xf(x)$.*

L'hypothèse faite sur $f(x)$ revient, d'ailleurs, à supposer que la dérivée de $f(x)$ devient infinie comme $\frac{f(x)}{x}$. Nous avons donc démontré que de cette propriété de la dérivée, on a le droit de conclure à celle de l'intégrale. Nous constatons ainsi que la croissance de $f(x)$ est tout-à-fait analogue à celle d'une puissance de x.

[1] Dans une note insérée aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences le 4 février 1901, j'ai obtenu les mêmes résultats en suivant une voie un peu différente, mais en imposant à $\psi(x)$ des conditions équivalentes à celles que j'ai énoncées ici. Ces conditions étaient les suivantes:

Si $\rho \neq p$, l'on pose

$$\psi(x) = x^{\frac{1}{\rho}} \psi_1(x)$$

et l'on suppose $\psi_1(x)$ tel que la fonction

$$\varepsilon \log x - \log \psi_1$$

soit positive et croissante lorsque $\varepsilon p < 1 - \frac{p}{\rho}$. $\psi_1(x)$ sera par exemple de la forme

$$(\log x)^{\sigma_1} (\log^{(2)} x)^{\sigma_2} \ldots .$$

Si ρ était égal à p, on isolerait dans la fonction ψ le produit $x^{\frac{1}{\rho}} (\log x)^{\frac{1}{\sigma}}$.

9. Revenons maintenant au produit de facteurs primaires $G(z)$ dont nous supposons les zéros connus, et voyons comment nous pourrons former la fonction $\psi(x)$.

Le cas où l'on obtiendra les résultats les plus précis est évidemment celui où la fonction $\omega(x)$ définie au § 4 satisfait elle-même aux conditions imposées à $\psi(x)$. On peut alors substituer ω à ψ dans tous les calculs précédents.

Si l'on introduit dans l'énoncé le genre p et l'ordre ρ du produit $G(z)$, cette classe sera définie par les caractères suivants (on suppose $p \neq 0$):

1°. Lorsque l'ordre ρ n'est pas entier, *il existe un nombre* μ *inférieur à* $\frac{1}{p}$ *et un nombre* ν, *tels que les rapports* $\frac{x^{\mu}}{\omega(x)}$, $\frac{\omega(x)}{r^{\nu}}$ *soient croissants à partir d'une certaine valeur de* x.

On a alors l'égalité (5) pour $\lambda \leq p$ et l'égalité (6) pour $\lambda > p$.

Parmi les classes de fonctions pour lesquelles la condition énoncée est réalisée, il en est une qui doit surtout attirer notre attention: elle comprend les fonctions dont les zéros sont répartis de telle sorte que les deux rapports

$$\frac{i^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}{r_i} \quad \text{et} \quad \frac{r_i}{i^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}}$$

soient croissants à partir d'une certaine valeur de i, quel que soit le nombre ε. Cette classe de fonctions rentre dans celle des *fonctions à croissance régulière* qu'a définie M. Borel; elle comprend toutes les fonctions qui ont été étudiées jusqu'ici par l'analyse.

Les calculs précédents nous permettront d'ailleurs de subdiviser cette classe en faisant sur la croissance de r_i des hypothèses de plus en plus précises.

Mais nous n'épuiserons pas ainsi la famille de fonctions que définissent les conditions imposées plus haut à $\omega(x)$. Cette famille comprend des fonctions *qui ne sont pas à croissance régulière, au sens adopté par M. Borel, mais pour lesquelles le module* r_i *pourra osciller, lorsque* i *croît, entre* i^{ρ} et $i^{\frac{1}{\rho}-\alpha}$ (ε, α nombres positifs arbitrairement petits). Nous obtiendrons néanmoins sur ces fonctions des résultats aussi précis que sur les précédentes.

10. 2°. *Lorsque $\rho = p$, la classe de fonctions considérée est définie par ce fait qu'outre le nombre ν défini plus haut, il existe un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport $\frac{x^{\frac{1}{p}} (\log x)^\sigma}{\omega}$ soit croissant à partir d'une certaine valeur de x.* (La fonction ω se trouve alors satisfaire aux conditions du § 7 avec $\mu_1 < 1$, et l'on a, pour $\lambda = p$, l'égalité (7); l'égalité (5) reste d'ailleurs vérifiée pour $\lambda < p$, l'égalité (6) pour $\lambda > p$).

S'il n'existe pas de tel nombre σ il existe du moins un entier fini k et un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} (\log x)^{\frac{1}{p}} \ldots (\log_k x)^\sigma}{\omega}$$

soit croissant à partir d'une certaine valeur de x. (On aura alors, pour $\lambda = p$, l'inégalité (9)).

3°. Lorsque $\rho = p + 1$, nous supposerons qu'*il existe* (outre le nombre p défini au § 9) *un entier fini k et un nombre σ supérieur à $\frac{1}{p+1}$ tels que le rapport*

$$\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}} (\log x)^{\frac{1}{p+1}} \ldots (\log_k x)^\sigma},$$

soit croissant à partir d'une certaine valeur de x. On aura alors, pour $\lambda = p + 1$, l'inégalité (10).

11. Considérons maintenant le cas général où $\omega(x)$ n'appartient pas à la classe définie par les hypothèses du paragraphe précédent, mais est une fonction croissante satisfaisant simplement aux conditions du § 4. La fonction $\varphi(x)$, inférieure ou égale à $\omega(x)$ que l'on doit faire figurer dans les intégrales I et I_1 afin de les rendre calculables par la méthode exposée ci-dessus, ne peut plus alors coïncider avec $\omega(x)$. Cherchons dans quelle mesure elle pourra s'en rapprocher.

Je vais considérer, tout d'abord, le cas où l'ordre ρ n'est pas entier, et montrer qu'*on pourra faire coïncider φ et ω pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.*

Soit μ un nombre compris entre $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho}$. Il résulte de la définition même de l'ordre que la fonction $\frac{x^{\mu}}{\omega(x)}$ prend des valeurs indéfiniment croissantes. On peut, en effet, poser

$$\mu = \mu_1(1 + \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\mu_1} < \rho, \qquad \varepsilon > 0.$$

Si donc il existait un nombre c tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de x

$$\frac{x^{1+\varepsilon}}{\omega^{\frac{1}{\mu_1}}} < c,$$

la série $\sum \frac{1}{r_i^{\frac{1}{\mu_1}}}$ serait convergente, ce qui n'a pas lieu.

Considérons alors la courbe $\frac{x^{\mu}}{\omega(x)}$. On peut tracer une courbe *représentant une fonction toujours croissante, ou du moins, ne décroissant jamais*, qui reste toujours au-dessus de la courbe $\frac{x^{\mu}}{\omega(x)}$ et la touche en une infinité de points s'éloignant indéfiniment de l'origine. Nous prendrons pour $\frac{x^{\mu}}{\psi(x)}$ la plus petite fonction représentée par une telle courbe, et $\psi(x)$, qui coïncidera avec $\omega(x)$ pour des valeurs de x indéfiniment éloignées, satisfera bien, entre m et n, aux conditions énoncées au § 5 (premier cas).

D'autre part, lorsque x varie de n à $+\infty$, on sait que, si n est assez grand, le rapport $\frac{\omega(x)}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ et, par suite, $\frac{\psi}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ dévient supérieur à tout nombre donné, quelque petit que soit ε.

Il en résulte que (pour une infinité de valeurs de x figurant parmi les précédentes), ce rapport prend une série de valeurs plus petites que toutes les suivantes. Formons une fonction $\frac{\psi_1(x)}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ toujours croissante qui coïncidera avec $\frac{\omega}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ pour ces valeurs de x. La fonction ψ_1 ainsi définie satisfera bien aux conditions voulues pour $x > n$.

12. Lorsque l'ordre ρ est entier il faut distinguer divers cas.

Soit $\rho = p$, et supposons qu'*il existe un entier k et un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport*

$$\frac{x^{\frac{1}{p}}\ldots(\log_k x)^{\sigma}}{\omega}$$

admette des valeurs indéfiniment croissantes. On pourra alors former, dans l'intervalle mn, une fonction croissante (ou, du moins, ne décroissant jamais) qui ne soit jamais inférieure au rapport considéré et lui soit égale pour des valeurs de x s'éloignant indéfiniment. Cela permettra de faire coïncider ω et ψ pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

Lorsqu'il n'existe pas d'entier k satisfaisant à la condition indiquée, on remarquera qu'on pourra toujours satisfaire à cette condition quel que soit k, pourvu que l'on remplace ω par $\omega(\log_k x)^{-\varepsilon}$, où ε est un nombre positif arbitrairement petit. Si non il faudrait admettre qu'on peut trouver un nombre positif ε tel que le rapport

$$\frac{x^{\frac{1}{p}}\ldots(\log_k x)^{\frac{1}{p}+\varepsilon}}{\omega}$$

reste, à partir d'une certaine valeur de x, inférieur à un nombre fixe, ce qui rendrait convergente la série $\sum \frac{1}{r_i^p}$, laquelle diverge par hypothèse. On peut donc affirmer que l'on pourra, *en tout cas, choisir la fonction ψ de façon que le rapport $\frac{\omega}{\psi}$ soit (entre m et n) inférieur à $(\log_k x)^{\varepsilon}$ pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.*

On se trouve d'ailleurs placé, pour $x > n$, dans les mêmes conditions que lorsque ρ n'était pas entier.

Supposons enfin que ρ *soit égal à* $p+1$.

S'il existe un entier k et un nombre σ supérieur à $\frac{1}{p+1}$ tel que le rapport

$$\frac{\omega}{x^{p+1}\ldots(\log_k x)^{\sigma}}$$

reste, à partir d'une certaine valeur de x, supérieur à tout nombre donné,

on pourra faire coïncider les fonctions ω et ψ pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

Mais s'il n'existe pas de tel entier k, les calculs précédents ne nous fourniront aucun renseignement précis sur la valeur du rapport $\frac{\omega}{\psi}$. J'étudierai par une méthode directe, au § 19, les fonctions entières pour lesquelles cette circonstance se présente.

Le module maximum d'une fonction entière d'ordre non entier.

13. Pour déterminer le mode de croissance d'une fonction entière, je m'efforcerai de suivre la voie la plus naturelle; partant du développement d'une telle fonction en produit infini, je considérerai ce produit sur une circonférence ayant pour centre l'origine, et je chercherai une limite supérieure et une limite inférieure de son module en un point quelconque de la circonférence. Je constaterai ensuite que dans des cas étendus ces deux limites coïncident: toutes les propriétés du module maximum de la fonction se trouveront alors résumées par une seule formule.

Soit $F(z)$ une fonction entière de genre fini, $G(z)$ le produit de facteurs primaires contenu dans $F(z)$, en sorte que l'on a

$$F(z) = G(z)e^{H(z)}.$$

$F(z)$ étant de genre fini, le facteur exponentiel $e^{H(z)}$ s'étudie très simplement. C'est donc à l'étude du produit de facteurs primaires, $G(z)$ que je dois m'attacher: cette étude suffit même au point de vue théorique en vertu du théorème de M. Picard dont je rappelais au § 1 la généralisation.

14. Soit $G(z)$ de genre p et de la forme

$$\prod\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\cdots+\frac{z^p}{pa_i^p}}.$$

Rien ne serait changé aux raisonnements qui vont suivre si ce produit était multiplié par une puissance finie de z, c'est-à-dire si l'origine était un zéro de $G(z)$.

Formons une fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées au § 4. Nous aurons $r_i \geq \psi(i)$ $(r_i = |a_i|)$.

Suivant alors une méthode analogue à celle qu'a employée M. Borel, je définirai l'entier n par l'égalité

$$r = \eta\psi(n),$$

où η est une constante positive finie. Je supposerai d'ailleurs r assez grand pour que l'on ait $n > m$.

On sait qu'on peut trouver[1] un nombre positif b tel que le $i^{\text{ème}}$ facteur de $G(z)$ soit, en module inférieur, à $e^{b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{p+1}}$. Le produit des facteurs de rang supérieur à n est donc, en module, inférieur à

$$e^{br^{p+1}\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}}}.$$

D'autre part

$$\prod_1^n\left(1-\frac{z}{a_i}\right) < e^{r\sum\limits_1^n\frac{1}{r_i}}.$$

On a, par suite

$$\log|G(z)| < 2r\sum_1^n\frac{1}{r_i} + \ldots + \frac{r^p}{p}\sum_1^n\frac{1}{r_i^p} + br^{p+1}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}}.$$

Si nous supposons m choisi de telle sorte que $\psi(m)$ soit plus grand que 1 (ce qui est légitime, puisque $\psi(x)$ est une fonction croissante), on aura à fortiori

$$(11)\qquad \log|G(z)| < gr^p + 2r\int_m^n\frac{dx}{\psi(x)} + \ldots + \frac{r^p}{p}\int_m^n\frac{dx}{\psi^p} + br^{p+1}\int_n^{\infty}\frac{dx}{\psi^{p+1}}$$

g étant, de même que b, une constante positive finie.

15. Pour évaluer le second membre de l'inégalité (11), je supposerai d'abord que *l'ordre ρ du produit $G(z)$ n'est pas entier.*

Nous plaçant alors, par le choix de $\psi(x)$, dans le premier cas du § 5, nous pouvons remplacer les intégrales définies qui figurent dans l'inégalité (11) par les valeurs obtenues dans ce paragraphe. Faisons, pour $\lambda \leq \mu$

[1] Voir en particulier Borel, *Leç. sur les fonc. ent.*, p. 51.

$$r^\lambda \int_{r_0}^{r} \frac{dx}{\psi^{h\lambda}} = c_\lambda \eta^\lambda n.$$

Le nombre c_λ sera fini[1] en vertu de l'égalité (5) du § 5 et nous savons en calculer une limite supérieure.

De même

$$r^{p+1} \int_{r_0}^{r} \frac{dx}{\psi^{h(p+1)}} = c_{p+1} \eta^{p+1} n,$$

c_{p+1} étant un nombre fini.

L'inégalité (11) devient donc

$$\log |G(z)| < gr^p + g_1 n \qquad (g_1 \text{ nombre fini})$$

ou

$$|G(z)| < e^{hn}, \tag{12}$$

h étant un nombre fini; car nous supposons ici $\rho > p$, en sorte que le rapport $\frac{n}{r^p}$ devient infiniment grand en même temps que r.

La démonstration précédente serait en défaut si $G(z)$ était de genre zéro. On poserait dans ce cas $z = u^q$, q étant un entier assez grand pour que la fonction de u, $G(u^q)$ soit de genre *un*. La proposition du § 15 s'applique à $G(u^q)$, ce qui montre que l'on a bien encore l'inégalité (12).

16. De l'inégalité (12), on peut tirer diverses conséquences. *Supposons qu'il existe des nombres $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ telle que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i*

$$r_i^\rho > i (\log i)^{\sigma_1} \ldots (\log_k i)^{\sigma_k}.$$

On prendra

$$\psi(x) = x^{\frac{1}{\rho}} (\log x)^{\frac{\sigma_1}{\rho}} \ldots (\log_k x)^{\frac{\sigma_k}{\rho}}.$$

D'où

$$r^\rho = \eta n (\log n)^{\sigma_1} \ldots (\log_k n)^{\sigma_k}.$$

[1] Lorsque je dirai, dans le cours de ce travail, qu'un nombre est fini, j'entendrai par là qu'il reste inférieur à un nombre fixe lorsque r ou n augmente indéfiniment

Il en résulte évidemment

$$n < \eta_1 r^\rho (\log r)^{-\sigma_1} \ldots (\log_k r)^{-\sigma_k} \quad (\eta_1 \text{ constante positive finie})$$

et *l'on obtient pour* $|G(z)|$, *à partir d'une certaine valeur de* r, *la limite supérieure*

$$|G(z)| < e^{hr^\rho (\log r)^{-\sigma_1} \ldots (\log_k r)^{-\sigma_k}}$$

h restant, lorsque r augmente indéfiniment, inférieur à un nombre fixe. Ainsi se trouve précisé le théorème de M. Borel que j'ai rappelé au § 1.

17. Pour voir quelle précision il convient d'attendre de l'inégalité (12) dans le cas le plus général où l'ordre ρ est supposé non entier, je dois compléter le résultat précédent en donnant une limite inférieure du module maximum $M(r)$ pour $|z| = r$.

On pourrait déduire cette limite des théorèmes de MM. Hadamard et Schou. On l'obtiendra plus rapidement de la façon suivante.

Désignons par n' le nombre des zéros de $G(z)$ dont le module est inférieur à ηr, η étant un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, et posons

$$G(z) = G_1(z) \prod_1^{n'} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right).$$

Lorsque $i < n'$, la partie réelle de $\log \frac{z - a_i}{a_i}$ a une valeur finie supérieure à $\log \frac{1-\eta}{\eta}$. D'où

$$\prod_1^{n'} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) > e^{hn'},$$

h étant un nombre positif fini.

Considérons, d'autre part, l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{G_1(z)}{z} dz,$$

en désignant par C le contour du cercle de rayon r ayant son centre à l'origine. Cette intégrale est égale à l'unité. Il est donc certain que le

module $|G_1(z)|$ est supérieur à un sur une infinité d'arcs de la circonférence C'. On a sur ces arcs [1]

$$(13) \qquad |G(z)| > e^{hn'}.$$

Dans cette inégalité on peut donner à h la valeur $\log\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)$. Faisons en particulier $\eta = \frac{1}{e+1}$: on pourra alors remplacer l'inégalité (13) par l'inégalité

$$|G(z)| > e^{n'}.$$

Si, au lieu de $G(z)$, on considérait une fonction entière quelconque $F(z)$, il faudrait substituer à l'inégalité (13) l'inégalité

$$|F(z)| > |F(0)|e^{hn'}.$$

Remarquons enfin que le résultat subsiste si l'on remplace la circonférence C' par un contour quelconque de longueur k_1 (k fini), dont tous les points sont à une distance de l'origine égale à $k_1 r$ (k_1 fini).

18. Il nous faut maintenant, pour compléter les résultats des paragraphes précédents, comparer les limites (12) et (13). Nous avons vu au § 11 que, si l'ordre ρ n'est pas entier, on peut toujours choisir la fonction $\psi(x)$ de façon que les fonctions ω et ψ coïncident pour une infinité de valeurs de x indéfiniment croissantes. Donc, pour une infinité de valeurs de r, le nombre n est déterminé par l'égalité $r = \eta r_n$, η étant fini et, si l'on veut, inférieur à $\frac{1}{2}$. On a pour ces valeurs $n' = n$.

Mais il pourra arriver que pour certaines fonctions et pour certaines valeurs de r le nombre n' soit notablement inférieur à n. On voit, en se reportant à la définition de n, qu'il en sera ainsi si la valeur de $\psi(n)$ est elle-même très petite par rapport au module r_n, c'est-à-dire si la fonction $\omega(x)$ prenant la valeur r_i pour $x = i$ ne satisfait pas aux conditions imposées à $\psi(x)$. Il y aurait donc lieu de rendre plus exactes encore les deux limites assignées à $M(r)$ afin d'amener, s'il est possible,

[1] La démonstration sera valable encore si le produit $G(z)$ est de genre infini. Mais, dans ce cas il y aura intérêt à compléter la proposition en donnant à η une valeur voisine de l'unité. J'indiquerai dans la troisième partie cette généralisation qui n'a point ici d'utilité.

ces limites à coïncider. Toutefois de telles recherches ne semblent offrir au point de vue pratique que peu d'intérêt: on n'a jamais rencontré dans les applications et on ne rencontrera vraisemblablement d'ici à longtemps que des fonctions pour lesquelles les nombres n et n' sont égaux. Il nous suffira donc d'avoir obtenu sur ces fonctions un résultat tout-à-fait précis.

Pour savoir dans quel cas on aura le droit d'identifier les nombres n et n', il suffit d'ailleurs de se reporter au § 9, en considérant à nouveau la fonction $\omega(x)$ définie au § 4. S'il existe un nombre positif α tel *que les rapports* $\frac{x^{\frac{1}{\rho}}}{\omega}$, $\frac{\omega}{x^{\frac{1}{\rho}-\alpha}}$ *soient croissants à partir d'une certaine valeur de* x nous pouvons dans tous nos calculs remplacer ψ par ω. En particulier, le nombre n sera défini par l'égalité

$$r = \eta\omega(n) = \eta r_n,$$

η étant un nombre fini quelconque que l'on peut prendre inférieur à $\frac{1}{2}$.

On parviendra ainsi, lorsque $\omega(x)$, c'est à dire r_i, satisfait à la condition qui vient d'être énoncée, à la proposition suivante:

Si l'on désigne par n le nombre des zéros dont le module est inférieur à ηr $\left(\eta < \frac{1}{2}\right)$, on pourra, à partir d'une certaine valeur de r, poser

$$M(r) = e^{hn}, \tag{14}$$

h étant un nombre positif fini. Cette inégalité restera vraie pour toute valeur de r.

L'égalité (14) exprime en résumé toutes les propriétés du module $M(r)$.

19. Parmi les fonctions satisfaisant aux conditions énoncées, nous signalerons en particulier celles pour lesquelles il existe deux rapports croissants de la forme

$$\frac{i^{\frac{1}{\rho}}(\log_1 i)^{\frac{\sigma_1}{\rho}}\ldots(\log_k i)^{\frac{\sigma_k+\varepsilon}{\rho}}}{r_i}, \quad \frac{r_i}{i^{\frac{1}{\rho}}\ldots(\log_k i)^{\frac{\sigma_k-\varepsilon}{\rho}}}.$$

Ces fonctions sont à *croissance régulière*.

Si l'on considère les puissances de la variable comme les types les plus réguliers de croissance, on pourra dire que la croissance de la fonction $G(z)$ est *parfaitement régulière* lorsque les nombres $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sont tous nuls. On énoncera alors le théorème suivant:

Si l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i = hi^{\frac{1}{\rho}} \quad (h \text{ positif fini})$$

on aura (pour toute valeur de r) *à partir d'une certaine valeur de r*

$$M(r) = e^{h'r^\rho} \qquad (h' \text{ positif fini}).$$

Relativement aux fonctions à croissance régulière, les inégalités (12) et (13) permettront d'énoncer, d'une manière générale, la proposition suivante:

Si l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$i^{\frac{1}{\rho}} (\log i)^{\frac{\sigma_1}{\rho}} \ldots (\log_k i)^{\frac{\sigma_k - \varepsilon}{\rho}} < r_i < i^{\frac{1}{\rho}} (\log i)^{\frac{\sigma_1}{\rho}} \ldots (\log_k i)^{\frac{\sigma_k + \varepsilon}{\rho}}$$

k étant un entier, et ε un nombre arbitrairement petit, l'on aura, à partir d'une certaine valeur de r

$$e^{r^\rho (\log r)^{\sigma_1} \ldots (\log_k r)^{\sigma_k - \varepsilon}} < M(r) < e^{r^\rho (\log r)^{\sigma_1} \ldots (\log_k r)^{\sigma_k + \varepsilon}}.$$

20. Je vais maintenant compléter les résultats précédents en démontrant la réciproque du théorème énoncé au § 19.

Cette réciproque a été, en partie, établie par M. Borel qui a montré que lorsque $G(z)$ est un produit de facteurs primaires, la double inégalité

$$e^{r^{\rho - \varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\rho + \varepsilon}}$$

entraîne, quel que soit ε, à partir d'une certaine valeur de i

$$i^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon} < r_i < i^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}.$$

On complète aisément cette proposition en s'appuyant sur l'inégalité (12).

Désignant par u la fonction inverse d'une certaine fonction $\phi(x)$, nous allons montrer que *l'égalité*

$$M(r) = e^{hu} \quad (h \text{ positif fini}) \tag{15}$$

supposée satisfaite à partir d'une certaine valeur de r entraîne à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i = h'\phi(i) \qquad (h' \text{ positif fini}).$$

Nous savons déjà que cette égalité est satisfaite pour des valeurs de i indéfiniment croissantes, et de plus que l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > h'\phi(i).$$

Il s'agit de remplacer cette inégalité par une égalité.

Supposons d'abord que la fonction $\phi(x)$ soit de la forme

$$\phi(x) = x^{\frac{1}{\rho}} (\log x)^{\frac{\sigma_1}{\rho}} \ldots (\log_k x)^{\frac{\sigma_k}{\rho}}$$

Si la proposition énoncée était inexacte, il faudrait admettre que, quelque grand que soit le nombre K, (comparable par exemple à $\log_k n_1$) on a, pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} = K\phi(n_1).$$

Le théorème du § 14 va nous conduire alors à une contradiction.

Faisons-y, en effet

$$r = K_1\phi(n_1) = \phi(n).$$

D'après la définition de ϕ, on aura lorsque n_1 sera assez grand l'inégalité

$$n_1 < (1 + \alpha) K_1^{-\rho} n,$$

où α est un nombre positif qui deviendra, avec $\frac{1}{n_1}$, inférieur à tout nombre donné.

Déterminons d'autre part le nombre n_2 par la condition

$$\phi(n_2) = K\phi(n_1)$$

d'où résulte l'inégalité

$$n_2 < (1 + \alpha_1) K^{\rho} n_1$$

(α_1 devenant, comme α, arbitrairement petit avec $\frac{1}{r}$).

Nous allons nous reporter à l'inégalité fondamentale du § 14, où nous remplacerons n par n_1. Elle devient

$$\log|G(z)| < 2r\sum_{1}^{n_1}\frac{1}{r_i} + \ldots + \frac{r^p}{p}\sum_{1}^{n_1}\frac{1}{r_i^p} + b_r^{p+1}\sum_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}}.$$

Lorsque $i < n_1$, on a $r_i > h'\psi(i)$.

Donc, si λ est un nombre inférieur à p, on a (§ 5)

$$r^\lambda\sum_{1}^{n_1}\frac{1}{r_i^\lambda} < c_\lambda r^\lambda \frac{n_1}{[\psi(n_1)]^\lambda} = c_\lambda K_1^\lambda n_1 \quad (c_\lambda \text{ constante positive finie}).$$

D'autre part

$$r^{p+1}\sum_{n_1+1}^{n_2}\frac{1}{r_i^{p+1}} < n_2\frac{r^{p+1}}{r_i^{p+1}} < (1+\alpha_1)K_1^{p+1}K^{\rho-p-1}n_1\,;$$

pour $i > n_2$, nous nous servons de nouveau de l'inégalité $r_i > h'\psi(i)$, et nous avons

$$r^{p+1}\sum_{n_2+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}} < c_{p+1}r^{p+1}\frac{n_2}{[\psi(n_2)]^{p+1}} < c_{p+1}(1+\alpha_1)K_1^{p+1}K^{\rho-p-1}n_1.$$

Posons alors

$$K_1 = K^{1-\beta},$$

β étant un nombre positif inférieur à 1. On aura

$$K_1^\lambda n_1 < K^{(1-\beta)(\lambda-\rho)}(1+\alpha)n, \qquad K_1^{p+1}K^{\rho-p-1}n_1 < K^{-\beta(p+1-\rho)}(1+\alpha)n$$

et par suite, si l'on se reporte à l'inégalité qui limite $\log|G(z)|$

$$M(r) < eK^{-\varepsilon}n,$$

ε étant un nombre positif fini.

Puisque K est arbitrairement grand, cette dernière inégalité est en contradiction avec l'inégalité (15). L'hypothèse faite sur r_{n_1} est donc inadmissible, ce qu'il fallait démontrer.

On parviendrait au même résultat en faisant sur la fonction $\psi(x)$ des hypothèses plus générales. Ainsi, l'on démontre[1] sans peine que le théorème précédent subsiste intégralement si l'on suppose simplement que *la fonction $\psi(x)$ satisfait aux conditions du § 9, et que l'on a de plus*

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} < \beta\left(p + 1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

μ et ν étant les deux nombres (compris entre le genre p et l'ordre ρ) que nous avons définis au § 9, et β *un nombre positif inférieur à* 1.

21. J'ai supposé dans ce qui précède que K était un nombre pouvant dépasser tout nombre donné. Mais rien n'empeche, dans le raisonnement précédent, de faire de K une fonction croissante de r.

Soit par exemple

$$K = (\log_k r)^{\varepsilon},$$

ε étant un nombre arbitrairement petit. La démonstration précédente établit que s'il existait des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes, telles que l'on ait

$$r_{n_1} = (\log_k r)^{\varepsilon}\psi(n_1)$$

on aurait, pour des valeurs de r indéfiniment croissantes

$$M(r) < e^{(\log_k r)^{-\varepsilon c} n}.$$

D'où le théorème suivant:

Si, quelque petit que soit le nombre ε_1, la double inégalité

$$e^{hn} > M(r) > e^{(\log_k r)^{-\varepsilon_1} n}$$

[1] Si A est un nombre positif plus grand que 1, on a

$$A^{\nu} < \frac{\psi(Ax)}{\psi(x)} < A^{\mu}.$$

L'égalité $K_1\psi(n_1) = \psi(n)$ entraine donc $n_1 < K_1^{\frac{1}{\mu}} n$, et l'égalité $\psi(n_2) = K\psi(n_1)$ suppose $n_2 < K^{\frac{1}{\nu}} n_1$.

Tous les calculs faits plus haut subsistent alors, ρ étant remplacé par l'un des deux nombres $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$.

ne cesse pas d'être vérifiée, à partir d'une certaine valeur de r, il en sera de même, de la double inégalité

$$h'\psi(i) < r_i < (\log_k r_i)^{\varepsilon}\psi(i)$$

à partir d'une certaine valeur de r_i (quelque petit que soit ε).

Ce théorème, joint à celui du § 17, nous permet en particulier d'énoncer la réciproque de la proposition démontrée à la fin du § 19 relativement aux fonctions à croissance régulière.

Un cas particulièrement intéressant où le théorème trouve à s'appliquer sous sa première forme est celui où la fonction étudiée est à croissance parfaitement régulière, suivant le sens que j'ai donné à cette expression au § 19. On a alors le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que le module maximum $M(r)$ soit, quel que soit r, égal à l'exponentielle e^{hr^ρ} où h est un nombre fini, est que le rapport $\frac{r_n^\rho}{n}$ soit fini, quel que soit n.

Nous constatons ainsi que, au point de vue qui nous occupe, les inégalités (12) et (13) donnent des renseignements suffisamment précis sur la croissance de $M(r)$, lorsque l'ordre ρ du produit $G(z)$ n'est pas entier. Elles conduisent à cette conclusion [1] que l'ordre de grandeur de $M(r)$ est déterminé par le nombre des zéros contenus dans le cercle de rayon r ayant pour centre l'origine. Ainsi se poursuit l'analogie déjà observée entre une fonction entière et un polynôme.

Je compléterai les résultats précédents dans la seconde partie de ce travail en étudiant les dérivées successives de $G(z)$. Mais je dois auparavant m'occuper du cas particulier que j'ai laissé de côté: celui où l'ordre ρ de $G(z)$ est entier. Je serai ainsi amené à aborder le problème de la détermination du genre d'une fonction entière. Je me proposerai, en particulier, de déterminer dans les cas restés douteux, le genre de la somme de deux fonctions entières.

[1] La présence dans la fonction entière étudiée d'un facteur exponentiel $e^{H(z)}$ ne modifierait rien aux résultats obtenus, puisque ρ est supposé non entier.

Les fonctions d'ordre entier et la détermination du genre.

22. Supposons que l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ soit entier et *égal à* p. La proposition du § 17 subsistera sans modifications et l'on aura encore

$$M(r) > e^{hn} \qquad (h \text{ fini}).$$

Au contraire, si nous cherchons à assigner à $M(r)$ une limite supérieure, nous rencontrerons des difficultés qui ne se présentaient pas lorsque ρ n'était pas entier.

Considérons de nouveau l'inégalité (11) obtenue au § 14. Nous voyons que si $\rho = p$, toutes les intégrales du second membre de cette inégalité auront la même limite que dans le cas général, excepté l'intégrale

$$\int_m^n \frac{dx}{[\psi(x)]^p}.$$

Nous pourrons donc, en tout cas, poser

$$|G(z)| < e^{hn + \frac{r^p}{p}\sum_1^n \frac{1}{r_i^p}},$$

h étant fini et n étant le nombre défini au § 14.

Pour obtenir une limite supérieure de la somme $\sum_1^n \frac{1}{r_i^p}$, nous allons être amenés à faire sur la fonction $\psi(x)$ une hypothèse supplémentaire; nous la supposerons choisie de telle sorte qu'il existe un nombre ρ_1 supérieur à p tel que le rapport

$$\frac{x^{\frac{1}{p}}(\log x)^{\frac{1}{\rho_1}}}{\psi}$$

soit croissant à partir d'une certaine valeur de x.

Nous aurons alors, en appliquant les résultats du § 5

$$r^p \int_m^n \frac{dx}{\psi^p} < cn\log n \qquad (c \text{ positif fini}).$$

D'où

(19) $$\left|G(z)\right| < e^{hr^{\rho}+h_1 n \log n} \qquad (h,\, h_1 \text{ positifs finis}).$$

Pour comparer les nombres n et n', nous suivons la discussion du § 12 :

1°. *S'il existe un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport*

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} (\log x)^{\sigma}}{\omega}$$

admette des valeurs indéfiniment croissantes, on est assuré que les nombres n et n' coïncident pour des valeurs de r indéfiniment croissantes.

2°. S'il n'existe pas de tel nombre σ, soit ε un nombre arbitrairement petit : nous sommes certains que le rapport $\frac{n}{n'}$ sera inférieur à $(\log n)^{\varepsilon}$, pour des valeurs de r indéfiniment croissantes; cela résulte immédiatement du fait que le rapport des fonctions inverses $\frac{\omega}{\psi}$ est lui-même inférieur à $(\log x)^{\varepsilon}$ pour des valeurs de x indéfiniment croissantes (§ 12), puisque $\psi(x)$ reste compris entre deux puissances positives de x.

On peut, lorsque l'on y a intérêt, pousser plus loin l'approximation en faisant sur la fonction $\psi(x)$ une hypothèse plus précise. On pourra alors remplacer l'inégalité (19) par une égalité de la forme

(20) $$\left|G(z)\right| < e^{hr^{\rho}+h_1 n \log n \ldots \log_k n},$$

h et h_1 étant des constantes positives finies et k un entier quelconque. Le rapport $\frac{n}{n'}$ peut être alors, dans le cas le plus général, inférieur à $(\log_k n)^{\varepsilon}$.

23. Si ρ, au lieu d'être égal à p, était égal à $p+1$, on obtiendrait des résultats analogues. Ce serait alors l'intégrale

$$\int_{a}^{x} \frac{dx}{\psi^{p+1}}$$

qui fournirait une limite exceptionnellement élevée.

Supposons la fonction ψ choisie de telle sorte qu'il existe un nombre ρ_1 inférieur à $p+1$ tel que le rapport

$$\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}}(\log x)^{\frac{1}{\rho_1}}}$$

soit croissant à partir d'une certaine valeur de x. On aura dans ce cas, l'inégalité (19). Il pourra être avantageux dans certains cas, de faire sur $\psi(x)$ une hypothèse plus précise. On pourra remplacer alors l'inégalité (19) par l'inégalité (20).

On comparera n et n' à l'aide des résultats du § 12. S'il existe un entier k et un nombre σ supérieur à $\frac{1}{p+1}$ tel que le rapport

$$\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}}\ldots(\log_k x)^{\sigma}}$$

surpasse tout nombre donné lorsque r est assez grand, on pourra faire coïncider n et n' pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

Lorsqu'il n'existe pas de tel entier k, nous ne savons pas quelle précision nous pouvons attendre de la méthode de sommation exposée au § 7. Dans ce cas, nous emploierons pour obtenir une limite supérieure de $|G(z)|$ le théorème[1] démontré en 1883 par M. Poincaré:

Quelque petit que soit le nombre α, on a à partir d'une certaine valeur de r

$$|G(z)| < e^{\alpha r^{p+1}}.$$

Dans le cas où nous nous plaçons maintenant, le rapport $\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}}\ldots(\log_k x)^{\frac{1+\varepsilon}{p+1}}}$ est, pour des valeurs de x indéfiniment croissantes, inférieur à un nombre fini (quelque petit que soit ε). On a donc, pour des valeurs de n' indéfiniment croissantes

$$r^{p+1} < n'(\log n')\ldots(\log_k n')^{1+\varepsilon}.$$

Il en résulte que si l'on adopte pour $\log|G(z)|$, la limite supérieure αr^{p+1}, le rapport de cette limite à $n'(\log n')\ldots(\log_k n')$ sera inférieur à $(\log_k n')^{\varepsilon}$ pour des valeurs de r indéfiniment croissantes.

[1] Bulletin de la Société Mathématique, 1883.

24. On voit combien le résultat est moins précis que celui auquel nous étions parvenus en supposant p non entier. Il nous est impossible maintenant de faire coïncider la limite supérieure et la limite inférieure du module maximum $M(r)$. On pourrait supposer que ces limites sont mauvaises. Il n'en est rien puisque nous connaissons des fonctions dont le module maximum reste très voisin soit de l'une soit de l'autre. Ainsi, pour reprendre l'exemple que je signalais en commençant, le module maximum de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est, pour toute valeur de e, égal à $e^{hn\log n}$. Au contraire celui de $\sin\frac{\pi z}{2}$ est comparable à e^{hn}.

Pour les fonctions $\sin\frac{\pi z}{2}$ et $\frac{1}{\Gamma(z)}$ l'ordre est égal au genre (ici à l'unité). On peut très facilement former des fonctions de genre p et d'ordre $p+1$ qui présentent les mêmes particularités. Par exemple, si p est pair et si les zéros sont deux à deux égaux et de signes contraires $G(z)$ est une fonction de z^2 dont l'ordre n'est pas entier: on lui appliquera la proposition du § 14 et l'on pourra conserver, pour le module $|G(z)|$ la limite supérieure (12). Au contraire, si les zéros sont tous réels et positifs, l'intégrale $\int_a^r \frac{dx}{\psi^{p+1}}$ se rapproche beaucoup de la limite que nous lui avons assignée. Considérons par exemple la fonction de genre zéro qui a pour zéros les points réels $i(\log i)^2$, i prenant toutes les valeurs entières positives. Désignons par n le nombre des zéros dont le module est inférieur à $2r$. On aura pour z réel et négatif

$$\prod_1^n\left(1-\frac{z}{a_i}\right) > 1, \qquad \prod_{n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right) > e^{hr\int_n^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^2}} > e^{h_1 n\log n},$$

h et h_1 étant des constantes finies. On sait en effet que si $\left|\frac{z}{a_i}\right|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, on peut poser[1]

$$\left(1+\left|\frac{z}{a_i}\right|\right) = e^{g\left|\frac{z}{a_i}\right|},$$

g étant un nombre positif fini.

[1] On a, si $0 < a < \frac{1}{2}$, $\log(1+a) > a - \frac{a^2}{2}\frac{1}{1-a} > \frac{a}{2}$.

Nous reconnaissons ainsi que, lorsque l'ordre ρ est entier, les arguments des zéros peuvent avoir une influence appréciable sur la croissance de $G(z)$. La considération de ces arguments peut seule nous permettre de choisir entre la limite (12) et la limite (20). Il est vrai que la limite (20) donne déjà sur la croissance de $M(r)$ un renseignement assez précis; mais elle ne permet pas de répondre à une question que l'on semblait en droit de se poser: nous ne savons pas, jusqu'ici, si le mode de croissance d'une fonction entière suffit toujours à caractériser son genre.

Il ne faudrait pas croire cependant que l'intervention des arguments des zéros doive nous priver de toute proposition générale à l'endroit des fonctions d'ordre entier. Mais, pour approfondir cette question, il nous faut d'abord étudier un problème qui fut posé pour la première fois par M. Hadamard: ce problème a rapport au module minimum du produit de facteurs primaires $G(z)$ sur une infinité de cercles, de rayon indéfiniment croissants, ayant leur centre à l'origine.

25. M. Hadamard a comparé le module minimum de $G(z)$ à une exponentielle de la forme $e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$. Je me propose de préciser son théorème comme je l'ai fait plus haut pour d'autres propositions du même genre.

Considérons de nouveau la fonction $\psi(x)$ qui nous a déjà servi au § 14 et déterminons le nombre n par l'égalité

$$\eta r = \psi(n)$$

η étant un nombre fini supérieure à 2. On peut déterminer un nombre positif b tel que l'on ait pour $i > n$

$$\left|\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\dots+\frac{z^p}{p a_i^p}}\right| > e^{-b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{p+1}}.$$

b étant un nombre fini. On en déduit, en raisonnant comme au § 14,

$$(21)\qquad \left| e^{z\sum\limits_1^n \frac{1}{a_i}+\dots+\frac{z^p}{p}\sum\limits_1^n \frac{1}{a_i^p}} \prod_{n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\dots+\frac{z^p}{p a_i^p}} \right| > e^{-gr^p - r\int_m^n \frac{dx}{\psi(x)} \dots - br^{p+1}\int_n^\infty \frac{dx}{[\psi(x)]^{p+1}}},$$

g et m étant des nombres finis (m entier).

Si ρ n'est pas entier, le second membre de cette inégalité sera supérieur à

$$e^{hn},$$

h étant un nombre fini.

Si ρ était entier nous choisirions la fonction $\psi(x)$ comme au § 18 et le second membre de (21) serait alors en tout cas supérieur à une expression de la forme

$$e^{-hr^{\rho}-h_1 n \log n \ldots \log_k n}$$

k étant un nombre entier, h et h_1 des constantes positives finies.

26. Il nous faut maintenant chercher une limite inférieure du produit

$$\prod_1^n \left(1-\frac{z}{a_i}\right).$$

Ce produit est, en module, supérieur à

$$\prod_1^n \left|1-\frac{r}{r_i}\right| \qquad (r_i = |a_i|).$$

Considérons d'abord les facteurs relatifs aux zéros pour lesquels on a

$$\text{soit } \frac{r}{r_i} > 1+\alpha, \quad \text{soit } \frac{r}{r_i} < 1-\alpha \qquad (\alpha \text{ positif}).$$

Leur produit est évidemment supérieur à $e^{n \log \alpha}$. Le produit des facteurs restants est de la forme

$$(22) \qquad \prod_{m}^{n'} \left|1-\frac{r}{r_i}\right| \qquad (r_m < r < r_{n'}).$$

Pour étudier ce dernier produit, considérons sur une demi-droite issue de l'origine un segment égal à ηr, et marquons sur ce segment les points $r_1, r_2, \ldots, r_{n'}$. Décomposons notre segment en petits segments égaux en nombre supérieur à $4n'$, et soient $s_1, s_2, \ldots, s_{4n'}, \ldots$ les segments ainsi définis. Je vais marquer d'un signe convenu certains de ces segments en procédant de la manière suivante. Soit s_i un segment qui contient q points r_i: je marque s_i, puis les q segments qui suivent s_i vers la droite et les q segments qui le précèdent à gauche. Si l'un des segments ainsi marqués,

s_j, contient à son tour q' points r_i, je marquerai encore les q' segments qui suivent s_{i+q} et les q' segments qui précèdent s_{i-q}, et ainsi de suite.

Lorsque l'opération est achevée, le nombre des segments marqués est $3n'$ au plus. Il existe donc, en vertu des hypothèses faites, au moins n' segments non marqués. En particulier, il existe des segments non marqués dont les points sont à une distance de A et de B proportionnelle à r. Ainsi lorsque r' appartient à l'un de ces segments, on a bien

$$\text{pour } i < m \qquad \frac{r'}{r_i} > 1 + \alpha$$

$$\text{et pour } i > n' \qquad \frac{r'}{r_i} < 1 - \alpha' \qquad (\alpha \text{ et } \alpha' \text{ positif fini}).$$

Soit maintenant r_k le premier zéro situé à gauche du point r'. On aura

$$r_{k+1} - r' > \eta r \frac{1}{4n'}, \ \ldots r_{k+i} - r' > \eta r \frac{i}{4n'} \ldots,$$

$$r' - r_k > \eta r \frac{1}{4n'}, \ \ldots r' - r_{k-i+1} > \eta r \frac{i}{4n'} \ldots.$$

27. Il va être facile, maintenant, d'obtenir pour $r = r'$ une limite inférieure du produit (22). Soit en effet

$$n' = k + \nu.$$

On aura, évidemment

$$\prod_{i=1}^{i=\nu} \left(\frac{r_{k+i} - r'}{r'}\right) > e^{-g\nu - \nu \log n' + \sum_{1}^{\nu-1} \log i},$$

g étant positif fini, ou

$$\prod_{i=1}^{i=\nu} \left(\frac{r_{k+i} - r'}{r'}\right) > e^{-g\nu - \nu \log n' + \int_1^{\nu} (\log x)\,dx} > e^{-g_1\nu - \nu(\log n' - \log \nu)}.$$

Or, puisque $\nu < n'$, on a

$$\nu \log \frac{n'}{\nu} < n',$$

par suite

$$\prod_{i=1} \left(\frac{r_{k+i} - r'}{r'}\right) > e^{[illegible]},$$

h étant un nombre positif. De même

$$\prod_{i=m}^{i=k}\left(1-\frac{r'}{r_i}\right) > e^{-gk - k\log n + \int_1^i (\log x)dx} > e^{-h_1 n}.$$

Finalement, on pourra poser

$$\prod_1^n\left(1-\frac{r'}{r_i}\right) > e^{-hn}$$

et h restera inférieur à un nombre fixe lorsque r augmentera indéfiniment.

Nous pourrons par suite énoncer le théorème suivant: *Si l'ordre ρ n'est pas entier, on a sur une infinité de cercles C de rayons indéfiniment croissants*[1]

(23) $$|G(z)| > e^{-hn},$$

n étant le nombre défini au § 21, et h restant inférieur à un nombre fixe.

[1] On pourrait déterminer avec plus de précision la situation des cercles C et se demander s'ils forment des couronnes de quelque épaisseur. Le raisonnement du § 26 prouverait que dans un cercle C de rayon r, les couronnes où l'inégalité (23) est satisfaite forment une portion finie de l'aire totale C. Mais il est facile d'aller beaucoup plus loin si l'on remplace h par une fonction croissante quelconque de n, par exemple par $\log n$. Considérons à part dans le produit (22) tous les facteurs pour lesquels la différence $r - r_i$ est, en module, supérieure à $\frac{r}{n}$. Le produit de ces facteurs est supérieur à

$$e^{-hn\log n}.$$

Les valeurs de r_i laissées de côté se trouvent toutes sur un segment $\overline{ss_1}$, proportionnel à $\frac{r}{n}$ qui sera infiniment petit par rapport à r, lorsque r augmentera indéfiniment. Le nombre ν des points r_i situés sur un tel segment sera donc infiniment petit par rapport à n, sauf peut-être pour un nombre négligeable de segments ss_1. Raisonnons alors sur le segment ss_1 comme au § 26, en remplaçant η par $\frac{\eta}{n}$. Nous le décomposerons en n parties et nous pouvons affirmer que le nombre des intervalles partiels dans lesquels on n'a pas

$$r_k - r' > \eta\frac{r}{n^2} \dots r_{k+i} - r' > \eta r\frac{i}{n^2}$$

est infiniment petit par rapport à ss_1 (puisque ce nombre est proportionnel à ν).

On en déduit que *dans le cercle C de rayon r, les couronnes où l'on n'a pas*

$$|G(z)| > e^{-hn\log n}$$

forment lorsque r augmente indéfiniment une aire infiniment petite par rapport à l'aire totale C.

Si ρ était entier, la limite inférieure de $|G(z)|$ serait, sur des cercles de rayons indéfiniments croissants, celle du second membre de (21).

Ce théorème fait pendant à celui du § 13. Nous pouvons en tirer le résultat suivant qui correspond au théorème de M. Poincaré:

Si $F(z)$ est une fonction entière quelconque de genre p il existe une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a

$$|F(z)| > e^{-\varepsilon r^{p+1}},$$

quelque petit que soit le nombre ε.

28. Le théorème précédent va nous permettre de compléter les résultats que nous avons obtenus sur la croissance des fonctions d'ordre entier.

La série $\sum \frac{1}{r_i^p}$ étant divergente, le nombre n' des zéros de module inférieur à r sera en général, pour une infinité de valeurs de r, supérieur à cr^p, c étant une constante finie. Le module maximum $M(r)$ sera alors, pour ces valeurs de r supérieur à

$$e^{hr^p} \qquad (h \text{ positif et fini}).$$

Cette propriété peut servir à caractériser les fonctions de genre égal ou supérieur à p. Nous savons, en effet, qu'elle ne peut pas appartenir à une fonction de genre $p - 1$.

Mais il est possible, lorsque $\rho = p$, que les nombres n' et n restent, à partir d'une certaine valeur de r, inférieurs à εr^p, quelque petit que soit ε. Il en sera ainsi, par exemple, pour la fonction de genre 1 qui admet pour zéros les points $\log 1$, $2\log 2$, $3\log 3$, ... (on fera dans ce cas $\psi(x) = x \log x$).

Considérons une telle fonction. Elle sera, dans le cas le plus général, de la forme

$$F(z) = e^{Az^p + H(z)} G(z),$$

$G(z)$ étant un produit de facteurs primaires et $H(z)$ un polynôme de degré $p - 1$; nous poserons

$$F(z) = e^{H(z) + Az^p + z^p \sum_1^n \frac{1}{p a_i^p}} G_1(z), \tag{24}$$

n étant toujours le nombre défini au § 14.

Soit $\sum_1^n \frac{1}{pa_i^p} = B$. En général le nombre $A + B$ sera supérieur en module à un nombre positif fini h, pour des valeurs de n indéfiniment croissantes. Soit r la valeur de $|z|$ correspondant à l'une de ces valeurs de n. A l'intérieur de la couronne limitée par les cercles de rayons r et ηr (η nombre positif fini) ayant leur centre à l'origine, on aura dans certains angles

$$\left| e^{z^p\left(A + \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p}\right)} \right| > e^{hr^p}.$$

Appliquons, d'autre part, à la fonction $G_1(z)e^{H(z)}$ le théorème du § 27; nous pouvons affirmer, en conservant les notations de ce paragraphe, que l'on a sur une infinité de cercles compris dans la couronne

$$|G_1(z)e^{H(z)}| > e^{-h_1 n} \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

Donc, puisque nous supposons ici que

$$n < \varepsilon r^p,$$

on aura en certains points de ces cercles

$$|F(z)| > e^{hr^p}.$$

Cette inégalité est satisfaite pour des valeurs de r indéfiniments croissants. C'est bien là encore une propriété caractéristique des fonctions de genre p.

29. Mais le raisonnement précédent serait en défaut si la somme $A + \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p}$ était infiniment petite. Or cette circonstance peut se présenter. En disant que $F(z)$ est de genre p, nous avons supposé, sans doute, que la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ n'est pas absolument convergente: mais il peut arriver que cette série soit semi-convergente (les a_i étant rangés par ordre de modules croissants) et ait pour somme $-A$. Il se peut alors que l'on ait à partir d'une certaine valeur de n

$$A + \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p} < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε.

D'ailleurs, en vertu de l'inégalité (12), on aura toujours, à partir d'une certaine valeur de r

$$|G_1(z)e^{H(z)}| < e^{hn} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

Si donc, comme nous continuons à le supposer, $F(z)$ est tel que l'on puisse choisir la fonction ψ de façon que

$$n < \varepsilon r^p$$

(à partir d'une certaine valeur de r, quelque petit que soit ε) l'inégalité $A + \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p} < \varepsilon$ entraînera, (en vertu de (24)) à partir d'une certaine valeur de r

$$(25) \qquad |F(z)| < e^{\varepsilon r^p},$$

où ε est arbitrairement petit.

Dans ce cas exceptionnel *le module maximum de $F(z)$ perd tous les caractères qui distinguaient cette fonction de genre p des fonctions de genre inférieur.*

La fonction $F(z)$ peut croître moins vite que certaines fonctions de genre $p-1$. Supposons par exemple qu'elle soit un produit de facteurs primaires admettant pour zéros les points réels

$$a_i = \psi(i) = \pm\, i \log i \,.\, \log_2 i$$

(i prenant toutes les valeurs entières positives) $F(z)$ satisfera, dans ces conditions, à l'inégalité (12) du § 13 et l'on aura à partir d'une certaine valeur de r

$$|F(z)| < e^{hr(\log r)^{-1}(\log_2 r)^{-1}} \qquad (h \text{ fini}).$$

Or nous avons vu au § 24 que la fonction de genre zéro qui admet pour zéros les points $i(\log i)^2$ (i prenant toutes les valeurs entières positives) a son module maximum comparable à

$$e^{hn \log n},$$

n désignant le nombre des zéros de module inférieur à $2r$, c'est-à-dire à

Cette fonction de genre zéro croît donc plus vite que la fonction de genre un $F(z)$. Le cas exceptionnel qui vient d'être signalé présente par suite, au point de vue de la recherche du genre, des difficultés spéciales, et son étude va nous conduire à des résultats inattendus.

30. M. HADAMARD a, le premier, déterminé le genre d'une somme de deux fonctions entières, lorsque ces fonctions ne sont pas d'ordre entier. Il a démontré que, dans ce cas, *la somme de deux fonctions de genre* p *est, au plus, de genre* p. Cette proposition n'a pas pu, jusqu'ici, être étendue aux fonctions d'ordre entier. Cependant l'avis commun des auteurs qui ont écrit sur ce sujet, était que, suivant toute vraisemblance, elle devait subsister pour ces fonctions. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi en général, mais que la proposition peut cependant être en défaut dans certains cas exceptionnels.

Soit $f_1(z)$ une fonction de genre p à laquelle nous ajoutons une fonction $f_2(z)$ de genre inférieur à p. Si $f_1(z)$ ne présente pas les anomalies signalées au § 29, on a sur une infinité de cercles

$$|f_1(z)| > e^{hr^p}, \qquad |f_2(z)| < e^{\varepsilon r^p},$$

h étant fini et ε arbitrairement petit, par suite

$$|f_1(z) + f_2(z)| > e^{hr^p},$$

ce qui prouve que la somme $f_1(z) + f_2(z)$ est de genre p.

$f_1(z)$ *ne peut donc pas être la somme de deux fonctions de genre inférieur à* p. Ce résultat équivaut à celui qu'a obtenu M. HADAMARD dans le cas des fonctions d'ordre non entier.

Mais les choses ne se passeront plus ainsi si $f_1(z)$ satisfait à l'inégalité (25). On aura, dans ce cas, à partir d'une certaine valeur de r

$$|f_1(z) + f_2(z)| < e^{\varepsilon r^p}, \tag{26}$$

ε étant arbitrairement petit, ce qui ne permet pas d'affirmer que la somme $f_1 + f_2$ est de genre p. Supposons que cette somme soit la fonction $F(z)$ du § 28, et appelons a_i ses zéros. L'inégalité (26) prouve que la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ est semi-convergente et a pour somme $-A$. Mais elle ne prouve

pas que la série des modules $\sum \frac{1}{|a_i|^p}$ soit divergente. Or de ce que cette condition est satisfaite pour $f_1(z)$ il ne résulte pas qu'elle le soit pour $F(z)$.

En d'autres termes, si l'on ajoute, par exemple, à la fonction $F(z)$ définie au § 19 une fonction du genre zéro croissant plus vite que $F(z)$, rien ne paraît s'opposer à ce que la somme soit elle-même de genre zéro.

Il existe ainsi un cas exceptionnel où la somme de deux fonctions de genre p paraît se comporter comme une fonction de genre $p+1$. Je vais montrer par un exemple que cette circonstance se présente en effet.

31. Soit $f_1(z)$ un produit de facteurs primaires de genre zéro, ayant tous ses zéros a_i réels et positifs. On sait que $|f_1(z)|$ prend la même valeur lorsque l'on donne à la variable z deux valeurs imaginaires conjuguées. Cherchons comment se comporte $f_1(z)$ lorsque z est au-dessus de l'axe des quantités réelles, en supposant que a_i satisfasse, à partir d'une certaine valeur de i, à la double inégalité

$$i(\log i)^{1+\alpha-\gamma} < a_i \leq i(\log i)^{1+\alpha},$$

α étant un nombre positif *plus petit que* un et γ arbitrairement petit. Nous supposerons par exemple que l'on ait

$$4\gamma < 1-\alpha.$$

Appelons $-\zeta$ la partie réelle de z et supposons-la d'abord négative. Déterminons ensuite le nombre n par l'égalité

$$n(\log n)^{1+\alpha} = \eta r, \tag{27}$$

η étant un nombre *plus grand que* 2. Nous avons, lorsque $\zeta > 0$

$$\left|\prod_1^n\left(1-\frac{z}{a_i}\right)\right| > 1 \quad \text{et} \quad \left|\prod_{n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)\right| > e^{k\zeta\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_i}}$$

(k étant un nombre positif), car on a $|z-a_i| > \zeta + a_i$. Or

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_i} > \int_n^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{1+\alpha}} = \frac{n\log n}{\alpha n(\log n)^{1+\alpha}}.$$

Posons $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$. On a $\zeta = -r\cos\theta$. Il en résulte que

$$\zeta \sum_{m'}^{r} \frac{1}{a_i} > k_1 n \log n \,|\cos\theta| \qquad (k_1 \text{ fini})$$

et l'on a

(28) $$|f_1(z)| > e^{hn\log n|\cos\theta|} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

Soit alors β un nombre arbitrairement petit supérieur à γ. Tant que l'on a

$$-\cos\theta > \frac{1}{(\log r)^{1-\beta}}$$

on a, en vertu de (27),

(29) $$|f_1(z)| > e^{hn(\log n)^\beta} > e^{h_1 r(\log r)^{-1-\alpha+\beta}}.$$

Supposons maintenant que la partie réelle $-\zeta$ de z soit positive. Posant encore $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$, montrons que tant que $\cos\theta$ satisfera à l'inégalité

$$\cos\theta > \frac{1}{(\log r)^{1-\beta}}$$

l'on aura

(30) $$|f_1(z)| < e^{-h'n(\log n)^\beta} < e^{-h'_1 r(\log r)^{-1-\alpha+\beta}},$$

h' et h'_1 étant des nombres positifs finis.

Pour établir cette inégalité, il suffit de remarquer que l'ordre de la fonction de z^2 $f_1(z)f_1(-z)$ n'étant pas entier, on peut appliquer à cette fonction le théorème du § 14. On a donc

(31) $$|f_1(z)f_1(-z)| < e^{h_2 r(\log r)^{-1-\alpha+\gamma}} \qquad (h_2 \text{ positif fini}).$$

Or puisque $\gamma < \beta$, cette inégalité ne peut être compatible avec l'inégalité (29) que si l'on a au point $-z$ l'inégalité (30).

32. Désignons maintenant par $f_2(z)$ un produit de facteurs primaires ayant tous ses zéros b_i réels et négatifs, et supposons que l'on ait

$$i(\log i)^{1+\alpha'-\gamma'} < -b_i \leq i(\log i)^{1+\alpha'}$$

α' étant un nombre positif *quelconque* et γ' un nombre arbitrairement petit

inférieur à β. En raisonnant comme au paragraphe précédent, on constate que dans la région du plan où l'on a l'inégalité (29), on aura

$$(32) \qquad |f_2(z)| < e^{-gr(\log r)^{-1-\alpha'+\beta}} \qquad (g \text{ positif fini}).$$

De même on aura, en même temps que l'inégalité (28), l'inégalité

$$(33) \qquad |f_2(z)| > e^{gr(\log r)^{-\alpha'}|\cos\theta|};$$

on aura, par suite, dans les régions du plan, où l'inégalité (30) est vérifiée;

$$(34) \qquad |f_2(z)| > e^{gr(\log r)^{-1-\alpha'+\beta}} \qquad (g \text{ positif fini}).$$

Considérons alors la somme

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Elle ne peut s'annuler pour $|z| = r$ qu'à l'intérieur d'un angle dont la bissectrice est l'axe des quantités imaginaires et dont la moitié a un sinus inférieur à $\frac{1}{(\log r)^{1-\beta}}$. D'ailleurs les zéros de $F(z)$ ont deux à deux des valeurs imaginaires conjuguées. Désignons ces zéros par $c_1, c_2, \ldots$. Je vais montrer que $F(z)$ est *une fonction du genre un.*

Séparant dans c_i la partie réelle de la partie imaginaire, posons

$$c_i = \gamma_i + \sqrt{-1}\,\delta_i.$$

Si nous supposons que $F(z)$ est de genre zéro, nous aurons

$$F(z) = \prod\left[1 - z\frac{2\gamma_i}{\gamma_i^2+\delta_i^2} + \frac{z^2}{\gamma_i^2+\delta_i^2}\right].$$

Appelant plus particulièrement α le plus petit des deux nombres α et α', nous obtiendrons le module maximum $M(r)$ de $F(z)$ en faisant $z = -r$. $f_1(z)$ satisfait alors à l'inégalité (28), où $\cos\theta = 1$, et $f_2(z)$ vérifie l'inégalité (32). On a, par suite

$$F(-r) > e^{hr(\log r)^{-\alpha}} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

D'ailleurs le théorème général du § 22, appliqué à $f_1(z)$ nous donne

$$F(-r) < e^{h'r(\log r)^{-\alpha+\gamma}} \qquad (h' \text{ positif fini})$$

d'où il résulte (§ 17) que l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > h'_1 i (\log i)^{\alpha-\gamma} \qquad (h'_1 \text{ positif fini}).$$

Cela posé, supposons que $F(z)$ soit de genre zéro, on aura certainement pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} - K\psi(n_1) \quad \text{avec} \quad \psi(i) = i(\log i)^{\alpha-\gamma} \quad \text{et} \quad K = (\log n_1)^{\gamma_1},$$

γ_1 étant égal ou inférieur à $1-\alpha+\gamma$, ce qui permet de prendre, par exemple $\gamma_1 > 5\gamma$ (puisque nous avons supposé que $4\gamma < 1-\alpha$).

Reprenons les notations du § 20, et faisons

$$r = K^{1-b}\psi(n_1) = \psi(n), \qquad \left(b < \frac{1}{2}\right).$$

Nous obtiendrons en nous reportant aux calculs du § 20 (où nous ferons $\lambda = \frac{1}{2}$, $\rho = 1$):

$$\left|\prod_1^{n_1}\left(1 - \frac{z}{c_i}\right)\right| < e^{2\sqrt{r}\sum_1^{n_1}\frac{1}{\sqrt{r_i}}} < e^{hK^{-c}n} \qquad \left(c = \frac{1-b}{2} > \frac{1}{4},\ h \text{ positif fini}\right).$$

D'autre part, puisque

$$|\gamma_i| < \frac{r_i}{(\log r)^{1-\beta}},$$

nous aurons

$$\left|\prod_{n_1+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{c_i}\right)\right| < e^{2h_1 r(\log r)^{-1+\beta}\sum_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i} + h_1 r^2 \sum_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^2}} \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

Pour évaluer la somme $r^2 \sum_{n_1+1}^{\prime} \frac{1}{r_i^2}$, nous procéderons comme nous avons fait au § 20 pour la somme $r^{p+1}\sum_{n_1+1}^{\prime}\frac{1}{r_i^{p+1}}$, (en faisant $p+1=2$, $\rho = 1$). Nous obtenons

$$r^2 \sum_{n_1+1}^{\prime} \frac{1}{r_i^2} < K^{-c_1} n \qquad (c_1 = b > c).$$

D'autre part, puisque la série $\sum \frac{1}{r_i}$ est supposée convergente, nous avons

$$r(\log r)^{-1+\beta} \sum_{n_1+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} < kr(\log r)^{-1+\beta} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Nous aboutissons donc finalement à cette conclusion que $M(r)$ est inférieur à la plus grande des deux expressions

$$e^{r(\log r)^{-\alpha-\gamma_1 c+\gamma}} \quad (c \text{ positif fini}), \qquad e^{kr(\log r)^{-1+\beta}}.$$

D'ailleurs, puisque l'on a $c > \frac{1}{4}$ et $\gamma_1 > 5\gamma$, on a nécessairement $\gamma - \gamma_1 c < 0$ et, d'autre part on aura, lorsque $\frac{1}{r}$ et par suite β seront assez petits

$$\alpha < 1 - \beta.$$

Les inégalités précédentes se trouvent donc en contradiction avec les résultats obtenus plus haut sur le module maximum de $F(z)$.

On en conclut que l'hypothèse d'après laquelle $F(z)$ serait de genre zéro n'est pas admissible.

Nous aurions pu parvenir au même résultat en procédant un peu différemment. Le produit $F(z)F(-z)$, considéré comme fonction de z^2 est une fonction de genre zéro et d'ordre non entier. Or il résulte des inégalités obtenues aux §§ 31 et 32 que cette fonction a même module maximum (pour $|z| = r$) que le produit $F(z)$. On peut donc lui appliquer le théorème du § 21, qui conduit au résultat cherché. La méthode suivie plus haut semble cependant préférable, parce qu'elle manifeste mieux l'influence exercée par les arguments des zéros de $F(z)$ sur la croissance de son module.

Nous pouvons énoncer maintenant la proposition suivante:

Soit $f_1(z)$ une fonction de genre zéro ayant tous ses zéros réels et positifs et tels que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$i(\log i)^{1+\alpha-\gamma} < a_i \leq i(\log i)^{1+\alpha},$$

α étant un nombre positif plus petit que un et γ arbitrairement petit. Soit

d'autre part $f_1(z)$ une fonction dont tous les zéros sont réels et négatifs et tels que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$i(\log i)^{1+\alpha'-\gamma'} < -b_i \leq i(\log i)^{1+\alpha'},$$

α' étant un nombre positif quelconque (γ' arbitrairement petit). La somme $f_1(z) + f_2(z)$ est une fonction de genre un.

Un cas particulier intéressant est celui où $f_2(z) = f_1(-z)$. On voit que si $f_1(z)$ satisfait aux conditions indiquées plus haut, la somme $f_1(z) + f_1(-z)$ sera une fonction de genre un. M. E. LINDELÖF [1] vient de faire connaître un résultat équivalent qu'il a obtenu de son côté et qui rentre dans ce cas particulier. Posant

$$f(z) = \prod\left[1 + \frac{z}{n(\log n)^{\alpha}}\right] \quad \text{avec} \quad 1 < \alpha < 2$$

M. LINDELÖF établit directement que la somme $f(z) + f(-z)$ est de genre un.

Faisons une dernière remarque au sujet de la proposition qui vient d'être établie. Si elle s'applique à deux fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, elle s'appliquera également à la somme

$$f_1(z) + cf_2(z)$$

c étant une constante quelconque.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour rendre applicables à l'étude des équations différentielles les résultats obtenus sur la croissance d'une fonction entière, il nous faut considérer maintenant la dérivée de la fonction et déterminer, en particulier, l'ordre de grandeur de cette dérivée par rapport à la fonction elle-même.

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 30 décembre 1901.

La dérivée logarithmique d'une fonction entière.

1. Les nouveaux résultats que j'ai en vue ne peuvent évidemment pas être des conséquences des inégalités obtenues plus haut: car on sait qu'en général on n'a pas le droit de dériver une égalité asymptotique. C'est en faisant de nouveau intervenir ici le fait que la fonction considérée, $F(z)$, est entière que je pourrai obtenir sur $F'(z)$ des renseignements beaucoup plus précis qu'on ne l'avait fait encore.[1]

L'étude de la dérivée logarithmique d'une fonction entière a déjà été tentée par Laguerre et avec plus de détails par M. Vivanti.[2] Mais aucune proposition complète n'a encore été démontrée à son sujet et, d'ailleurs, quelques-uns des résultats énoncés par M. Vivanti demandent à être précisés. C'est pourquoi certaines propositions tirées par lui de ses théorèmes ne se trouvent pas être entièrement exactes, entre autres celle-ci que *la somme de deux fonations entières de genre p est toujours de genre p au plus.* Nous avons vu plus haut que cette proposition comporte un cas d'exception.

[1] Dans son mémoire sur *les zéros des fonctions entières*, M. Borel a donné une limite supérieure du module de $F'(z)$. Posant

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$M(r) = |a_0| + |a_1| r + \dots$$

$$M'(r) = |a_1| + 2|a_2| r + \dots$$

M. Borel a montré que l'on a, quel que soit ε, à partir d'une certaine valeur de r

$$M'(r) < [M(r)]^{1+\varepsilon}.$$

[2] Giornale di Battaglini, 1884 et 1885, $F(z)$ étant une fonction de genre p, M. Vivanti dit que *dans certains angles le rapport* $\dfrac{|F'(z)|}{r^p |F(z)|}$ *tend vers zéro, tandis que le rapport* $\dfrac{|F'(z)|}{r^{p-1} |F(z)|}$ *augmente indéfiniment.* Mais pour que la première partie de cette proposition fût vraie il serait nécessaire de faire des hypothèses très particulières sur les arguments des zéros. Quant à la seconde partie, elle n'est en tout cas pas exacte, comme nous le constaterons un peu plus loin.

2. Soit $G(z)$ un produit de facteurs primaires de genre p

$$G(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^p}{p a_i^p}}.$$

On a

$$g(z) = \frac{G'(z)}{G(z)} = \sum \left[\frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{a_i} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_i^p}\right] = \sum \frac{z^p}{a_i^p(z - a_i)}.$$

Étudier la variation du module $|g(z)|$, comme nous l'avons fait pour $|G(z)|$, lorsque le module $|z|$ augmente indéfiniment, semble une question dépourvue de sens, puisque la fonction $g(z)$ a à distance finie une infinité de pôles. Mais si l'on exclut du champ observé le voisinage des pôles, ce qui revient à considérer $g(z)$ dans certaines régions ou en certains points, on constatera que le module de croissance de $g(z)$ est bien, cependant, une propriété caractéristique de la fonction: il résulte, comme celui de $G(z)$, de la distribution des points a_i.

3. Proposons-nous, d'abord, de trouver, en certains points, une limite supérieure du module $|g(z)|$.

Je traiterai pour commencer, un cas particulier, celui qui donnera lieu aux résultats les plus complets. Je supposerai qu'il existe un angle γ ayant pour sommet l'origine et ne contenant aucun des points α_i.

Posons $|z| = r$, $|a_i| = r_i$, et désignons par z un point situé dans l'angle $\frac{\gamma}{2}$ de même bissectrice que γ. Je vais déterminer en ce point une limite supérieure de $\left|\sum \frac{z^p}{a_i^p(z - a_i)}\right|$.

Les formules élémentaires relatives au triangle Oza_i donnent immédiatement

$$|z - a_i| > r \sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{et} \quad |z - a_i| > r_i \sin\frac{\gamma}{2}.$$

De là nous allons déduire la limite cherchée.

Considérons d'abord le cas général où l'ordre ρ de la fonction entière $G(z)$ n'est pas un nombre entier, et formons de nouveau la fonction $\phi(z)$

qui a été définie dans la première partie, au § 9. Elle est telle que l'on ait, pour $i > m$, $r_i \geq \psi(i)$. Définissons, alors, le nombre n par l'égalité

$$\psi(n) = \eta r$$

η étant un nombre positif fini.

On a

$$r^p \left| \sum_1^n \frac{1}{a_i^p (z - a_i)} \right| < \frac{r^{p-1}}{\sin \gamma} \sum_1^n \frac{1}{r_i^p} < c r^{p-1} + \frac{r^{p-1}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \int_m^n \frac{dx}{[\psi(x)]^p},$$

c étant un nombre fini. L'intégrale définie qui figure dans le dernier membre, est d'ailleurs, comme on l'a vu plus haut,[1] inférieure à $\frac{c_1 n}{r^p}$ (c_1 fini).

On obtient donc, dans ce cas:

$$r^p \left| \sum_1^n \frac{1}{a_i^p (z - a_i)} \right| < h \frac{n}{r},$$

h restant inférieur à un nombre fixe.

D'autre part

$$r^p \left| \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{a_i^p (z - a_i)} \right| < \frac{r^p}{\sin \frac{\gamma}{2}} \int_n^\infty \frac{dx}{[\psi(x)]^{p+1}} < h_1 \frac{n}{r}, \qquad (h_1 \text{ fini})$$

puisque ρ est supposé différent de $p + 1$.

Nous avons donc, finalement

$$|g(z)| < h \frac{n}{r} \qquad (h \text{ positif fini}). \tag{1}$$

4. Cette inégalité peut être mise sous une autre forme. Désignons par $\varphi(r)$ la fonction inverse de $\psi(x)$. Cette fonction satisfait aux conditions énoncées au § 8 de la première partie: on a donc

$$\varphi'(r) = k \frac{\varphi(r)}{r} \qquad (k \text{ nombre positif fini}).$$

[1] Première partie, § 15.

Nous avons établi, plus haut, l'inégalité

$$\log |G(z)| < h\varphi(r).$$

Nous constatons, maintenant, qu'au point z, on a le droit de dériver cette inégalité; c'est-à-dire que l'on a

$$\left|\frac{G'(z)}{G(z)}\right| < h_1\varphi'(r),$$

h_1 étant, de même que h inférieur à un nombre fixe.

On voit immédiatement que la proposition subsiste dans le cas où la fonction entière étudiée contient un facteur exponentiel $e^{H(z)}$, dont l'exposant est un polynôme de degré p au plus. Mais elle pourrait cesser d'être exacte, si l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ était égal à p ou à $p+1$. On choisirait alors la fonction $\psi(x)$ comme il a été fait au § 22 ou au § 23 de la première partie et l'on remplacerait l'inégalité (1) par une inégalité de la forme [1]

$$(2) \qquad |g(z)| < hr^{p-1} + h_1 \frac{n \log n \ldots \log_k n}{r},$$

k étant dans cette inégalité un entier fini, et les nombres h, h_1 restant inférieurs à un nombre fixe lorsque r augmente indéfiniment.

D'ailleurs de l'inégalité

$$|g(z)| < hr^{p-1}\sum_1^n \frac{1}{r_i^p} + h_1 r^p \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{r_i^{p+1}}$$

il résulte immédiatement que l'on a nécessairement

$$(2') \qquad |g(z)| < \varepsilon r^p,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

[1] On constaterait aisément que dans certains cas exceptionnels, bien que $G(z)$ soit de genre p, on pourra avoir dans l'angle γ à partir d'une certaine valeur de r une inégalité telle que

$$|g(z)| < \frac{r^{p-1}}{\log r}.$$

Au contraire on aura toujours, lorsque r est assez grand, l'inégalité (2').

5. Ces résultats font exactement pendant à ceux que nous avons obtenus relativement à $|G(z)|$. Nous les compléterons tout à l'heure en démontrant la réciproque de la proposition précédente. Mais il convient auparavant d'examiner le cas où il n'existerait pas d'angle γ satisfaisant à la condition énoncée plus haut.

Nous allons constater qu'il suffit, dans ce cas, de multiplier la limite (1) par le facteur $\log n$ pour être assuré que le module $|g(z)|$ lui reste inférieur, du moins en certains points ou sur certaines lignes.

Pour parvenir à ce résultat nous ferons appel à des considérations analogues à celles qui nous ont servi à étudier le module minimum d'une fonction entière.

Soit toujours γ un angle fini ayant pour sommet l'origine et dans lequel se trouve le point z. Nous supposerons plus particulièrement que z soit dans un angle γ' intérieur et proportionnel à γ, les côtés de γ' faisant avec ceux de γ des angles qui sont eux-mêmes proportionnels à γ. (Les rapports de γ à ces angles sont des nombres finis.)

La somme $\sum \frac{r^\rho}{r_i^\rho |z - a_i|}$ étendue à tous les pôles situés hors de l'angle γ a évidemment la même limite supérieure que dans le cas précédent. Parmi les pôles restants, considérons d'abord ceux pour lesquels on a

$$\frac{r}{r_i} > 1 + \delta \quad \text{ou} \quad \frac{r_i}{r} > 1 + \delta,$$

δ étant un nombre positif. De ces inégalités, il résulte, dans le premier cas

$$|z - a_i| > kr,$$

dans le second cas

$$|z - a_i| > k_1 r_i,$$

k et k_1 étant des nombres finis indépendants de r. La méthode du § 3 s'appliquera donc encore à la somme Σ relative à ces pôles, et cette somme sera inférieure à la limite (1), ou du moins (lorsque ρ est entier) à la limite (2).

6. Nous n'avons pas encore épuisé les termes de Σ. Pour obtenir une limite supérieure de la somme restante, je raisonnerai comme au § 26 de la première partie.

Soit ν le nombre des pôles que nous avons encore à considérer, et soit Γ l'arc intercepté par l'angle γ sur la circonférence de rayon r ayant pour centre l'origine. J'appellerai α_i le point où cet arc est rencontré par la droite Oa_i, les points α_i étant numérotés dans l'ordre où nous les rencontrons, lorsque nous parcourons Γ dans le sens positif.

Décomposons l'arc Γ en N arcs égaux, *N étant supérieur à $4n'$* (n' désigne le nombre total des pôles de module inférieur à r), et appelons $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ les arcs ainsi définis. En raisonnant comme dans la première partie (§ 26), je constaterai qu'il existe plus de $N - 3n'$ arcs β jouissant des propriétés suivantes: si z est un point de l'un d'eux, la distance de z aux deux extrémités de l'arc Γ sera du même ordre de grandeur que Γ; soient, d'autre part, α_k et α_{k+1} les points α situés de part et d'autre de z sur l'arc Γ; on aura

$$\text{arc}\,(\alpha_{k+1} - z) > \frac{\gamma r}{N} \ldots \text{arc}\,(\alpha_{k+i} - z) > \gamma r \frac{i}{N},$$

$$\text{arc}\,(z - \alpha_k) > \frac{\gamma r}{N} \ldots \text{arc}\,(\alpha_{k-i+1} - z) > \gamma r \frac{i}{N}.$$

On en déduit aisément les inégalités

$$\sum_1^{\nu} \frac{1}{\sin(z - \alpha_i)} < \frac{g}{\gamma} N \sum_1^{\nu} i^{-1} < \frac{g}{\gamma} N \log \nu,$$

g étant un nombre positif fini.

Nous pouvons alors calculer au point z une limite supérieure de la somme $\sum \frac{r^p}{r_i^p |z - a_i|}$ étendue aux points a_i considérés. Le rapport $\frac{r}{r_i}$ étant fini pour ces points, on aura

$$(3) \qquad \sum_1^{\nu} \frac{r^p}{r_i^p |z - a_i|} < \frac{g_1}{r} \sum_1^{\nu} \frac{1}{\sin(z - \alpha_i)} < \frac{h}{\gamma} \frac{N \log \nu}{r},$$

h étant inférieur à un nombre fixe.

En nous reportant maintenant aux résultats obtenus plus haut, nous constatons que l'on a au point z

$$|g(z)| < h\frac{n}{r} + \frac{h'n'\log n'}{r} \quad (h, h' \text{ nombre positifs finis}).$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Si l'ordre ρ n'est pas entier, il existe, quel que soit r, une infinité d'arguments θ tels que l'on ait

$$|g(re^{\theta\sqrt{-1}})| < \frac{hn\log n}{r},$$

h étant une constante finie et n le nombre défini au § 14 (Première Partie).

Si l'ordre ρ du produit $G(z)$ était entier, on choisirait la fonction ψ comme il a été fait aux §§ 22 ou 23 de la première partie, et on pourrait être amené à remplacer l'inégalité précédente par une inégalité de la forme

$$|g(re^{\theta\sqrt{-1}})| < hr^{\rho-1} + \frac{h_1 n\log n\ldots\log_k n}{r},$$

où k est un entier, h et h_1 des nombres positifs finis.

Dans tous les cas, on aura en vertu de (2')

$$|g(re^{\theta\sqrt{-1}})| < \frac{hn'\log n'}{r} + \varepsilon r^{\rho},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

7. Insistons un peu sur l'inégalité obtenue dans le cas où l'ordre ρ n'est pas entier. Il est clair que les arcs sur lesquels cette inégalité est vérifiée sont d'autant plus grands que la constante h est elle-même plus grande. Si l'on remplaçait h par une fonction croissante de n, par exemple $\log\log n$, on pourrait affirmer que *les arcs du cercle C de rayon r sur lesquels l'inégalité*

$$|g(z)| < \frac{n\log n\log_2 n}{r}$$

n'est pas vérifiée ont une somme infiniment petite par rapport à la longueur totale du cercle C.

Supposons en effet que l'angle γ considéré plus haut, au lieu d'être fini, ait pour sinus $\frac{1}{\log_2 n}$, et considérons d'abord tous les pôles situés en dehors de cet angle et tous ceux pour lesquels on a

$$\frac{r}{r_i} > 1 + \frac{1}{\log_2 n} \quad \text{ou} \quad \frac{r_i}{r} > 1 + \frac{1}{\log_2 n}.$$

La somme Σ relative à tous ces pôles est évidemment inférieur à la limite (4) puisque la seule modification apportée aux calculs des §§ 3 et 5 consiste à remplacer les constantes finies $\frac{1}{\sin\gamma}$, k et k_1 par des nombres proportionnels à $\log_2 n$. Faisons maintenant, au § 6, $N = n$. Il est clair que, quelle que soit la situation de l'arc Γ sur le cercle C, le nombre ν deviendra, lorsque r augmente, infiniment petit par rapport à N, excepté peut-être pour un nombre limité d'arcs Γ (c'est-à-dire d'angles γ) dont la somme est infiniment petite par rapport à la longueur totale du cercle C. D'autre part, si $\frac{\nu}{N}$ est très petit le rapport à Γ de la somme des arcs partiels β sur lesquels on a l'inégalité (3) tend vers l'unité. L'inégalité (3) équivalant maintenant (pour $\gamma = \frac{k}{\log_2 n}$, $N = n$) à l'inégalité (4), la proposition énoncée est bien établie.

8. On obtiendrait des résultats analogues si l'on posait le même problème d'une façon un peu différente.

Proposons-nous de déterminer une limite supérieure de $|g(z)|$ en tous les points de certaines circonférences ayant leur centre à l'origine.

On a, en posant $|a_i| = r_i$

$$\left|\sum \frac{z^p}{r_i^p (z - a_i)}\right| < \sum \frac{r^p}{r_i^p |r - r_i|}.$$

La somme Σ relative aux pôles pour lesquels $\frac{r}{r_i} > 1 + \delta$ ou $\frac{r_i}{r} > 1 + \delta$ se calcule comme au § 5.

Supposons d'autre part que r soit situé dans l'un des intervalles définis au § 26 de la première partie. On aura en conservant les notations de ce paragraphe, lorsque

$$r_i < r < r_{i+1}$$

les inégalités

$$\frac{1}{r_{k+1}-r} < \frac{N}{r} \cdots \frac{1}{r_{k+i}-r} < \frac{N}{ir},$$

$$\frac{1}{r-r_k} < \frac{N}{r} \cdots \frac{1}{r-r_{k-i+1}} < \frac{N}{ir}.$$

Si donc nous considérons tous les pôles (au nombre de ν) pour lesquels $\frac{r}{r_i} < 1+\delta$ ou $\frac{r_i}{r} < 1+\delta$, la somme Σ correspondante sera inférieure à

$$h\frac{N}{r}\log\nu,$$

h étant un nombre positif fini.

Le résultat subsistant tant que $N > 4n'$ et ν étant inférieur à n' et à n, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si l'ordre ρ n'est pas entier, il existe une infinité de cercles ayant leur centre à l'origine et des rayons indéfiniments croissants tels que l'on ait en chacun de leurs points

$$|g(z)| < h\frac{n\log n}{r},$$

h étant une constante positive finie et n le nombre défini au § 14 de la première partie.

Si l'ordre ρ de $G(z)$ était entier on remplacerait, comme plus haut, l'inégalité précédente par

$$|g(z)| < hr^{\rho-1} + h_1\frac{n\log n\ldots\log_k n}{r}$$

(k entier, h, h_1 finis).

Nous bornant *au cas où ρ n'est pas entier* nous généraliserons la proposition précédente comme celle du § 6. Si nous considérons sur l'axe des r un segment de longueur r, nous pouvons affirmer que les points r' de ce segment tels que l'on n'ait pas sur tout le cercle de rayon r' l'inégalité

$$(4) \qquad |g(z)| < \frac{hn\log n\log_2 n}{r},$$

forment des segments dont la somme est infiniment petite par rapport au segment total.

Rapprochant ce résultat de celui du § 7, nous énoncerons la proposition suivante:

Soit une aire A proportionnelle à r^2, par exemple le cercle C de centre O et de rayon r. *Les régions de ce cercle où l'inégalité* (4) *n'est pas vérifiée forment une aire infiniment petite par rapport à l'aire totale* A.

9. Ainsi, si l'on prend la précaution d'exclure du champ de la variable le voisinage immédiat des pôles, on peut limiter le module de $g(z)$ exactement comme on a fait pour celui de la fonction entière $G(z)$.

On obtient d'ailleurs immédiatement une réciproque du théorème démontré au paragraphe précédent.

Supposons que le long d'une circonférence C de rayon r, on ait

$$|g(z)| < \varpi(r).$$

Soit n' le nombre des pôles de $g(z)$ dont le module est inférieur à r. On a

$$n' = \int_C g(z)dz,$$

d'où

$$\frac{n'}{r} < h\,\varpi(r), \tag{5}$$

h étant un nombre positif fini.

Si, quel que soit r, *il existe une circonférence de rayon* ηr (η *fini*) *jouissant de la propriété indiquée, on peut affirmer que l'inégalité* (5) *est vérifiée pour toute valeur de* r.

Les nombres n et n' qui figurent dans les inégalités (2), (4) et (5) sont ceux que nous avons déjà rencontrés dans la première partie. Nous avons vu que, lorsque l'ordre ρ n'est pas entier, ces nombres sont sûrement égaux pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes. Nous avons de plus défini au § 18 les cas où ils coïncident pour toute valeur de r. La comparaison de ces deux nombres, dans le cas où ρ est entier, a été faite aux §§ 22 et 23.

Le voisinage des pôles ayant été exclu du champ de la variable, comme il a été dit au § 8, désignons par $m(r)$ le module maximum (pour $|z| = r$)

de $g(z)$ dans les régions restantes. Nous déduirons en particulier du théorème du § 8 et de l'inégalité (5) que si, à partir d'une certaine valeur de r, *le rapport* $\frac{r_i^\rho}{i}$ *reste compris, quel que soit* i, *entre deux nombres finis, le rapport* $\frac{m(r)}{r^{\rho-1}}$ *sera supérieur à un nombre fixe et inférieur à* $\log r$.

Si l'on reprend l'expression employée pour les fonctions entières, on peut dire que, dans ce cas, la croissance de la fonction $g(z)$ est *parfaitement régulière*. Mais la fonction-type à laquelle on compare le module de $g(z)$ est, cette fois, une puissance finie de r, au lieu d'être une exponentielle.

Plus généralement, *si l'on a, à partir d'une certaine valeur de* i, *quelque petit que soit* ε,

$$i^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < r_i < i^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon},$$

on aura, à partir d'une certaine valeur de r,

$$r^{\rho-1-\varepsilon'} < m(r) < r^{\rho-1+\varepsilon'},$$

ε' *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{r}$.

10. Il nous reste à démontrer un théorème correspondant à celui du § 20 de la première partie.

Supposons que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de r

$$m(r) = \frac{hn}{r} \qquad (h \text{ positif fini}),$$

n étant l'inverse de la fonction

$$r = \psi(n) = n^{\frac{1}{\rho}} (\log n)^{\frac{\sigma_1}{\rho}} \ldots (\log_k n)^{\frac{\sigma_k}{\rho}},$$

l'ordre ρ *n'étant pas entier*.

Je dis que l'on a, à partir d'une certaine valeur de i

$$h' < \frac{r_i}{\psi(i)} < h''(\log i)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (h', h'' \text{ positifs finis}).$$

Supposons, en effet, que l'on ait, pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} = K\psi(n_1)(\log n_1)^{\frac{1}{\rho}},$$

K dépassant, lorsque n_1 augmente indéfiniment, tout nombre assigné d'avance.

Faisons

$$r = K^{1-\beta}\psi(n_1)(\log n_1)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\beta \text{ positif, inférieur à } 1)$$

On aura, d'après les calculs effectués au § 20 de la première partie

$$\sum_m^{n_1} \frac{r^{p-1}}{r_i^p} < K^{-c}(\log n_1)^{\frac{p}{\rho}} \frac{n}{r}, \qquad \sum_{n_1+1}^{\infty} \frac{r^p}{r_i^{p+1}} < K^{-c}(\log n_1)^{\frac{p}{\rho}} \frac{n}{r},$$

$$n_1 = 1 + \alpha K^{-1} n,$$

c étant un nombre positif.

D'ailleurs le nombre n' des pôles de module inférieur à r est inférieur à n_1, et l'on a

$$n' \log n' < gK^{-\rho(1-\beta)} n.$$

On aura donc, dans les régions définies au §§ 7 et 8

$$|g(z)| < K^{-c_1} n \qquad (c_1 \text{ positif}),$$

ce qui est en contradiction avec les données. L'hypothèse faite sur r_n est donc inadmissible; ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, *si la croissance de $g(z)$ est parfaitement régulière*, c'est-à-dire si $m(r)$ est proportionnel à $r^{\rho-1}$, à partir d'une certaine valeur de r, *on aura, à partir d'une certaine valeur* de i

$$h' < \frac{r_i^\rho}{i} < h'' \log i \qquad (h', h'' \text{ positifs finis}).$$

11. L'étude de la fonction méromorphe $g(z)$ conduit, on le voit, à des résultats qui rappellent de très près ceux que nous avons obtenus relativement aux fonctions entières. Afin de mettre mieux encore cette connexion en lumière, je vais maintenant comparer la croissance de $g(z)$ à celle de la fonction entière $G(z)$.

Désignons par n' le nombre des points a_i dont le module est inférieur à ηr, η *étant lui-même inférieur à* $\frac{1}{2}$, *je dis qu'en une infinité de points z de modules indéfiniment croissants, on a simultanément les inégalités*

$$|G(z)| > e^{hn'}, \qquad |g(z)| > h_1 \frac{n'}{r},$$

h et h_1 étant des nombres positifs finis.

Posons comme au § 14 de la première partie

$$G(z) = G_1(z) \prod_1^n \left(1 - \frac{z}{a_i}\right).$$

On a, quel que soit z sur le cercle C de rayon r ayant son centre à l'origine,

$$(7) \qquad \prod_1^{n'} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) > e^{hn'} \qquad (h \text{ positif et fini}).$$

On calculera de même une limite inférieure de $\left|\sum_1^{n'} \frac{1}{z - a_i}\right|$. Par exemple si z est réel, et égal à ξ ($\xi = r$), on aura pour $i < n'$

$$R\left(\frac{1}{\xi - a_i}\right) < \frac{1 - \eta}{1 + \eta^2} \frac{1}{r}.$$

D'où

$$(8) \qquad R\left|\sum_1^{n'} \frac{1}{\xi - a_i}\right| > k \frac{n'}{\xi} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Donnons maintenant à r une valeur particulière r_1. Quel que soit r_1, il existe sur le cercle C de rayon r_1 des arcs le long desquels la partie réelle

$$R[\log G_1(z)]$$

est positive. (Première partie § 17.) Parmi les rayons issus de l'origine et aboutissant aux divers points de ces arcs, il en est une infinité sur lesquels la fonction $R[\log G_1(z)]$ est continue ainsi que sa dérivée. Nous avons toujours le droit de supposer, après avoir fait, si cela est nécessaire, le changement de variable $z' = ze^{\theta\sqrt{-1}}$ que l'axe réelle est l'un de ces rayons, et nous aurons alors pour $z = \xi_1 = r_1$ l'inégalité

$$R[\log G_1(\xi_1)] > 0.$$

On peut d'ailleurs disposer de la nouvelle variable z' de façon que ξ_1 soit arbitrairement grand, et par suite, (si ξ_0 est un point donné de l'axe réelle ($\xi_0 < \xi_1$), et n'_0 la valeur correspondante de n'_1), de façon que l'on ait

$$(9) \qquad k_1 n'_0 \log\frac{\xi_1}{\xi_0} > R[\log G_1(\xi_0)],$$

k_1 *étant un nombre inférieur à* k. Nous concluons de là qu'il existe entre ξ_0 et ξ_1 des points ξ tels que l'on ait

$$(10) \qquad R\left[\frac{d\log G_1(\xi)}{d\xi}\right] > -k_1\frac{n'_0}{\xi};$$

en effet, s'il n'en était pas ainsi, l'intégration du premier membre de ξ_0 à ξ_1 donnerait

$$R[\log G_1(\xi_1)] < R[\log G_1(\xi_0)] - k_1 n'_0 \log\frac{\xi_1}{\xi_0} < 0,$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

Nous pouvons affirmer en outre qu'il existe des points ξ où l'on a simultanément l'inégalité (10) et l'inégalité

$$R[\log G_1(\xi)] > 0.$$

Supposons en effet que cette dernière inégalité ne soit pas satisfaite aux points ξ définis plus haut; comme elle l'est au point ξ_1, il existera sûrement entre ξ et ξ_1 des points ξ'_0 où la fonction $R[\log G_1(\xi)]$ sera positive est croissante: l'inégalité (10) sera donc satisfaite en ces points, qu'il est loisible d'appeler ξ.

D'ailleurs les inégalités (7) et (8) sont toujours vérifiées en ξ, et l'on a $n'_0 \leqq n'$ (puisque $\xi > \xi_0$). Il en résulte que l'on a simultanément les inégalités

$$(11) \qquad R[\log G(\xi)] > hn', \qquad R\left[\frac{d\log G(\xi)}{d\xi}\right] > (k-k_1)\frac{n'}{\xi},$$

h et $k-k_1$ étant des nombres positifs finis, ce qu'il fallait démontrer.

12. En supposant l'ordre ρ de $G(\xi)$ non entier, nous pouvons compléter encore le résultat précédent. Nous avons vu que pour une infinité[1] de valeurs de r indéfiniment croissantes, on a

$$|G(\xi)| < e^{h_1 n'} \text{ et de même } |G_1(\xi)| < e^{h_1 n'} \quad (h_1 \text{ potitif fini}),$$

n' ayant la même signification qu'au § 11.

Supposons, en particulier, ces inégalités satisfaites pour z réel est égal à ξ_0. Nous voyons alors qu'une condition suffisante pour que l'inégalité (9) soit vérifiée est que l'on ait

$$k_1 n'_0 \log \frac{\xi_1}{\xi_0} > h_1 n'_0,$$

ou

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} > e^{\frac{h_1}{k_1}},$$

ce qui laissera fini le rapport $\frac{\xi_1}{\xi_0}$.

Sachant que ce rapport est fini, nous constatons d'abord, (d'après le théorème fondamental démontré dans la première partie), qu'en tout point ξ compris entre ξ_0 et ξ_1 l'on a[2] comme en ξ_0

$$|G_1(\xi_1)| < e^{h_2 n'} \qquad (h_2 \text{ positif fini}).$$

D'autre part, nous savons (§ 8) que l'on a, dans une infinité d'intervalles partiels compris entre ξ_0 et ξ_1, l'inégalité

$$R\left[\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right] < k_2 \frac{n' \log n'}{\xi} \qquad (k_2 \text{ positif fini}). \tag{12}$$

Je dis qu'*en une infinité de points ξ cette inégalité sera satisfaite en même temps que les inégalités* (11).

Supposons en effet qu'en un point ξ' ces dernières inégalités soient seules satisfaites, et donnons maintenant à n' une valeur fixe proportionnelle à n'_0. Appelons ξ'_1 la première valeur de ξ supérieure à ξ' pour laquelle

[1] pour toutes, si la croissance de $G(z)$ est régulière.

[2] pour $r = \xi$, comme pour $r = \xi_0$, le rapport de n' au nombre n du § 3 est fini.

on ait l'inégalité (12) (ξ_1' peut être cette fois plus grand que ξ_1, mais le rapport $\frac{\xi_1}{\xi_0}$ est fini, en vertu du théorème du § 8). Au point ξ_1' l'on a

$$R\left[\frac{d \log G(\xi_1')}{d\xi}\right] = k_2 \frac{n' \log n'}{\xi_1'},$$

et en même temps

$$R[\log G(\xi_1')] > hn',$$

puisque la fonction $R[\log G(\xi)]$ n'a pas cessé de croître dans l'intervalle $\xi'\xi_1$. D'ailleurs, le rapport $\frac{\xi_1}{\xi_0}$ étant fini, on aura toujours

$$|G(\xi_1')| < e^{h'n'}.$$

13. Si nous revenons maintenant à la variable z et si nous remplaçons ξ par sa valeur r, nous pourrons interpréter comme il suit les inégalités précédentes.

Si $G(z)$ est une fonction entière d'ordre non entier et n' *le nombre défini au* § 11, *on aura simultanément pour une infinité de valeurs de z s'éloignant indéfiniment de l'origine, l'égalité*

$$e^{i\alpha} G(z) = e^{hn'}$$

(h étant un nombre positif fini et α un angle compris entre 0 et 2π) *et l'égalité*

$$R[e^{i\alpha} G'(z)] = \mu \frac{n'}{r} e^{hn'},$$

μ étant un nombre positif supérieur à un nombre fini et inférieur à $\log n'$.

Cette proposition permet d'étudier la croissance de la fonction n' de r, lorsque le produit $G(z)$ est défini par une équation différentielle du premier ordre à laquelle il est supposé satisfaire. On substituera dans l'équation aux expressions $e^{\alpha i} G(z)$ et $R[e^{i\alpha} G'(z)]$ les valeurs qui viennent d'être données, et l'on calculera n' en égalant le résultat à zéro.

14. Les propositions précédentes ne fournissent, certes, que des renseignements très vagues sur l'allure générale de la fonction $g(z)$. Mais elles mettent en évidence l'existence de certaines régions qui offrent quelque intérêt au point de vue théorique. Dans ces régions l'influence perturbatrice exercée par les pôles sur la croissance de la fonction est la même

que si la distribution de ces pôles était uniforme: C'est ce qu'expriment les inégalités (3). Il existe par suite des portions étendues du plan (par rapport auxquelles toutes les autres seront négligeables si l'on se contente de l'inégalité (4)) où l'influence des pôles sur l'ordre de grandeur de la fonction est, elle aussi, négligeable. *Cet ordre de grandeur dépend uniquement de la nature de la singularité essentielle dont on s'approche*, exactement comme il arrivait pour les fonctions entières. On voit par là que le mode de croissance de $g(z)$ est bien un élément fondamental de cette fonction, indépendant de la situation particulière des pôles.

Des considérations de cette nature sont nécessaires pour justifier l'étude de la croissance lorsque l'on a à faire à des fonctions méromorphes. Elles s'appliquent en revanche à des classes de fonctions beaucoup plus étendues que celle des fonctions $g(z)$.

Considérons par exemple une fonction méromorphe qui n'ait que des pôles simples, *les résidus correspondants étant des nombres finis*. Il est facile d'étendre la notion de genre à de telles fonctions. Si l'on a une fonction de la forme

$$f(z) = \sum \frac{b_i z^p}{a_i^p (z - a_i)} + H(z), \tag{13}$$

$H(z)$ étant un polynôme de degré $p - 1$ au plus, et la somme Σ étant absolument convergente dans tout le plan, excepté aux points singuliers a_i, on pourra dire que la fonction[1] $f(z)$ est de genre p.

Les nombres b_i étant tous finis, il est clair que $f(z)$ satisfait, dans les mêmes conditions que $g(z)$, aux inégalités (1), (2) ou (4).

Si l'on voulait généraliser encore ce résultat, il faudrait supposer que b_i au lieu de rester fini est, comme a_i, une fonction croissante de l'entier i. La méthode des paragraphes précédents s'appliquerait encore à ce cas.

[1] Si l'on adopte, pour les fonctions méromorphes, cette définition du genre, les fonctions méromorphes de genre p ne seront qu'une catégorie très particulière de la classe des fonctions qui s'expriment par le quotient de deux fonctions entières de genre p. La plupart de ces dernières fonctions seront, à notre point de vue, de genre infini; car leurs résidus deviennent généralement infiniment grands avec r. On rencontre de graves difficultés lorsqu'on essaye de développer de telles fonctions sous la forme (13). Cette forme de développement a été étudiée par M. Borel dans un important mémoire publié en 1901 dans les Annales de l'École Normale Supérieure.

Les dérivées successives de $g(z)$.

15. Pour rendre les résultats précédents applicables à l'étude des équations différentielles algébriques d'ordre supérieur au premier, il faut étendre nos considérations aux dérivées successives de la fonction $g(z)$.

La proposition du § 3 se laisse aisément généraliser. On a

$$g'(z) = \sum \left[p \frac{z^{p-1}}{a_i^p (z - a_i)} - \frac{z^p}{a_i^p (z - a_i)^2} \right].$$

Nous bornant au cas où l'ordre ρ du produit infini $G(z)$ n'est pas entier, supposons qu'il existe un angle fini γ ayant son sommet à l'origine et ne contenant aucun des points a_i, on aura, lorsque z est dans l'angle $\frac{\gamma}{2}$ de même bissectrice :

$$|z - a_i|^2 > r\,|z - a_i| \sin\frac{\gamma}{2}$$

et par suite

$$r\,|g'(z)| < \left(p + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right) r^p \sum \frac{1}{r_i^p\,|z - a_i|}.$$

Or nous avons déterminé au § 3 une limite supérieure de la somme qui figure dans le second membre. Si nous introduisons de nouveau la fonction $\psi(x)$ de ce paragraphe, et si nous posons

$$\psi(u) = \eta r \qquad (\eta \text{ fini})$$

nous aurons

$$|g'(z)| < h \frac{u}{r^2} = h_1 \varphi''(r),$$

h et h_1 étant des nombres finis, et $\varphi(r)$ désignant comme au § 3 la fonction inverse de $\psi(i)$.

Le même raisonnement s'appliquant à une dérivée quelconque de $g(z)$, on aura

$$|g^{(q)}(z)| < h \frac{u}{r^{q+1}} = h_1 \varphi^{(q+1)}(r).$$

h et h_1 étant finis. En d'autres termes, on a le droit de dériver autant de fois qu'on le veut l'inégalité (1). Cela n'était, comme on sait, nullement évident à priori.

16. Ces résultats si simples ne subsistent malheureusement pas dans le cas général où il n'existe pas d'angle fini γ ne contenant aucun pôle de la fonction. Nous allons, pour étudier ce cas général, faire appel à des considérations analogues à celles du § 6. La difficulté du problème provient, ici encore, des pôles qui sont voisins du point z où l'on considère la fonction. Nous pouvons donc, pour un instant, faire abstraction des autres pôles.

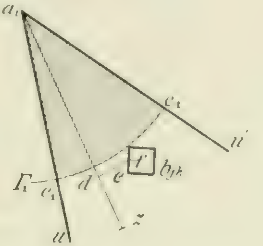
Soit A une aire proportionnelle à $H^2 r^2$ et contenant le point z. La forme de cette aire n'important pas ici, je supposerai qu'elle est un carré de côté égal à Hr. Soit ν le nombre des pôles de $g(z)$ contenus dans ce carré, et soit N un entier tel que l'on ait, par exemple $N^2 > 32\nu$. Décomposons le carré A en N^2 petits carrés tous égaux ayant leurs côtés parallèles. Nous désignerons ces carrés par

$$\begin{matrix} b_{11} \;.\;.\;.\;.\;.\; b_{1N} \\ .\;.\;.\;.\; b_{ik} \;.\;.\;. \\ b_{N1} \;.\;.\;.\;.\;.\; b_{NN}. \end{matrix}$$

A chaque pôle a_i contenu dans A je vais faire correspondre un certain nombre de carrés b que j'exclurai du champ de la variable z. Cette correspondance satisfera à la condition suivante: si z est un point quelconque du champ conservé, l'un au moins des carrés correspondant à a_i aura tous ses points plus voisins du point z que n'en est a_i. Pour établir une telle correspondance entre les pôles a_i et les carrés b, je procèderai comme il suit, ombrant au fur et à mesure les carres choisis.

Soit a_i un pôle situé dans le carré b_{jk}: nous ombrerons, s'ils ne le sont pas déjà, le carré $b_{j_1k_1}$ et les huit carrés, $b'_1 \ldots b'_8$, qui l'entourent. Si quelques-uns de ces carrés, par exemple b'_1, b'_2, b'_3, sont déjà ombrés, nous ombrerons tous les carrés (en nombre inférieur à 16) qui touchent à la figure formée par $b_{j_1k_1}, b'_1, b'_2, b'_3$. Mais il se pourra que dans certaines directions les carrés qui avoisinent immédiatement cette figure soient euxmêmes déjà ombrés: voici alors comment on opèrera. Menons par a_i les

parallèles aux côtés du carré A, et divisons chacun des quatre angles droits ainsi formés en quatre angles égaux; nous formons ainsi seize angles dont je considérai l'un en particulier, l'angle $u a_i u'$ par exemple. Traçons ensuite des cercles Γ de centre a_i et de rayons croissants, et soit Γ_1 le premier de ces cercles qui touche, dans l'angle $u a_i u'$, à un carré non encore ombré. Γ_1 détermine dans l'angle $u a_i u'$ un secteur $c_1 a_i c_1'$ tout



entier extérieur au carré b_{jk}. Si alors z est un point quelconque situé dans une région non ombrée de l'angle $u a_i u'$, il est clair que tout point de b_{jk} est moins éloigné de z que le point a_i. Désignons en effet par R la distance de a_i à z, par r le rayon $a_i c_1$ et par ρ le côté de b_{jk}. f étant un point quelconque du carré b_{jk}, nous pouvons remplacer le chemin fz par un chemin, plus long, ainsi composé: un segment fe, parallèle à l'un des côtés de b_{jk}, dont la longueur est inférieur à ρ, un arc ed de la circonférence de centre a_i passant par e, arc dont la longueur est inférieure à $\frac{\pi r'}{8}$, $(r < r' < r + \rho)$, enfin un segment dz du rayon $a_i z$, égal à $R - r'$. Le chemin total est inférieur a

$$R - r\left(1 - \frac{\pi}{8}\right) + \rho$$

et par suite à R, du moins si $r > 2\rho$. Or lorsque $r < 2\rho$ nous retombons dans le cas simple traité plus haut où certains carrés avoisinant immédiatement soit $b_{j_1 k_1}$, soit les huit carrés qui l'entourent ne sont pas encore ombrés. Ecartant ce cas particulier, nous voyons que si dans chacun des seize angles qui entourent a_i, nous faisons correspondre à ce pôle un carré tel que b_{jk}, la correspondance ainsi établie satisfera bien aux conditions voulues.

Si plusieurs carrés jouissent de la même propriété que b_{j1}, on choisira l'un quelconque d'entre eux. Si a_i est un pôle multiple on recommencera l'opération précédente en supposant ombré le carré b_{j1}.

17. Cette suite d'opérations fait correspondre à chaque pôle a_i 16 carrés b au plus. Si donc $N^2 > 32\nu$, il restera finalement plus de $\frac{N^2}{2}$ carrés non ombrés. Il y en aura donc, parmi ceux-ci, dont tous les points seront à une distance du contour de l'aire A supérieur à ηHr, η étant un nombre fini. Soit z un point d'un tel carré. Ce point jouit des propriétés suivantes: les pôles les plus rapprochés de z en sont à une distance supérieure à $\frac{Hr}{N}$, et ils sont au nombre de 8 au plus; d'une manière générale, le nombre des pôles dont la distance à z est inférieure à $H\frac{jr}{N}$ est inférieur au nombre des carrés b dont les points sont à une distance de z égale ou plus petite; ce nombre est donc inférieur à $4j(j+1)$. Modifions alors la disposition ordinaire des indices des pôles situés dans l'aire A et classons ces pôles d'après leur éloignement du point z. Nous aurons

$$
\begin{gathered}
|z-a_1| > H\frac{r}{N} \ldots |z-a_8| > H\frac{r}{N}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
|z-a_{4j(j-1)+1}| > H\frac{jr}{N} \ldots |z-a_{4j(j-1)+8j}| > H\frac{jr}{N}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

le nombre des pôles dont la distance à z est comparée à $H\frac{jr}{N}$ étant égal à $8j$. j croît de 1 à μ et l'on a $2\mu < \sqrt{\nu}$.

On déduit de là les inégalités

$$
(14) \quad \left|\begin{array}{ll}
H \sum_1^{\nu} \frac{1}{|z-a_i|} < \sum_1^{\mu} 8j\frac{N}{jr} < 8\frac{N\mu}{r} < \frac{N^2}{r} & \\
H^2 \sum_1^{\nu} \frac{1}{|z-a_i|^2} < \sum_1^{\mu} 8j\frac{N^2}{j^2r^2} < k\frac{N^2}{r^2}\log\mu & (k \text{ nombre fini}) \\
H^3 \sum_1^{\nu} \frac{1}{|z-a_i|^3} < \sum_1^{\mu} 8j\frac{N^3}{j^3r^3} < k_1\frac{N^3}{r^3} & (k_1 \text{ nombre fini})
\end{array}\right.
$$

et ainsi de suite.

On peut interpréter simplement ces inégalités en disant qu'au point z les sommes précédentes ne peuvent dépasser la valeur qu'elles prendraient si la distribution des pôles a_i était uniforme, c'est-à-dire si chacun des carrés h sauf ceux (au nombre de 9) qui avoisinent immédiatement z contenait un pôle et un seul.

18. Ces divers résultats étant acquis nous pouvons calculer au point z une limite supérieure des modules de $g'(z)$ et de ses dérivées.

Considérons la somme

$$\sum \frac{z^p}{a_i^p (z - a_i)^2}.$$

Lorsque a_i est dans l'aire A définie plus haut, le rapport $\left|\frac{z}{a_i}\right|$ est fini. La somme Σ' correspondant aux pôles situés dans A est donc inférieure, en module, à

$$\frac{hN^2}{H^2 r^2} \log \mu \qquad (h \text{ positif fini}).$$

n' étant le nombre défini au § 5, le rapport $\frac{N^2}{n'}$ sera sûrement inférieur à un nombre fixe, si l'on prend, par exemple, pour N^2 le plus petit carré de nombre entier supérieur à 32ν. Si alors nous supposons fini [1] le nombre H, le module de la somme Σ' sera inférieur (puisque $2\mu < \sqrt{\nu}$) à

$$h_1 \frac{n' \log n'}{r^2} \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

Considérons maintenant les pôles restants et d'abord ceux (en nombre n'_1) dont le module est inférieur à r. Pour chacun de ces pôles, on a

$$|z - a_i| > kr \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Par suite, si l'on suppose que l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ n'est pas entier, on aura

$$r^p \sum_1^{n'_1} \frac{1}{r_i^p |z - a_i|^2} < \frac{r^{p-2}}{k^2} \sum_1^{n'_1} \frac{1}{r_i^p} < \frac{cn}{k^2 r^2} \qquad (c \text{ positif fini}).$$

n étant toujours le nombre défini au § 3.

[1] On obtiendrait d'autres théorèmes si l'on supposait que le nombre H croît indéfiniment avec r. Cf. § 19 et § 26.

Pour les pôles de module supérieur à r, qui sont extérieurs à l'aire A, on aura

$$|z - a_i| > kr_i \qquad (k \text{ positif fini}).$$

La somme Σ correspondante sera donc inférieure, en module, à

$$\frac{r^{p-1}}{k^2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r_i^{p+1}} \quad \text{ou à} \quad \frac{c_1 n}{k^2 r^2} \qquad (c_1 \text{ positif fini}).$$

Nous avons donc finalement

$$\left| \sum_{1}^{\infty}{}' \frac{z^p}{a_i^p (z - a_i)^2} \right| < h \frac{n}{r^2} + h_1 \frac{n' \log n'}{r^2} \quad (h, h_1 \text{ positifs finis}).$$

D'ailleurs la somme

$$\left| \sum_{1}^{\infty}{}' \frac{z^{p-1}}{a_i^p (z - a_i)} \right|$$

égale à $\dfrac{|g(z)|}{r}$ est sûrement, au point z, inférieure au second membre de cette inégalité.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

Si l'ordre de $G(z)$ n'est pas entier, il existe une infinité d'aires indéfiniment éloignées de l'origine, où l'on a

$$(15) \qquad |g'(z)| < h \frac{n \log n}{r^2},$$

h restant inférieur à un nombre fixe, et n ayant la même signification qu'au § 3.

Si l'ordre ρ était entier, on déterminerait le nombre n comme au § 22 ou au § 23 de la première partie, et l'on remplacerait l'inégalité (15) par une inégalité de la forme

$$|g'(z)| < hr^{p-2} + \frac{h_1 n \log_k n}{r^2} \quad (k \text{ entier}, h, h_1 \text{ positifs finis}).$$

On vérifie d'ailleurs aisément en se reportant aux sommations précédentes que l'on a dans tous les cas

$$|g'(z)| < h\frac{n' \log n'}{r^2} + \varepsilon r^{\rho-1},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

19. Insistons maintenant sur le cas où l'ordre ρ n'est pas entier. Il résulte de la démonstration du § 18 que si le rapport $\frac{N^2}{n}$ est fini, (nous avons vu qu'on peut prendre en tout cas N^2 proportionnel à 32ν), la somme des carrés partiels dans lesquels l'inégalité (15) est satisfaite est dans un rapport fini avec l'aire totale A. Si l'on remplaçait la constante h par une fonction croissante de n, par exemple par $\log\log n$, on pourrait aller plus loin. Considérons par exemple le cercle C de rayon r ayant son centre à l'origine. Je vais montrer que *les régions de l'aire C dans lesquelles l'inégalité*

$$|g'(\alpha z)| < \frac{n \log n \,.\, \log_2 n}{r^2} \tag{16}$$

n'est pas vérifiée ont une somme infiniment petite par rapport à l'aire totale C.

Supposons en effet que le côté du carré A soit égal à αr, le nombre α étant arbitrairement petit avec $\frac{1}{r}$. Pour tout pôle a_i situé en dehors de l'aire A on aura les deux inégalités

$$|z - a_i| > \alpha k_1 r, \qquad |z - a_i| > \alpha k_1 r_i \qquad (k_1 \text{ positif fini}).$$

Si donc dans le paragraphe précédent on fait $k = \alpha k_1$, on constatera que la somme Σ correspondant à ces divers pôles est inférieure à $\frac{cn}{\alpha^2 r^2}$ (c positif fini). Faisons d'autre part au § 17 $N = n$, $H = \alpha$. La seconde inégalité (14) nous montre que l'on a dans certaines régions de A

$$\sum_1^{\nu} \frac{1}{|z - a_i|^2} < \frac{hn^2 \log \nu}{\alpha^2 r^2} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

On vérifie de même que, dans les régions considérées le rapport $\frac{|g(z)|}{r}$

est inférieur au second membre de cette inégalité. Il en est par suite de même[1] de $|g'(z)|$.

Faisons en particulier $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\log_2 n}}$; l'inégalité (16) se trouve satisfaite dans certaines régions de l'aire A. Or il est clair que quelle que soit la situation du carré A dans le cercle C, le nombre ν des pôles qu'il contient deviendra, lorsque r croîtra, infiniment petit par rapport à N: il ne pourra en être autrement que pour un nombre limité de carrés A dont la somme est elle-même infiniment petite (avec $\frac{1}{r}$) par rapport à l'aire totale du cercle C. D'autre part, si $\frac{\nu}{N}$ est très petit, le rapport à A de la somme des carrés partiels b où l'on a les inégalités (14) tend vers l'unité. C'est bien le résultat que j'avais annoncé.

20. Une méthode identique permettra d'étudier la fonction $g''(z)$ et ses dérivées successives. Nous pouvons donc, sans reprendre la suite des raisonnements précédents, énoncer les résultats suivants qui résultent des inégalités (14).

Il existe des aires indéfiniment éloignées de l'origine où l'on a, en même temps que l'inégalité (15) *les inégalités*

$$(17) \qquad |g''(z)| < h_1 \frac{n\sqrt{n}}{r^3}, \qquad |g'''(z)| < h_2 \frac{n^2}{r^4} \ldots$$

h_1 et h_2 étant des constantes positives finies.

De même, en raisonnant comme au § 19, on constatera que dans des régions du cercle C dont la somme a avec l'aire totale C un rapport tendant vers l'unité, on aura en même temps que l'inégalité (16) les inégalités

[1] Si l'ordre ρ était entier, il faudrait également diviser par α^2 la limite obtenue au § 18. On a, en tout cas, dans certaines régions du carré A de côté αr l'inégalité

$$|g'(z)| < \frac{hn^2 \log \nu}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varepsilon}{\alpha^2} r^{\rho-1},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

$$(18) \qquad |g''(z)| < \frac{n^{\frac{3}{2}}(\log_2 n)^{\frac{3}{2}}}{r^3} \ldots |g'''(z)| < \frac{n^2(\log_2 n)^2}{r^4}$$

$\log_2 n$ peut d'ailleurs être remplacé par $\log_3 n$, ou par une fonction de n croissant moins vite encore.

La méthode qui vient d'être employée est susceptible d'autres applications encore. On peut l'employer pour déterminer une limite supérieure du module de la fonction $g(z)$ elle-même et l'on obtiendra ainsi une limite plus précise que celle à laquelle nous sommes parvenus plus haut, (dans des régions moins étendues il est vrai).

Il résulte en effet de la première inégalité (14) que *si l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ n'est pas entier* l'on a en même temps que l'inégalité (15) l'inégalité

$$|g(z)| < h\frac{n}{r} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

Cette limite est particulièrement intéressante lorsque la fonction $g(z)$ est à croissance régulière. Désignons par $m_1(r)$ le module maximum (pour $|z| = r$) de $g(z)$ dans les régions où l'on a l'inégalité (15). Nous pouvons compléter la proposition énoncée au § 10 en disant que si *le rapport* $\frac{r_n^\rho}{n}$ *reste, quel que soit r, inférieur à un nombre fini, il en sera de même du rapport* $\frac{r^{\rho-1}}{m_1(r)}$.

21. La notion de croissance régulière s'étend immédiatement à la fonction $g'(z)$ et à ses dérivées. Considérons par exemple, la fonction $g'(z)$. Appelons $m_2(r)$ son module maximum (pour $|z| = r$), dans les régions où les inégalités (17) sont satisfaites et supposons que le rapport $\frac{m_2(r)}{r^{\rho-2}}$ reste à partir d'une certaine valeur de r, compris entre deux nombres finis. On peut dire alors que la croissance de $g'(z)$ est parfaitement régulière.

Dans ce cas, nous démontrerons, en raisonnant comme au § 10, que l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$\frac{r'_i}{i} < h' \log i \qquad (h' \text{ positif fini}).$$

22. Les divers résultats que nous venons d'obtenir s'étendraient immédiatement à des fonctions méromorphes plus générales que la fonction $g(z)$ et ses dérivées. Considérons comme au § 11 la fonction méromorphe que l'on pourrait appeler fonction de genre p

$$f(z) = \sum \frac{b_i z^p}{a_i^p (z - a_i)} + H(z),$$

$H(z)$ étant un polynôme de degré $p - 1$, et les b_i *étant tous des nombres finis.* Nous avons vu que le module $|f(z)|$ a même limite supérieure que $|g(z)|$. On constaterait de même que $|f'(z)|$, $|f''(z)|$, ... satisfont dans les mêmes conditions que $|g'(z)|$, $|g''(z)|$, ... aux inégalités (15) et (17) ou (16) et (18).

23. Le module des fonctions $g'(z)$, $g''(z)$, ... atteint-il effectivement la limite supérieure que nous lui avons assignée? Il est certain que ce module prendra des valeurs arbitrairement grandes si l'on approche suffisamment d'un pôle. Mais, si l'on entoure chaque pôle d'un petit cercle $|g'(z)|$ pourra-t-il atteindre sa limite supérieure en dehors des petites aires ainsi formées? Pour répondre à cette question, nous remarquerons que la proposition du § 9 se généralise très facilement.

On a

$$-g'(z) = \sum \left[\frac{1}{(z - a_i)^2} - \frac{1}{a_i^2} - \frac{2z}{a_i^3} - \ldots - \frac{(p-1)z^{p-2}}{a_i^{p-2}} \right].$$

Considérons alors l'intégrale définie

$$\int_{C} - z g'(z)\, dz,$$

en désignant par C le contour d'un cercle C de rayon r sur lequel la fonction $g'(z)$ est continue, et soit n' le nombre des pôles de $g(z)$ contenus dans ce cercle. Ces pôles sont aussi ceux de la fonction $-zg'(z)$ et les résidus correspondants sont égaux à l'unité. On a donc

$$\int_{C} - z g'(z)\, dz = n'.$$

D'où nous concluons qu'en certains points de la circonférence C on a

$$r^2 |g'(z)| > n'.$$

La même méthode s'appliquerait évidemment à une dérivée quelconque de $g(z)$. Ainsi, en considérant l'intégrale $\int_C z^q g^{(q)}(z)dz$, on prouverait qu'en certains points du cercle C, on a

$$|g^{(q)}(z)| > \frac{n'}{r^{q+1}}.$$

Au lieu d'intégrer la fonction $-zg'(z)$ le long du cercle C, on pourrait l'intégrer le long d'un contour fermé quelconque sur lequel cette fonction est continue. Si la longueur du contour est ηr, le nombre des zéros enveloppés $\eta_1 n'$, η et η_1 étant des nombres finis, on aura en une infinité de points du contour considéré

(19) $$|g'(z)| > \frac{\eta_1}{\eta}\frac{n'}{r^2}.$$

Cette inégalité est satisfaite le long de lignes telles que tout contour satisfaisant aux conditions précédentes soit traversé par une infinité d'entre elles. Ces lignes ne peuvent donc pas être contenues tout entières à l'intérieur de petits cercles entourant les pôles. L'inégalité (19) est bien caractéristique de la fonction méromorphe $g'(z)$. L'application suivante va nous permettre d'ailleurs de nous en rendre mieux compte.

24. Posons

$$-g'(z) = y$$

et supposons que y satisfasse à une équation différentielle de la forme

$$\frac{y'^2}{2} = 2y^3 + u$$

u étant une fonction quelconque de z, connue ou inconnue, qui s'efface devant les deux premiers termes de l'équation lorsque z s'approche d'un pôle de y. En d'autres termes la fonction u est telle que le rapport $\frac{u}{y^3}$ tende vers zéro, lorsque z tend à se confondre avec l'un des pôles de y.

Je vais chercher à déterminer les rayons des cercles dont il faut entourer les pôles pour que la perturbation apportée par eux dans la croissance de y ne se fasse plus sentir en dehors de ces cercles, c'est-à-dire pour que les grandes valeurs de y ne dépendent plus, dans la région respectée, que des théorèmes généraux.

Étudions la fonction y au voisinage de l'un de ses pôles sans nous préoccuper d'ailleurs de savoir dans quelle mesure ce pôle est isolé. Excluant du domaine étudié l'entourage immédiat du pôle, désignons, d'une manière précise, par ϖ et λ deux nombres positifs (qui pourront, en même temps que r dépasser tout nombre donné), et tels que les inégalités

$$(20) \qquad |y| > \varpi \qquad \text{et} \qquad (21) \quad |y| < \varpi\lambda$$

entraînent autour[1] d'un point z_0 où elles sont satisfaites, l'inégalité

$$|u| < \varepsilon\,|y|^3,$$

ε étant un nombre positif donné, arbitrairement petit.

Considérons un chemin $z_0 z$, dont la longueur soit à un facteur fini près égale à $|z_0 - z|$, le long duquel les inégalités (20) et (21) seront supposées satisfaites. On a, le long de ce chemin

$$\frac{y'^2}{4y^3} = 1 + \delta \quad \text{avec} \quad |\delta| < \varepsilon.$$

D'où, par intégration

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y_0}} = (1 + \delta_1)(z - z_0) \qquad |\delta_1| < \varepsilon_1,$$

le rapport $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ étant fini.

Cela posé, étudions y au voisinage d'un point z_0 où l'on ait

$$y_0 = \varpi\lambda,$$

$|\lambda|$ étant compris entre un nombre fixe supérieur à 1 et un nombre croissant l_1 tel que le rapport $\frac{l_1}{l}$ devienne avec $\frac{1}{r}$ inférieur à tout nombre donné.

Faisons

$$z - z_0 = \frac{\tau}{2\sqrt{y_0}}$$

---

[1] c'est-à-dire le long d'un chemin quelconque issu de z_0, tant que les inégalités (20) et (21) seront satisfaites sur ce chemin.

et supposons que les inégalités (20) et (21) ne cessent pas d'être vérifiées le long du chemin $z_0 z$. On aura en z,

$$(22) \qquad \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{(1+\delta_1)\tau + 1}{\sqrt{y_0}}.$$

Le numérateur du second membre aura un module fini (non infiniment petit), si τ est, dans son plan, en dehors d'un cercle de rayon fini ayant son centre au point -1. Il faut pour cela que z soit en dehors d'un cercle γ qui a son centre au point $z_0 - \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$ et son rayon égal à $\frac{h}{\sqrt{\varpi|\lambda|}}$, ($h$ positif fini; par exemple $h < \frac{1}{2}$, de sorte que le point z_0 est en dehors du cercle γ).

Soit alors z en dehors de γ et à une distance de son centre égale à $\frac{k}{\sqrt{\varpi|\lambda|}}$ (k positif). On déduit de (22) les inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{|y|}} > \frac{(1-\varepsilon_1)k}{\sqrt{\varpi|\lambda|}},$$

ou

$$(23) \qquad |y| < \frac{\varpi|\lambda|}{(1-\varepsilon_1)^2 k^2}$$

et

$$(24) \qquad |y| > \frac{\varpi|\lambda|}{(1+\varepsilon_1')^2 k^2} \qquad \left(\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1} \text{ fini}\right).$$

Pour que les inégalités (23) et (24) soient vérifiées le long d'un chemin ne traversant pas γ, il suffit que les inégalités (20) et (21) ne cessent pas d'être vérifiées le long de ce chemin. Or, d'après les hypothèses faites sur λ l'inégalité (23) entraîne nécessairement l'inégalité (21) lorsque r est assez grand. D'autre part, l'inégalité (20) est une conséquence de l'inégalité (24) tant que l'on a

$$(1+\varepsilon_1')^2 k^2 < |\lambda|.$$

Considérons alors un cercle σ de centre z_0 et de rayon égal à $\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{\varpi}}$. Le long d'un chemin $z_0 z$ (ne pénétrant pas dans γ) intérieur à σ, les inégalités (23) et (24) entraînent (20) et (21), et d'autre part ces inégalités,

satisfaites en z_0, ne peuvent cesser d'être vérifiées avant (20) et (21). Elles sont donc satisfaites dans toute la portion du cercle σ extérieure au cercle γ.

Désignons maintenant par a un nombre positif qui croîtra indéfiniment avec r, mais moins vite que l_1 (c'est-à-dire tel que le rapport $\frac{l_1}{a}$ croisse aussi indéfiniment), et traçons à l'intérieur de σ un cercle concentrique à γ ayant pour rayon $\frac{1}{(1-\varepsilon_1)\sqrt{a\varpi}}$. Je remplacerai ce cercle, pour simplifier, par le plus petit cercle c de centre z_0 qui le contient, cercle dont le rayon [1] est manifestement supérieur à $\frac{1}{(1-\varepsilon_2)\sqrt{a\varpi}}$ ($\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ fini). Lorsque z est sur le contour du cercle c, on a

$$k \geq \frac{1}{1-\varepsilon_1}\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}.$$

On aura par suite sur ce contour, en vertu de (23), *l'inégalité*

$$|y| < a\varpi. \tag{25}$$

Si maintenant nous sortons du cercle c pour nous rapprocher du contour de σ, le nombre k qui figure dans l'inégalité (23) continuera à croître, et l'inégalité (25) ne cessera pas d'être vérifiée. Elle est donc vérifiée dans toute la couronne comprise entre c et σ.

Cela posé, considérons la couronne D limitée par les cercles de rayon r_1 et ηr_1 (η nombre fini plus grand que 1, par exemple $\eta = 2$) ayant leur centre à l'origine. Je supposerai que l'on sache déjà (par exemple en vertu du théorème du § 18) que *l'on ne peut pas avoir dans toute la couronne D*

$$|y| > \varpi l_1.$$

Si l'inégalité (25) n'est pas satisfaite dans toute la couronne, on pourra sûrement trouver à son intérieur un point z_0 où l'on aura

$$a\varpi \leq |y| < \varpi l_1.$$

A ce point correspondront un cercle γ_1, un cercle c_1, de rayon supérieur

[1] Le rayon de c deviendra infiniment petit par rapport au rayon de σ lorsque r et a augmenteront indéfiniment.

à $\frac{1}{\sqrt{a\varpi}}$, entourant z_0 et γ_1 et un cercle σ_1 entourant c_1. Sur le contour de c_1 on aura l'inégalité (25).

Supposons encore qu'en dehors du cercle c_1, l'inégalité (25) cesse d'être vérifiée en certains points de la couronne D. Joignons l'un de ces points, z_1, au contour de c_1 par un chemin (extérieur à c_1) sur lequel y est continu. Il existe nécessairement sur ce chemin un point z_0' ou $|y|$ est compris entre $a\varpi$ et ϖl_1; nous construirons alors comme plus haut un cercle c_2 de rayon supérieur à $\frac{1}{\sqrt{a\varpi}}$ entourant z_0', et sur le contour duquel on aura l'inégalité (25). *Ce cercle est tout entier extérieur au cercle c_1;* en effet, d'après ce qui précède, le point z_0' ne peut se trouver à l'intérieur du cercle σ_1, concentrique à c_1; or le rapport du rayon de σ_1 à celui de c_1 augmente indéfiniment avec r.

Nous répéterons la même opération autant de fois qu'il sera nécessaire. S'il existe dans D, en dehors des cercles c déjà tracés, un point z_1 où l'on n'ait pas l'inégalité (25), nous en conclurons (en joignant z_1 au contour d'un cercle c) qu'il existe encore (dans D) en dehors des cercles c, un point où $|y|$ est compris entre $a\varpi$ et ϖl_1; nous entourerons alors ce point d'un nouveau cercle c, qui est extérieur à tous les autres, et sur le contour duquel on aura l'inégalité (25). Lorsque l'opération aura été répétée un certain nombre[1] fini de fois il n'existera certainement plus de point z_1 en dehors des cercles c; en effet nous avons une limite inférieure des rayons de ces cercles, et nous savons d'autre part, qu'ils sont tous intérieurs les uns aux autres; le nombre des cercles c que peut contenir la couronne D est donc nécessairement fini. Ainsi lorsque nous aurons achevé la construction des cercles c, nous pourrons affirmer que *l'inégalité* (25) *est satisfaite en tout point de la couronne D intérieur à ces cercles.*

Appliquons maintenant à la fonction y le théorème du § 23. Pour cela, traçons dans la couronne D une courbe fermée Γ entourant l'origine qui sera assujettie aux deux conditions suivantes: elle ne traversera aucun

[1] Tous ces cercles c_1 sont contenus à l'intérieur d'une aire égale à $\pi\eta'^2 r_1^2$ (η' fini), et l'aire de chacun d'eux est supérieure à $\frac{\pi}{a\varpi}$. Le nombre des cercles c est donc plus petit que $\eta'^2 a\varpi r_1^2$.

cercle c et sa longueur sera proportionnelle à r_1. Pour constituire la courbe Γ, nous tracerons par exemple un cercle C ayant son centre à l'origine et son rayon égal à $\eta_1 r_1$ $(1 < \eta_1 < \eta)$, et si ce cercle rencontre un cercle c_i aux points $a_i b_i$, nous substituerons à l'arc $a_i b_i$ de C le plus petit arc $a_i b_i$ de c_i. Les cercles c étant tous intérieurs les uns aux autres, la longueur du contour Γ ainsi formé sera inférieure à $\eta_1 \pi^2 r_1$.

D'après la proposition du § 23, on aura, en une infinité de points du contour Γ

$$|y| > \frac{1}{\eta_1 \pi^2} \frac{n'}{r_1^2}$$

n' désignant le nombre des pôles dont le module est inférieur à r_1. Nous en concluons que *l'on* a

$$n' < \eta_1 \pi^2 a r_1^2 \varpi$$

ce qui est le résultat que j'avais en vue.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que la couronne D contenait des points où $|y| > a\varpi$. S'il n'en était pas ainsi, c'est que l'on aurait l'inégalité (25) dans toute la couronne, et l'on arriverait alors immédiatement au résultat précédent.

Je vais appliquer ce résultat aux fonctions méromorphes récemment découvertes par M. Painlevé. La même méthode s'appliquerait évidemment à des équations différentielles plus compliquées que celle dont nous sommes partis. Elle consiste à distinguer parmi les grandes valeurs d'une intégrale celles qui s'expliquent par le voisinage d'un pôle et celles qui dépendent de la nature analytique de la fonction, caractérisée ici par son ordre.

Application aux fonctions entières de M. Painlevé.

25. M. Painlevé a déterminé récemment toutes les équations différentielles de la forme

$$y'' = f(y', y, x),$$

où f est rationnel en y', algébrique en x et y, qui ont leurs points critiques fixes. Parmi ces équations il en est de particulièrement intéressantes: ce sont celles dont les intégrales sont des fonctions *méromorphes* nouvelles qui ne sont réductibles à aucune transcendante connue. Une transformation

rationnelle en y et algébrique en x ramène ces équations à trois types canoniques très simples dont je considérai d'abord les deux premiers, réservant le dernier pour la troisième partie. Ces deux premiers types sont

$$y'' = 6y^2 + z \tag{26}$$

et

$$y'' = 2y^3 + zy + c.$$

M. Painlevé a démontré que les intégrales de ces équations sont des fonctions méromorphes: on les rattache très aisément à des fonctions entières vérifiant une équation différentielle du troisième ordre. On a en effet pour l'équation (25)

$$y = \frac{u'^2 - uu''}{u^2},$$

u étant une fonction entière, et pour l'autre équation

$$y^2 = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}$$

où u est encore une fonction entière. Ces résultats étant acquis, l'étude complète des transcendantes nouvelles y et u doit commencer par la détermination de leur mode de croissance. De cette croissance dépendent en effet et l'approximation avec laquelle u sera donnée par un développement en série limitée, et la répartition des zéros et le genre de cette fonction.

Or les propositions générales que j'ai obtenues plus haut sur la fonction $g(z)$ vont faciliter l'étude de la croissance des fonctions y et u. Cette étude peut d'ailleurs être faite directement, comme l'a fait savoir M. Painlevé dans deux notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

26. Considérons d'abord les intégrales de l'équation (26) et posons

$$y = -g'(z) + l(z) \tag{27}$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires $G(z)$ et $l(z)$ une fonction entière. Nous désignerons par n' le nombre des pôles de $g(z)$ dont le module est inférieur à r.

Je vais d'abord démontrer que l'on a à partir d'une certaine valeur de r

$$u' < r^{\frac{3}{2}}\theta(r) \tag{28}$$

$\theta(r)$ désignant une fonction croissante quelconque de r qui croîtra, par exemple, comme $\log_q r$ (q entier), ou moins vite encore.

L'équation (26) équivaut à la suivante

$$\frac{y'^2}{2} = 2y^3 + zy - f(z), \qquad f(z) = \int y\,dz. \tag{29}$$

Considérons z à l'intérieur de la couronne D comprise entre les cercles de rayons ηr_1 et r_1 ($\eta > 1$, par exemple $\eta = 2$) et désignons par μ un nombre qui sera fixe dans cette couronne, mais qui deviendra infiniment grand en même temps que r_1. Soit d'autre part ε un nombre donné, arbitrairement petit, inférieur par exemple à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

Si l'on a

$$|y| > \mu\sqrt{r_1}, \tag{30}$$

$$|f(z)| < \varepsilon\mu^3 r_1^{\frac{3}{2}} \tag{31}$$

l'équation (29) se présente sous la forme

$$\frac{y'^2}{4y^3} = 1 + \delta \quad \text{avec} \quad |\delta| < \varepsilon. \tag{32}$$

D'ailleurs, si en un point z_0 on a les inégalités

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\mu^3 r_1^{\frac{3}{2}} \tag{31'}$$

et

$$|y| < \frac{\varepsilon}{k}\mu^3\sqrt{r_1} \qquad (k \text{ positif}) \tag{33}$$

l'inégalité (31) sera satisfaite sur tout chemin continu issu de z_0 et de longueur inférieur à $\frac{k}{2}r_1$ le long duquel on a l'inégalité (33).

Appliquons alors à y les résultats du § 24, en y faisant

$$\varpi = \mu\sqrt{r_1}, \qquad l = \varepsilon\mu^2.$$

Nous appellerons a et l_1 deux nombres compris entre 1 et $\varepsilon\mu^2$, tels que les rapports $\frac{l_1}{a}$ et $\frac{\varepsilon\mu^2}{l_1}$, de même que a, croissent indéfiniment avec r_1.

Cela posé, admettons pour un instant qu'il existe dans la couronne D un point z_0 où l'on ait à la fois

$$a\mu\sqrt{r_1} < |y| < l_1\mu\sqrt{r_1} \quad \text{et} \quad |f(z)| < kl_1\mu r_1^{\frac{3}{2}},$$

k étant un nombre positif fini, inférieur par exemple à l'expression $\frac{\varepsilon\mu^2}{3l_1}$ (qui augmente indéfiniment avec r_1).

Lorsqu'on s'éloigne de z_0, il suffit, pour que l'équation (29) conserve la forme (32) que les inégalités (30) et (31), par suite que les inégalités (30) et (33) restent satisfaites. Nous nous trouvons donc bien dans les conditions prévues au § 24, et nous pouvons entourer z_0 d'une cercle c_1 (dans lequel (30) et (33) sont partout vérifiées, sauf à l'intérieur d'un petit cercle γ que l'on peut toujours contourner), qui a son rayon proportionnel à $(a\mu)^{\frac{1}{2}} r_1^{\frac{1}{4}}$, et sur le contour duquel on aura

$$(34) \qquad |y| < a\mu\sqrt{r_1}.$$

En intégrant y à partir de z_0, on voit que l'on aura sur le même contour

$$|f(z)| < (k+1)l_1\mu r_1^{\frac{3}{2}},$$

car on peut joindre z_0 à un point quelconque de c_1 par un chemin de longueur inférieur à r_1.

Comme au § 24, on pourra entourer c_1 d'un cercle σ_1 concentrique de rayon m fois plus grand (m croissant indéfiniment avec r_1) sur le contour duquel on aura les mêmes inégalités.

Supposons construit le cercle c_1, et qu'il existe dans D, en dehors de c_1 un point où l'on ait les mêmes inégalités qu'en z_0 (k pouvant avoir une valeur plus grande qu'en z_0, mais toujours finie et inférieure, par exemple, à $\frac{\varepsilon\mu^2}{2l_1}$): nous entourons ce point d'un cercle c_2 *extérieur* à c_1 et de même grandeur sur le contour duquel on aura encore l'inégalité (34), et ainsi de suite. Nous avons vu au § 24 que le nombre des cercles c tous extérieurs les uns aux autres que l'on peut ainsi construire est né-

cessairement fini pour une valeur donnée de r_1 (bien entendu, ce nombre augmentera indéfiniment avec c_1). Imaginons alors que ces cercles soient tous construits: je dis que *l'inégalité* (34) *est satisfaite dans toute la portion de la couronne D extérieure aux cercles c.*

Supposons en effet qu'elle ne le soit pas en un point z_1; joignons z_1 au contour de c_1 par un chemin proportionnel[1] à r_1, *extérieur à tous les cercles c* et sur lequel y soit continu. Il existe nécessairement sur ce chemin des points où $|y|$ est compris entre $a\mu\sqrt{r_1}$ et $l_1\mu\sqrt{r_1}$. Soit z_0' le premier point rencontré (à partir du concour de c_1) où il en soit ainsi; $|y|$ ne cessant pas d'être inférieur à $l_1\mu\sqrt{r_1}$ entre le contour de c_1 et z_0', on a nécessairement en ce point

$$|f(z)| < k_1 l_1 \mu r_1^{\frac{3}{2}} \quad (k_1 \text{ positif fini, inférieur à } \frac{\varepsilon\mu^2}{2l_1}).$$

Or, par hypothèse, ces circonstances ne peuvent pas se présenter si z_0' est extérieur à tous les cercles c. Nous en conclurons que l'inégalité (34) est nécessairement vérifiée au point z_1, extérieur à ces cercles. Nous pouvons, par suite, appliquer à y les résultats du § 24, et nous constatons que l'on a

$$u' < ha\mu r_1^{\frac{5}{2}} \qquad (h \text{ positif fini})$$

c'est à dire l'inégalité (28), où l'on fait

$$\theta = ha\mu.$$

Pour établir ce résultat, j'ai admis qu'il existait, dans la couronne D, au moins un point z_0 où les inégalités

$$a\mu\sqrt{r_1} \leq |y| < l_1\mu\sqrt{r_1} \quad \text{et} \quad |f(z)| < kl_1\mu r_1^{\frac{3}{2}}, \quad \left(k < \frac{\varepsilon\mu^2}{3l_1}\right)$$

étaient satisfaites en même temps. Je vais montrer qu'*il existe toujours un tel point z_0, à moins que l'on n'ait dans toute la couronne D*

$$|y| < a\mu\sqrt{r_1}.$$

[1] Il est toujours possible de construire un tel chemin contournant un nombre quelconque de cercles c; voir fin du § 24 et note de la page 180.

Il me suffira, pour cela, de reprendre le raisonnement précédent, en l'appliquant cette fois à tout le cercle C' de rayon ηr_1, qui a son centre à l'origine.

Le cercle C' peut être décomposé en une série de couronnes $D'_1, D'_2, \ldots$ concentriques à D. Si nous excluons de C' un cercle fini entourant l'origine, les couronnes D' seront limitées par les cercles de rayons $r'_1, r'_2, \ldots, \eta r_1$, r'_1 ayant une valeur finie, et les nombres $r'_2, r'_3, \ldots$ étant déterminés par les égalités

$$r'_2 = \eta r'_1, \qquad r'_3 = \eta r'_2, \quad \ldots$$

(η a la valeur fixe supérieure à 1, définie plus haut).

Soit, dans la couronne D'_i, un point où l'on ait

$$a\mu\sqrt{r} \leq |y| < l_1\mu\sqrt{r}, \qquad |f(z)| < kl_1\mu r^{\frac{3}{2}}$$

($r = |z|$; a et μ ayant les valeurs définies plus haut par rapport à r_1).

On aura, a fortiori, en ce point

$$a\mu\sqrt{r'_i} < |y| < l'_1\mu\sqrt{r'_i}, \qquad |f(z)| < kl'_1\mu r'^{\frac{3}{2}}_i$$

en posant

$$l'_1 = \eta^{\frac{3}{2}} l_1.$$

On pourra donc entourer z d'un cercle c' de rayon proportionnel à $(a\mu)^{-\frac{1}{2}} r'^{\frac{1}{4}}_i$, sur le contour duquel on aura

$$|y| < a\mu\sqrt{r'_i}$$

et, a fortiori

$$|y| < a\mu\sqrt{r}.$$

En procédant alors dans chacune des couronnes D' comme nous l'avons fait dans la couronne D, nous pouvons construire dans C' des cercles c' (en nombre fini pour une valeur donnée de r_1), extérieurs les uns aux autres, et tels que les inégalités

$$a\mu\sqrt{r} < |y| < l_1\mu\sqrt{r}, \qquad |f(z)| < kl_1\mu r^{\frac{3}{2}}$$

ne puissent être satisfaites en même temps en aucun point de C' extérieur à ces cercles.

Cela posé, les nombres a et μ (qui croissent indéfiniment avec r_1) peuvent toujours être pris assez grands pour que l'on ait en un point fixe quelconque Z_0

$$|y| < a\mu\sqrt{|Z_0|}, \qquad |f(z)| < a\mu|Z_0|^2 .$$

Eloignons nous alors de l'origine, et considérons un chemin[1] Z_0z proportionnel à $r(=|z|)$ et, ne traversant aucun des cercles c'. Le raisonnement déjà employé plus haut nous montre que *l'on a nécessairement* en z

$$(34) \qquad |y| < a\mu\sqrt{r}.$$

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi nous appellerons Z le premier point du chemin considéré où l'inégalité (34) cesse d'être vérifiée; on a au point Z

$$|y| = a\mu\sqrt{r},$$

et par intégration de Z_0 à Z

$$|f(z)| < k_1 a\mu r^{\frac{3}{2}}, \qquad (k_1 \text{ positif fini}),$$

par suite, a fortiori, si r est assez grand

$$|f(z)| < l_1\mu r^2,$$

puisque le rapport $\frac{l_1}{a}$ est supposé croître indéfiniment avec r. Or par hypothèse ces circonstances ne peuvent pas se présenter si z est extérieur aux cercles c'. Nous en concluons que l'inégalité (34) est satisfaite au point z.

Ce résultat, appliqué bien à la couronne D nous conduit à la conclusion suivante: *ou l'inégalité* (34) *est satisfaite dans toute la couronne: ou il existe dans D des cercles c' et, par suite, des points z_0 répondant aux conditions énoncées.*

C'est bien là ce que j'avais annoncé et l'inégalité (28) est maintenant complètement établie.

[1] Pour construire ce chemin, on peut procéder comme à la fin du § 24. On mène la droite Z_0z, et chaque fois que cette droite coupe un cercle c' aux points a_ib_i, on remplace la corde par la plus petit arc a_ib_i.

De l'inégalité (28) nous déduisons aisément que $l(z)$ se réduit à une constante. Tout d'abord la fonction entière $l(z)$ ne peut être qu'un polynôme. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait, en certains points du contour Γ défini au § 24,

$$\left|l(z)\right| > r_1^m, \quad (m \text{ pouvant dépasser tout nombre donné}),$$

en même temps que l'inégalité (34), ce qui entraînerait nécessairement

$$\left|g'(z)\right| > r_1^{m'},$$

où m' peut dépasser (avec r_1) tout nombre assigné d'avance.

Appliquons maintenant à $g'(z)$ le théorème du § 19 en donnant au nombre H du § 16 la valeur r^{-q} (q positif). Les côtés des petits carrés b définis au § 16 seront inférieurs à $\dfrac{r^{-q+1}}{\sqrt{32n'}}$, et il en résulte que l'on peut faire jouer aux cercles c le rôle des petites aires dont nous avions au § 16 entouré les pôles de la fonction $g'(z)$: en effet, dans l'un quelconque de ces cercles on ne peut rencontrer des pôles qu'à l'intérieur du cercle γ correspondant; les carrés b ombrés autour de ces pôles sont donc tous contenus dans un cercle concentrique à γ et de rayon inférieur à $\dfrac{kn'r^{-q+1}}{\sqrt{n'}}$ (k positif fini), cercle qui est certainement intérieur au cercle c si q est assez grand.

On déduit de là (§ 19), en tenant compte de la valeur de H, que l'on a l'inégalité

$$\left|g'(z)\right| < r_1^m$$

en tout point de la couronne D extérieur aux cercles c. La fonction $l(z)$ est donc bien un polynôme.

Cela posé, le théorème du § 18 nous montre plus précisément que, pour des valeurs de r_1 indéfiniment croissantes, on aura en une infinité de points de la couronne D extérieurs aux cercles c l'inégalité

$$\left|g'(z)\right| < \frac{n'(\log n')^{1+\alpha}}{r_1^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ou} \quad \left|g'(z)\right| < \sqrt{r_1}\,(\log r_1)^{1+\alpha}$$

(α positif arbitrairement petit avec $\dfrac{1}{r_1}$)

On voit que cette égalité n'est compatible avec l'inégalité (34) que si $l(z)$ *est une constante.*

27. $l(z)$ se réduisant à une constante, l'inégalité (28) exprime, par définition, que l'ordre de la fonction entière u est au plus égal à $\frac{5}{2}$. Il est aisé de vérifier que cet ordre est précisément $\frac{5}{2}$.

Il résulte du § 18 que l'on a dans une infinité de régions du plan de la variable z

$$|g'(z)| < h\frac{n'\log n'}{r^2}, \qquad |g'''(z)| < h\frac{n'^2}{r^4}$$

h étant un nombre positif fini. Le module $|y''-6y^2|$ sera donc inférieur (puisque $l(z)$ est une constante) à l'expression

$$h^2\frac{n'^2(\log n')^2}{r^4};$$

en d'autres termes, l'on aura

$$r < h^2\frac{n'^2(\log n')}{r^4} \quad \text{ou} \quad n' > kr^{\frac{5}{2}}(\log r)^{-1} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Nous pouvons affirmer de plus, qu'à partir d'une certaine valeur de r cette inégalité est satisfaite quel que soit r. En effet il résulte des inégalités obtenues au § 20 que s'il n'en était pas ainsi, on aurait dans une infinité de régions du plan

$$|g'(z)| < \varepsilon r^{\frac{1}{2}}, \qquad |g'''(z)| < \varepsilon r$$

ε étant arbitrairement petit, inégalités incompatibles avec l'égalité (26).

28. On a donc, à partir d'une certaine valeur de r

$$kr^{\frac{5}{2}}(\log r)^{-1} < n' < r^{\frac{5}{2}}\theta(r)$$

où k est un nombre fini et $\theta(r)$ une fonction croissant aussi lentement que l'on veut.

Cette double inégalité montre que le module du $n^{\text{ième}}$ pôle de y ou du $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction entière u croît approximativement comme $n^{\frac{2}{5}}$.

L'ordre de la fonction u est $\frac{5}{2}$, son genre est 2. De plus le module maximum (pour $|z| = r$) $M(r)$ de u satisfait, à partir d'une certaine valeur de r à la double inégalité

$$e^{hr^2(\log r)^{-1}} < M(r) < e^{r^2\theta(r)}.$$

La fonction entière u est donc, si l'on adopte la terminologie de M. Borel, à *croissance régulière*.

29. L'étude du second type d'équations à intégrales méromorphes signalé par M. Painlevé conduira à des résultats analogues.

Considérons l'équation

$$y'' = 2y^3 + zy + c. \tag{36}$$

L'intégrale générale de cette équation satisfait, avons-nous dit, à l'égalité

$$y^2 = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}$$

où u est une fonction entière. On a donc

$$y^2 = -g'(z) + l(z)$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires $G(z)$ et $l(z)$ une fonction entière. n' désignant toujours le nombre des pôles de module inférieur à r, je vais d'abord démontrer que l'on a à partir d'une certaine valeur de r

$$n' < r^3\theta(r) \tag{37}$$

$\theta(r)$ désignant une fonction croissante quelconque de r.

L'équation (36) équivaut à la suivante

$$y'^2 = y^4 + 2cy + zy^2 - f(z), \qquad f(z) = \int y^2\,dz. \tag{38}$$

Restant placés dans la couronne D définie au § 26, nous voyons que si l'on a simultanément les inégalités

$$|y^2| > \mu r_1, \tag{39}$$

$$|f(z)| < \varepsilon\mu^2 r_1^2 \tag{40}$$

(μ étant arbitrairement grand avec r_1, ε arbitrairement petit, comparable par exemple à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$), l'équation (38) se présentera sous la forme

$$\frac{y'^2}{y^4} = \frac{1}{4y^6}\left(\frac{dy^2}{dz}\right)^2 = 1 + \delta \quad \text{avec} \quad |\delta| < \varepsilon.$$

D'ailleurs, si en un point z_0 on a les inégalités

$$(40') \qquad |f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\mu^2 r_1^2$$

et

$$(41) \qquad |y^2| < \frac{\varepsilon}{k}\mu^2 r_1$$

l'inégalité (40) sera satisfaite sur tout chemin continu issu de z_0 et de longueur inférieur à $\frac{kr_1}{\varepsilon}$ le long duquel on a l'inégalité (41).

Appliquons à y^2 les résultats du § 24 en y faisant

$$\varpi = \mu r_1, \qquad l = \varepsilon\mu$$

et en appelant a et l_1 deux nombres, compris entre 1 et $\varepsilon\mu$, tels que les rapports $\frac{l_1}{a}$ et $\frac{\varepsilon\mu}{l_1}$, de même que a, croissent indéfiniment avec r_1.

Cela posé, tous les raisonnements faits sur la fonction y du § 24 s'appliquent ici à la fonction y^2, avec cette seule différence que $\sqrt{r_1}$ est remplacé par r_1.

S'il existe dans la couronne D des points z_0 où l'on ait à la fois

$$a\mu r_1 < |y^2| < l_1\mu r_1 \quad \text{et} \quad |f(z)| < kl_1\mu r_1^2$$

(k positif fini, inférieur par exemple à $\frac{\varepsilon\mu}{3l_1}$)

on les entourera de cercles de rayon proportionnel à $(a\mu r_1)^{\frac{1}{2}}$ tous extérieurs les uns aux autres et en dehors desquels on aura

$$|y^2| < a\mu r_1.$$

On en conclura (§ 24) que l'on a

$$u' < ha\mu r_1^2.$$

Considérons d'autre part tout le cercle C' de rayon ηr_1 qui a son centre à l'origine. Dans ce cercle nous pouvons construire des cercles c' (en nombre fini pour une valeur donnée de r_1), extérieurs les uns aux autres, et tels que les inégalités

$$a\mu r < |y^2| < l_1\mu r, \qquad |f(z)| < kl_1\mu r^2 \qquad (r = |z|)$$

ne puissent être satisfaites au même temps en aucun point de C' extérieur à ces cercles. On en conclut qu'il existe nécessairement dans la couronne D des points z_0 satisfaisant aux conditions énoncées plus haut. L'inégalité (37) se trouve ainsi complètemant établie.

De l'inégalité (37) nous déduisons que la fonction entière $l(z)$ est un polynôme du premier degré au plus.

On vérifie en effet comme au § 26 que cette fonction ne peut être qu'un polynôme. D'autre part, le théorème du § 18 montre que pour des valeurs de r, indéfiniment croissantes, on a, en une infinité de points de la couronne D extérieur aux cercles C, l'inégalité

$$|g'(z)| < \frac{n'(\log n')^{1+\alpha}}{r_1^2} \quad \text{ou} \quad |g'(z)| < r_1(\log r_1)^{1+\alpha}$$

(α positif arbitrairement petit).

Or cette inégalité n'est compatible avec l'inégalité

$$|y^2| < a\mu r_1,$$

satisfaite par hypothèse en dehors des cercles c, que si $l(z)$ est du premier degré au plus.

30. Les résultats du paragraphe précédent nous prouvent que l'ordre de la fonction entière u est au plus égal à 3. Nous allons maintenant constater que cet ordre est précisément 3 et, de plus, que le genre de u est 3.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Le polynôme $l(z)$ se réduira à une constante, et l'on aura pour des valeurs r_1 indéfiniment croissantes

$$n'\log n' < \frac{r^3}{\mu},$$

μ étant une fonction croissante de n', égale par exemple à $\log_2 n'$.

Donnons à r l'une de ces valeurs r_1, et considérons la couronne D définie plus haut. Cette couronne contient (§ 18), une infinité de points où l'on a simultanément les inégalités

$$|y^2| < \varepsilon_1 r, \qquad |f(z)| < \varepsilon_1 r_1^2,$$

ε_1 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$ (je supposerai que $\varepsilon_1 > \frac{1}{\mu}$). Considérons plus particulièrement, dans D, un cercle quelconque σ de rayon αr_1, α étant un nombre tel que le rapport $\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$. Nous savons (§ 19, note) qu'il existe à l'intérieur de σ des régions où l'on a

$$(42) \qquad |y^2| < \frac{n' \log n'}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varepsilon_1 r}{\alpha^2} < \varepsilon_1' r, \qquad |f(z)| < \varepsilon_1' r^2$$

(ε_1' tendent vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$).

Cela posé, soit $a_i = r_i e^{\theta_i \sqrt{-1}}$ un pôle situé dans D. Nous mènerons par a_i la droite L qui fait avec l'axe réel un angle égal à $\frac{\pi - \theta_i}{2}$, et nous prendrons pour cercle σ le cercle de rayon αr tangent à L au point a_i, et situé par rapport à L du côté où la partie réelle de z va en croissant.

Considérons dans ce cercle σ la région déterminée par l'angle droit de sommet a_i qui a pour bissectrice un diamètre. Nous pouvons toujours trouver dans cette région un point z_0 où l'on ait les inégalités (42). Suivons alors la fonction y le long de la droite $z_0 a_i$.

y satisfait par hypothèse à l'équation (38) qui donne pour y' une double valeur: je supposerai que l'on parte de z_0 avec la détermination [1]

$$(43) \qquad y' = y\sqrt{y^2 + \frac{c}{y} + z - \frac{f(z)}{y}}.$$

Je vais montrer que si nos hypothèses se trouvaient satisfaites, les fonctions y^2 et $f(z)$ vérifieraient entre z_0 et a_i des inégalités de la forme

$$(42') \qquad |y^2| < \varepsilon_2 r_1, \qquad |f(z)| < \varepsilon_2 r_1^2 \quad (\varepsilon_2 \text{ tendant vers o avec } \tfrac{1}{r_1})$$

[1] Pour appliquer le même raisonnement au cas où le radical serait précédé du signe —, il suffirait de prendre le cercle σ de l'autre côté de la droite L.

ce qui est manifestement absurde, puisque le point a_i est un pôle de ces fonctions.

Pour parvenir à ce résultat prenons ε supérieur à 2α et $\sqrt{2\varepsilon'_1}$ et appelons z_1 le premier point rencontré sur $z_0 a_i$ où l'on ait

$$|y^2| = \varepsilon r_1. \tag{44}$$

On a entre z_0 et z_1 $|y^2| < \varepsilon r_1$, et par suite (puisque la longueur du chemin $z_0 z_1$ est inférieure à αr_1)

$$|f(z_0)| < \varepsilon'_1 r_1^2 + \alpha\varepsilon r_1^2 < \varepsilon^2 r_1^2.$$

On conclut de là qu'au point z_1 l'équation (43) se présente sous la forme

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{z_1}(1 + \delta) \qquad (|\delta| \text{ proportionnel à } \varepsilon). \tag{45}$$

Or il résulte de la position du cercle σ et du point z_0 dans σ que, si l'on désigne par dz l'accroissement de z suivant $z_0 a_i$, le segment $\sqrt{z_1}\,dz$ fait avec l'axe réel un angle compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. L'égalité (45) prouve donc qu'au point z_1 (dans la direction $z_1 a_i$), la partie réelle de $\log y$ est décroissante.

On en conclut que le module $|y^2|$ ne peut atteindre en z_1 la valeur (44); s'il l'atteignait, en effet, il devrait croître en ce point, ou du moins passer par un maximum, ce qui, comme on vient de voir, ne peut avoir lieu. Les inégalités (42') seront donc vérifiées entre z_0 et a_i. Cette conclusion étant absurde, nous reconnaissons que notre hypothèse initiale n'était pas légitime. La fonction entière u est donc bien de genre 3, ce qu'il fallait démontrer.

[1] L'argument de $\sqrt{z_1}$ est égal à $\frac{\theta_i + \alpha'}{2}$, α' étant proportionnel à α; l'argument de dz est compris entre $\frac{\pi - \theta_i}{2} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi - \theta_i}{2} + \frac{3\pi}{4}$. L'argument de $\sqrt{z_1}\,dz$ est donc compris entre $\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2}$ et $\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2}$.

TROISIÈME PARTIE.

Le module maximum d'une fonction de genre infini.

1. L'étude des fonctions entières les plus générales ne peut évidemment pas conduire à des résultats aussi précis que celle des fonctions de genre fini. Il n'est, cependant pas inutile de remarquer que les méthodes employées dans ce travail s'appliquent encore aux fonctions de genre infini. Nous constaterons ainsi, qu'on peut toujours déduire les propriétés fondamentales d'une fonction entière de son développement en produit infini. Ce développement se prête aussi bien à une étude systématique que le développement en série de puissances, qui, a été comme on sait, le principal objet des travaux de M. HADAMARD.

Soit $F(z)$ une fonction entière quelconque, r_i le module de son $i^{\text{ème}}$ zéro. Cherchons d'abord si l'on pourra, sans passer par l'intermédiaire du développement en série obtenir un résultat équivalant au théorème fondamental de M. HADAMARD sur la limite inférieure du module r_i. Le théorème de M. SCHOU et la proposition équivalente que j'ai établie au § 14 de la première partie s'appliquent aux fonctions de genre infini, mais donnent dans ce cas des limites beaucoup trop basses. Heureusement un procédé très simple va nous permettre de compléter les résultats obtenus dans la première partie.

2. Désignons par n' le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur à $\frac{r}{2+\alpha}$ (α positif). Nous avons démontré (première partie, § 17) que l'on a sur une infinité d'arcs du cercle C de rayon r ayant son centre à l'origine l'inégalité

$$|F(z)| > e^{hn} \tag{1}$$

h étant égal à $\log(1+\alpha)$. C'est cette proposition que je me propose de préciser.

Appliquons-la, dans ce but, à la fonction

$$F_1(z^2) = F(z)F(-z),$$

n_1' désignant le nombre des zéros de $F_1(z^2)$ dont le module est inférieur à $\frac{r}{2+\alpha}$, c'est-à-dire le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inferieur à $\frac{r}{\sqrt{2+\alpha}}$, on aura

$$|F_1(z^2)| > e^{hn_1'}$$

pour une infinité de valeurs $r^2 e^{\theta\sqrt{-1}}$ de z^2. On a donc, lorsque z^2 prend l'une de ces valeurs l'une des deux inégalités

$$(2) \qquad |F(z)| > e^{\frac{h}{2}n_1'}, \qquad |F(-z)| > e^{\frac{h}{2}n_1'}$$

en d'autres termes, on a l'inégalité (2) sur une infinité d'arcs du cercle C.

Appliquons maintenant ce résultat à la fonction $F_1(z^2)$. Nous en déduisons pour $|F(z)|$ une nouvelle limite et ainsi de suite indéfiniment.

Nous constatons finalement que l'on a, quel que soit q, en une infinité de points du cercle C

$$(3) \qquad |F(z)| > e^{\frac{h}{2^q}n_q'}$$

n_q' désignant le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur à $r(2+\alpha)^{\frac{-1}{2^q}}$.

Soit β un nombre inférieur à 1. Quel que soit r, on peut trouver un entier q tel que l'on ait

$$2^q = kn_q'^{\beta} \qquad \left(\frac{1}{2} < k < 1\right),$$

et par suite

$$\frac{n_q'}{2^q} = \frac{1}{k} n_q'^{1-\beta}.$$

Désignons alors par $\varpi(r)$ le nombre des zéros de module inférieur à r: on pourra énoncer la proposition suivante:

On a, en une infinité de points du cercle de rayon r, l'inégalité

$$(4) \qquad |F(z)| > e^{hn_{\frac{1}{2}}^{1-\beta}}, \qquad (h \text{ positif fini}),$$

n_ε désignant le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur à $r(1-\varepsilon)$ et ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$ plus vite que la fonction

$$1-(2+\alpha)^{\left[\varpi\left(\frac{r}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{\beta}}}.$$

On peut se débarrasser de l'exposant $1-\beta$ en posant $n_\varepsilon^{1-\beta} = n_{\varepsilon+\varepsilon_1}$, et le nombre ε_1 décroît alors d'autant plus rapidement que la croissance de la fonction $\varpi(r)$ est elle-même plus rapide. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$n_0 = \varpi(r) = e^{e^{e^r}}, \qquad \beta < \frac{1}{2}.$$

On aura

$$n_\varepsilon^{1-\beta} > e^{e^{2\beta+e^{(1-\varepsilon)r}}} > e^{e^{e^{(1-\varepsilon)r+\log\left[1-\frac{2\beta}{e^{r(1-\varepsilon)}}\right]}}}$$

par suite

$$n_\varepsilon^{1-\beta} > n_{\varepsilon+\varepsilon_1}, \quad \text{si} \quad \varepsilon_1 = r^{-1}\log\left(1-2\beta e^{-r(1-\varepsilon)}\right).$$

Si n_ε croissait plus vite qu'une fonction formée d'un nombre quelconque d'exponentielles supérieures, il en serait de même de l'inverse de ε_1.

Nous voyons qu'il était indispensable de préciser ainsi la proposition établie dans la première partie. En effet, si $F(z)$ est de genre infini, le rapport de n_ε au nombre n' qui figurait dans la limite assignée aux fonctions de genre fini, peut dépasser tout nombre donné d'avance.

3. Abordons maintenant la question inverse et cherchons à déterminer une limite supérieure du module maximum (pour $|z| = r$) d'un produit de facteurs primaires de genre infini. Soit

$$G(z) = \prod\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\ldots+\frac{1}{\rho_i}\left(\frac{z}{a_i}\right)^{\rho_i}}$$

un tel produit, $M(r)$ son module maximum. L'étude de ce produit présente une difficulté. Si l'on se donne la suite de zéros a_i, on peut former d'une infinité de manières le produit convergent $G(z)$, puisque les ρ_i sont des entiers quelconques, choisis seulement de telle façon que la série

$$\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

soit absolument convergente. Il est bien certain alors que la croissance de $G(z)$ pourra dépendre essentiellement du choix des nombres ρ_i au lieu d'être déterminée par la densité des zéros a_i, comme il arrivait pour les produits de genre fini. Mais est-il possible de choisir les nombres ρ_i de manière à obtenir une limite supérieure se rapprochant de la limite inférieure assignée à $M(r)$ au paragraphe précédent?

Dans son mémoire *sur les zéros des fonctions entières*, M. Borel a fait remarquer que la valeur i de ρ_i indiquée par Weierstrass était beaucoup trop élevée. Se proposant d'étudier les fonctions à *croissance très rapide*, fonctions telles que l'on ait pour une infinité de valeurs de i indéfiniment croissantes l'inégalité

$$r_i < \log_k i$$

quelque grand que soit le nombre k, M. Borel pose

$$\rho_i = (\log i)^2$$

puis déterminant le nombre n par l'égalité

$$r = r_n - \frac{1}{(\log n)^\alpha}$$

où α est un nombre plus petit que 1, il montre que le module maximum $M(r)$ est celui d'une fonction d'ordre ρ_n. En d'autres termes, l'on a

$$(5) \qquad M(r) < e^{r^{(\log n)^2}}.$$

Le résultat subsisterait d'ailleurs si l'on remplaçait 2 par un autre nombre plus grand que 1.

Cette limite diffère de celle que nous avions obtenue pour les fonctions de genre fini. Il importe donc de se demander s'il n'est pas possible de l'en rapprocher. Mais pour parvenir à des inégalités un peu précises, j'éviterai de me placer dans le cas le plus général. J'insisterai au contraire sur les types de fonctions qui nous apparaissent comme les plus simples après les fonctions de genre fini; leur étude semble être en effet le point de départ naturel d'une théorie complète des fonctions entières de genre infini.

4. Les résultats que je viens de rappeler suggèrent une première remarque. En faisant $\rho_i = (\log i)^{1+\alpha}$, nous donnons encore à ρ_i une valeur

beaucoup plus grande qu'il n'est nécessaire pour assurer la convergence de la série $\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$. Il suffirait évidemment de prendre

$$\rho_i = (1+\alpha)\frac{\log i}{\log r_i}.$$

Mais il ne faudrait pas conclure de là que le module maximum $M(r)$ croîtra moins vite si l'on donne à ρ_i cette valeur plutôt qu'une valeur plus élevée. C'est, chose curieuse, précisément le contraire qui arrivera. Mais, ici, une distinction s'impose entre les diverses fonctions de genre infini.

Considérons tout d'abord la classe des fonctions entières définies par la propriété suivante: il existe un nombre positif σ tel que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > (\log i)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{6}$$

Cette classe de fonctions est celle qui se rapproche le plus de la classe des fonctions de genre fini, et elle mérite une étude spéciale; nous la rencontrerons tout à l'heure dans une application. J'appellerai fonctions de *type exponentiel simple* les fonctions pour lesquelles l'inégalité (6) est satisfaite, et je dirai que σ est l'ordre exponentiel de la fonction, en supposant que le nombre σ ait été pris aussi petit que possible.

5. Cela posé, désignons par N le nombre des zéros de $G(z)$ dont le module est inférieur à $r(1+k)$, (k positif fini).

P_{ρ_i} représentant le facteur primaire relatif au zére a_i on sait, d'après Weierstrass, que l'on a, pour $i > N$

$$|P_{\rho_i}| < e^{b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i+1}} \qquad (b \text{ positif fini}).$$

Lorsque $i < N$, on a, si $r_i > r$

$$|P_{\rho_i}| < e^{2+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{\rho_i}} < e^{b\log\rho_i}, \qquad (b \text{ positif fini}).$$

et, si $r_i < r$

$$|P_{\rho_i}| < e^{\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}}.$$

Il résulte de là que

$$(7) \qquad M(r) < e^{b\log\rho_N \sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} + b\sum\limits_1^n \log\rho_i}, \qquad r_n \leq r.$$

Si donc l'on a l'inégalité (6) en même temps que

$$\rho_i < (\log i)^{1+\alpha}$$

$\log\rho_i$ sera inférieure à $\sigma(1+\alpha)\log r_i$, et l'on aura évidemment, à partir d'une certaine valeur de r, l'inégalité

$$M(r) < e^{h\left[\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}\right]\log r}, \qquad (h \text{ positif fini}).$$

6. Si $G(z)$ est un produit de type exponentiel simple et d'ordre exponentiel σ, je prendrai pour ρ_i *l'entier le plus voisin* de $\sigma\log i$. Nous allons constater que ce choix est particulièrement favorable. Supposons que r_i satisfasse à partir d'une certaine valeur m de i à l'inégalité

$$r_i > \lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

λ et σ étant des nombres positifs.

Nous aurons

$$\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \Sigma\chi(i)$$

en posant

$$\chi(i) = e^{\sigma\log i\left(\log\frac{r}{\lambda} - \frac{1}{\sigma}\log_2 i\right)}.$$

Déterminons alors les nombres n_1 et n_2 par les égalités

$$\log\frac{r}{\lambda} - \frac{1}{\sigma}\log_2 n_1 = \frac{\alpha}{\sigma},$$

$$\log\frac{r}{\lambda} - \frac{1}{\sigma}\log_2 n_2 = -\frac{\alpha'}{\sigma}$$

α et α' étant des nombres positifs d'ailleurs arbitrairement petits.

Lorsque $i > n_2$, on a

$$\frac{\chi'(i)}{\chi(i)} = \frac{1}{i}\left(\sigma\log\frac{r}{\lambda} - \log_2 i - 1\right) < -\frac{1+\alpha'}{i}.$$

D'ou $\alpha'\chi(i) < -[\chi(i) + i\chi'(i)]$

$$\int_{n_2}^{\infty} \chi(x)dx < \frac{1}{\alpha'} n_2 \chi(n_2) = \frac{n_2^{1-\alpha'}}{\alpha'}.$$

D'autre part, si $i < n_1$, on a à partir d'une certaine valeur m de i

$$\frac{\chi'(i)}{\chi(i)} > -\frac{1-\alpha}{i}.$$

D'où $\alpha\chi(i) < \chi(i) + i\chi'(i)$

$$\int_{m}^{n_1} \chi(x)dx < \frac{1}{\alpha} n_1 \chi(n_1) = \frac{n_1^{1+\alpha}}{\alpha}.$$

Les valeurs de i comprises entre n_1 et n_2 sont en nombre inférieur à n_2 et pour ces valeurs de i, l'on a

$$\chi(i) < \chi(n_1).$$

Nous aurons donc finalement, en supposant α et α' du même ordre de grandeur

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho} < \frac{h}{\alpha} n_2 \chi(n_1)$$

où h est un nombre positif fini. n_1 et n_2 auront une signification très simple si r_i croît précisément comme $\lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$. On a dans ce cas

$$\log r - \log r_{n_1} = \frac{\alpha}{\sigma}, \qquad \log r - \log r_{n_2} = -\frac{\alpha'}{\sigma};$$

n_1 représente donc le nombre des zéros a_i dont le module est inférieur à $e^{-\frac{\alpha}{\sigma}} r$, n_2 le nombre des zéros de module inférieur à $e^{\frac{\alpha'}{\sigma}} r$, α et α' étant arbitrairement petits.

Dans le cas général, on aura

$n_2 = e^{[illegible]}$, $\chi(n_1) = n_1 = e^{[illegible]}$.

Or il est manifeste que, quelque petit que soit ε, on peut toujours déterminer deux nombres α et α', égaux ou du même ordre de grandeur, tels que l'on ait

$$e^{\alpha'} + \alpha e^{-\alpha} - \left(\frac{\lambda}{r}\right)^\sigma \log \alpha < 1 + \varepsilon$$

à partir d'une certaine valeur de r. On peut dès lors énoncer la proposition suivante:[1]

Quelque petit que soit le nombre ε, on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$M(r) < e^{e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^\sigma}}. \tag{8}$$

7. En suivant la méthode employée dans la première partie, on peut généraliser encore cette proposition. Soit $\psi(i)$ une fonction holomorphe, réelle et positive telle que le rapport $\dfrac{\psi(i)}{(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}}$ soit croissant à partir d'une certaine valeur de i et telle que l'on ait

$$r_i > \lambda\psi(i).$$

On posera

$$\chi(i) = \left[\frac{r}{\lambda\psi(i)}\right]^{\sigma \log i}$$

et l'on déterminera les nombres n_1 et n_2 par les égalités

$$\log\frac{r}{\lambda} - \log\psi(n_1) = \frac{\alpha}{\sigma},$$

$$\log\frac{r}{\lambda} - \log\psi(n_2) = -\frac{\alpha'}{\sigma}.$$

---

[1] Si l'on avait donné à ρ_i une valeur moins élevée, par exemple la valeur $(1+\beta)\dfrac{\log i}{\log r_i}$, qui suffit à assurer la convergence de la série $\sum \left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$, la valeur de i à partir de la quelle cette série eût décrir aussi vite que $\Sigma i^{-1-\alpha'}$ eût été très supérieure à n_2, et la limite supérieure de cette série se fût trouvée augmentée.

On obtiendra alors, comme au paragraphe précédent, les inégalités

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < h n_2 \chi(n_1), \qquad M(r) < e^{\frac{h}{\alpha}[n_2\chi(n_1)]^{1+\varepsilon}}.$$

8. Nous allons maintenant compléter la proposition du § 6, en démontrant un théorème analogue à celui du § 20 de la première partie.

Considérons le produit $G(z)$ du § 5, pour lequel on a

$$r_i > \lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Je dis que si l'on a

$$M(r) > e^{e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}} \tag{9}$$

on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$r_i < (1+\varepsilon)\lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{10}$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Posons en effet

$$\psi(i) = \lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

et supposons que l'on ait, pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} = K\psi(n_1), \qquad K > 1.$$

Nous poserons

$$r = \psi(n) = K^{1-\beta}\psi(n_1), \qquad 0 < \beta < 1$$

et

$$\psi(n_2) = K\psi(n_1).$$

Si l'on se reporte aux calculs du § 4, on voit, qu'il suffit, pour que r et n_2 prennent ces valeurs, que l'on ait fait

$$\alpha = (1-\beta)\sigma\log K, \qquad \alpha' = \beta\sigma\log K.$$

D'ailleurs

$$n = n_1^{K^{(1-\beta)\sigma}}, \qquad n_2 = n^{K^{\beta\sigma}}.$$

On a, par suite, les inégalités suivantes:

$$\sum_{m}^{n_1} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \frac{n_1^{1+\alpha}}{\alpha} < \frac{\eta}{\alpha} n^{(1+\alpha)\varepsilon^{-\alpha}}, \qquad (\eta \text{ fini})$$

$$\sum_{n_2+1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \frac{n_2^{1-\alpha'}}{\alpha'} < \frac{\eta'}{\alpha'} n^{(1-\alpha')\varepsilon^{\alpha'}}, \qquad (\eta_1 \text{ fini})$$

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \sum_{n_1+1}^{n_2} i^{\sigma \log\left(\frac{r}{r_{n_1}}\right)} < \eta_2 \frac{n^{(1-\alpha')\varepsilon^{\alpha'}}}{1-\alpha'}, \qquad (\eta_2 \text{ fini}),$$

puisque $\sigma \log \frac{r}{r_{n_1}} = \alpha'$.

Or on vérifie sans peine que, quelque petits que soient α et α', on peut trouver un nombre positif ε tel que les seconds membres de ces inégalités soient tous trois inférieurs à $n^{1-\varepsilon}$, à partir d'une certaine valeur de n; l'inégalité (7) du § 5 nous montre alors que l'inégalité (9) ne peut plus être satisfaite. Ainsi l'hypothèse faite sur r_n conduit bien à une contradiction, ce qu'il fallait démontrer.

9. Les fonctions de type exponentiel simple ne constituent encore qu'une classe très particulière parmi les fonctions de genre infini. Mais la méthode précédente permettra d'étudier tout aussi aisément des fonctions croissant de plus en plus rapidement.

Sans insister sur les cas intermédiaires supposons qu'il existe un nombre fini σ tel que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > (\log_2 i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

et prenons pour ρ_i l'entier le plus voisin de $\log i \log_2 i$. Posant, cette fois

$$\chi(i) = e^{\sigma \log i \log_2 i \left(\log r - \frac{1}{\sigma} \log_3 i\right)}$$

nous aurons encore

$$M(r) < e^{\left[\Sigma \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}\right]^{1+\varepsilon}}, \quad (\varepsilon \text{ tendant vers zéro avec } \tfrac{1}{r})$$

et

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \Sigma \chi(i).$$

Nous déterminerons les nombres n_1 et n_2 par les égalités

$$(1 + \log_2 n_1)\left(\log r - \frac{1}{\sigma}\log_3 n_1\right) = \quad \frac{\alpha}{\sigma},$$

$$(1 + \log_2 n_2)\left(\log r - \frac{1}{\sigma}\log_3 n_2\right) = -\frac{\alpha'}{\sigma}$$

α et α' étant deux nombres arbitrairement petits, du même ordre de grandeur.

On a lorsque $i > n_2$

$$\frac{\chi'(i)}{\chi(i)} = \frac{1 + \log_2 i}{i}(\sigma \log r - \log_3 i) - \frac{1}{i} < -\frac{1 + \alpha'}{i},$$

$$\int_{n_2}^{\infty} \chi(i)\,di < \frac{1}{\alpha'} n_2 \chi(n_2).$$

De même

$$\int_{m}^{n_1} \chi(i)\,di < \frac{1}{\alpha} n_1 \chi(n_1).$$

Nous aurons donc finalement

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \frac{h}{\alpha} n_2 \chi(n_1)$$

h étant un nombre positif fini. Or on a

$$n_2 = e^{e^{r^\sigma e^{\alpha'(1+\log_2 n_2)^{-1}}}}, \qquad n_1 = e^{e^{r^\sigma e^{-\alpha(1+\log_2 n_1)^{-1}}}}.$$

On déduit aisément de là que le module maximum $M(r)$ satisfait à l'inégalité

$$M(r) < e^{e^{(1+\varepsilon)r^\sigma}}$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Ainsi la méthode de sommation qui vient d'être exposée a une portée générale et elle permet d'étudier la série $\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$, par suite le module $M(r)$, quelque lentement que croisse le module r_i du zéro de rang i.

La dérivée logarithmique d'une fonction de genre infini.

10. La dérivée logarithmique du produit infini $G(z)$ défini plus haut a pour expression

$$g(z) = \sum \left(\frac{z}{a_i}\right)^{\rho_i} \frac{1}{z - a_i}.$$

Proposons-nous d'étudier le module maximum de $g(z)$ dans des régions convenablement choisies du plan de la variable z.

Si l'on désigne par n' le nombre des points a_i dont le module est inférieur à r, on peut affirmer que l'on a sur une infinité d'arcs du cercle C de rayon r

$$|g(z)| > \frac{n'}{r}, \qquad |g'(z)| > \frac{n'}{r^2}, \quad \ldots .$$

La démonstration qui nous avait permis d'établir ces inégalités dans le cas des fonctions de genre fini subsiste ici, en effet sans modification. Les conséquences que nous avions tirées de ces inégalités (au § 24) resteront vraies également.

11. Cherchons maintenant à limiter la croissance de $g(z)$, en supposant que $G(z)$ soit de type exponentiel simple. Considérons dans ce but une aire proportionnelle à r^2, par exemple [1] un carré A de côté Hr. A l'intérieur de ce carré se trouvent une infinité de régions (Deuxième Partie § 17) par exemple des cercles de rayon proportionnel à $\frac{Hr}{\sqrt{n'}}$, dans lesquels on a

$$\left| \sum \left(\frac{z}{a_i}\right)^{\rho_i} \frac{1}{z - a_i} \right| < \frac{hn'}{Hr}, \qquad (h \text{ positif fini}),$$

la somme $\sum$ étant étendue aux divers pôles contenus dans l'aire A. D'ailleurs la somme des régions en question est avec l'aire totale A dans un rapport fini.

Dans les mêmes conditions, la somme

$$\sum \frac{1}{|z - a_i|^2} \left| \frac{z}{a_i} \right|^{\rho_i}$$

[1] La forme de l'aire A n'importe pas ici. Remarquons qu'elle peut être contenue tout entière à l'intérieur d'un angle fini ω ayant pour sommet l'origine.

étendue aux pôles contenus dans A est inférieur à $\frac{hn' \log n'}{H^2 r^2}$, la somme

$$\sum \frac{1}{|z - a_i|^3} \left| \frac{z}{a_i} \right|^{\rho_i}$$

est infèrieure à $\frac{hn' \sqrt{n'}}{H^3 r^3}$, et ainsi de suite.

Ces divers résultats, obtenus dans la seconde partie, s'appliquent en effet à la dérivée logarithmique d'une fonction entière quelconque, de genre fini ou infini.

Soit maintenant a_i l'un quelconque des pôles de $g(z)$ situés en dehors du carré A: on aura

$$|z - a_i| > k \frac{r}{H} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Le module de la somme $\sum$ relative à ces divers pôles est donc, pour la dérivée logarithmique, inférieur à

$$\frac{k}{Hr} \sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}.$$

Cette série est celle dont nous avons évalué la somme aux paragraphes précédents. Sa limite supérieure sera

$$\frac{h\varphi(r)}{Hr} \qquad (h \text{ positif fini})$$

si l'on désigne par $e^{\varphi(r)}$ la limite assignée au module maximum $M(r)$ de $G(z)$.

Si $\varphi(r)$ croît plus vite qu'une puissance quelconque de r on peut prendre comme aire A un carré de côté $\frac{r}{r_m}$ (m étant arbitrairement grand, lorsque r est lui-même assez grand). Tous les points situés dans ce carré sont à une distance de l'origine compris entre r et $r(1 + \varepsilon)$, et l'on a

$$\frac{n'}{Hr} < n'^{1+\varepsilon'}$$

ε et ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Supposons alors, en particulier, que $G(z)$ soit de type exponentiel simple et que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > \lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}} \qquad (\lambda \text{ et } \sigma \text{ positifs finis});$$

nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Quelque petit que soit ε, on a, dans une infinité de régions s'éloignant indéfiniment de l'origine

$$|g(z)| < e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}};$$

on constaterait de même que l'on a, dans les mêmes régions

$$|g'(z)| < e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}},$$

$$|g''(z)| < e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}} + \mu \left(\frac{n'}{r}\right)^{n'}$$

. . . .

μ étant un nombre positif *proportionnel à* r^m (m fini).

Nous ajouterons qu'un angle quelconque ω dont le sinus est comparable à $\frac{1}{r^m}$, en d'autres termes un angle arbitrairement petit contient une infinité de régions jouissant des propriétés énoncées.

12. On peut compléter cette proposition comme nous l'avons fait au § 8 pour celle du § 6.

Désignons par $m(r)$ le module maximum de $g(z)$ dans les régions définies plus haut. *L'inégalité*

$$m(r) > e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}$$

entraîne, à partir d'une certaine valeur de r

$$n' > e^{(1-\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}$$

quelque petit que soit ε.

En d'autres termes, nous pouvons affirmer que si cette dernière inégalité cessait d'être vérifié pour des valeurs indéfiniment croissantes de r, on aurait dans des régions indéfiniment éloignées

$$m(r) < e^{(1-\varepsilon')\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\rho}}, \qquad (\varepsilon' > 0).$$

On peut aussi agrandir les régions où les résultats précédents sont valables en multipliant les limites supérieures assignées à $|g(z)|$, $|g'(z)|$, ... par une fonction croissante de n', par exemple, par $\log n'$ ou $\log\log n'$. Les nouvelles régions seraient alors telles que le rapport de leur somme à l'aire totale A tende vers l'unité quand r augmente indéfiniment.

Ajoutons enfin que l'on obtiendrait les mêmes limites supérieures si l'on remplaçait la fonction $g(z)$ et ses dérivées par une fonction méromorphe d'un type plus général:

$$F(z) = \sum \frac{b_i}{(z - a_i)^k} \left(\frac{z}{a_i}\right)^{p_i} + H(z),$$

les nombres b_i étant tous finis ainsi que l'entier k, et $H(z)$ étant une fonction entière dont le module maximum est supposé ne pas croître plus vite que le module de la somme Σ.

13. Ces divers propositions donneront lieu aux mêmes applications que celles de la seconde partie. Ils vont nous servir à étudier le troisième type d'équations différentielles à intégrales méromorphes qu'a signalé M. Painlevé. Ce type est le suivant

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^z(\alpha y^2 + \beta) + e^{2z}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right) \tag{11}$$

les constantes α, β, α, δ ayant les valeurs

	$\gamma = -1$,	$\delta = 1$,		α, β quelconques,
ou	$\gamma = -1$,	$\delta = 0$,	$\beta = 1$,	α quelconques,
ou	$\gamma = 0$,	$\delta = 0$,	$\alpha = -1$,	$\beta = 1$.

M. Painlevé a démontré que les intégrales de l'équation (11) sont des fonctions méromorphes dans tout le plan. La transcendante y s'ex-

prime par le quotient $\frac{v}{u}$ de deux fonctions entières v et u vérifiant les équations simultanées

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{u''}{u}-\frac{u'^2}{u^2} &= -\frac{ve^z}{u}\left(\frac{\gamma e^z v}{u}+\alpha\right),\\ \frac{v''}{v}-\frac{v'^2}{v^2} &= \frac{ue^z}{v}\left(\frac{\delta e^z u}{v}+\beta\right). \end{aligned}$$

14. Pour étudier les intégrales de l'équation (11) je ferai le changement de variable

$$y=e^{-z}\zeta.$$

L'équation (11) devient

$$e^{-z}(\zeta''-2\zeta'+\zeta)=e^{-z}\frac{(\zeta'-\zeta)^2}{\zeta}+e^z(\alpha e^{-2z}\zeta^2+\beta)+e^{2z}\left(\gamma e^{-3z}\zeta^3+\frac{\delta e^z}{\zeta}\right)$$

ou

$$(13)\qquad \zeta\zeta''=\zeta'^2+\alpha\zeta^3+\gamma\zeta^4+\beta\zeta e^{2z}+\delta e^{4z}.$$

L'avantage de cette nouvelle équation est qu'elle met en évidence la façon dont se comporte la fonction méromorphe ζ au voisinage de l'un de ses pôles.

Si $\gamma=0$, $\alpha=-1$, les termes prépondérants au voisinage d'un pôle quelconque situé à distance finie sont

$$\zeta\zeta''-\zeta'^2-\zeta^3$$

et il est aisé alors de vérifier que tous les pôles sont du second ordre et tous les résidus égaux à 2.

Si au contraire $\gamma=-1$, $\zeta\zeta''$ devient infini comme $\zeta'^2-\zeta^4$, et il en résulte que les pôles sont du premier ordre, le résidu correspondant étant égal à $\pm\sqrt{-1}$.

D'ailleurs, si nous désignons par $f(z)$ la dérivée logarithmique de la fonction entière u, la première équation (12) deviendra

$$(12')\qquad f'(z)=-\gamma\zeta^2-\alpha\zeta.$$

Nous sommes ainsi amenés à distinguer deux cas suivant la valeur de la constante γ.

Considérons d'abord le cas où $\gamma = 0$. On a alors, avons-nous dit $\delta = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et l'équation (13) devient

$$\zeta\zeta'' = \zeta'^2 - \zeta^3 + \zeta e^{2z}, \qquad \zeta = f'(z). \tag{14}$$

Proposons-nous d'étudier la croissance des intégrales méromorphes de cette équation.

15. Nous poserons

$$\zeta' = 2g'(z) + H(z)$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires, et $H(z)$ une fonction entière. Nous désignerons par n' le nombre des pôles de $g(z)$ dont le module est inférieur à r, par ν' le nombre des zéros de $H(z)$ de module inférieur à ηr en supposant que $\eta < \frac{1}{e+1}$.

Un calcul analogue à celui de § 24 de la seconde partie va nous donner d'abord une limite supérieure de n'.

Remarquons d'abord que toute intégrale de (14) satisfait aux équations suivantes

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} + \zeta + \frac{e^{2z}}{\zeta} - 2\int \frac{e^{2z}}{\zeta} = 0, \tag{15}$$

$$\int^z \frac{e^{2z}}{\zeta}\,dz = \int \zeta dz + \frac{\zeta'}{\zeta}, \tag{16}$$

obtenues en multipliant les deux membres de (14) soit par $\frac{\zeta'}{\zeta^3}$, soit par $\frac{1}{\zeta^2}$, et en intégrant: on a par suite aussi

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} - 2\frac{\zeta'}{\zeta} + \zeta + \frac{e^{2z}}{\zeta} - 2\int^z \zeta dz = 0. \tag{17}$$

Cela posé, plaçons-nous à l'intérieur du cercle C de rayon r_1 ayant son centre à l'origine, et désignons par μ un nombre[1] qui croîtra indéfiniment avec r_1, d'ailleurs arbitrairement lentement.

[1] μ a, dans les calculs qui suivent, une valeur fixe dépendant de r_1.

Je dis d'abord qu'en tout pôle a_i de module r_i situé dans C', on a l'inégalité

$$|I(z)| = \left| \int^{z} \frac{e^{2z}}{\zeta}\, dz \right| < 2e^{r+\mu}. \tag{18}$$

Suivons en effet le rayon Oa_i à partir d'un point fixe z_0. Je dis que l'on ne peut avoir simultanément en aucun point de $z_0 a_i$:

$$|\zeta| = e^r, \qquad |I(z)| > 2e^{r+\mu}. \tag{19}$$

On peut toujours prendre μ assez grand pour que cette condition soit satisfaite en z_0. Supposons alors qu'elle cesse de l'être en un point z_2: je vais montrer que l'on aura en ce point

$$|f(z_2)| < \left| \int^{z_2} \zeta dz \right| < e^{r_2+\mu}. \tag{20}$$

L'égalité (17), où l'on fait $|\zeta| = |\zeta_2| = e^{r_2}$, donnera par suite pour $\left|\frac{\zeta'_2}{\zeta_2}\right|$ une limite supérieure proportionnelle à $e^{\frac{1}{2}(r_2+\mu)}$, et l'on en conclura que l'inégalité (18) est vérifiée au point z_2, ce qui nous conduit à une contradiction.

Pour calculer une limite supérieure de $|f(z)|$ le long de $z_0 z_2$, observons d'abord que dans les intervalles partiels où $|\zeta| < e^{r+\mu}$, la variation de $|f(z)|$ est plus petite que celle de $e^{r+\mu}$. Soit maintenant z' un point où $|\zeta| = e^{r'+\mu}$. Puisque, d'après nos hypothèses, les relations (19) ne sont jamais satisfaites pour $r_0 < r < r_2$, l'inégalité (18) sera nécessairement vérifiée au voisinage de z', tant que $|\zeta| > e^r$. L'équation (15) donnera alors, pour $|\zeta| > e^r$

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta^{\frac{3}{2}}} \right| < (2+\alpha)e^{\frac{\mu}{2}} \quad \left(\alpha > 0, \text{ arbitrairement petit avec } \frac{1}{\mu}\right).$$

Donc

$$\frac{1}{2\sqrt{|\zeta|}} < \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(r'+\mu)} + (2+\alpha)e^{\frac{\mu}{2}}(r - r').$$

On en conclut que l'inégalité $|\zeta| > e^r$ est satisfaite, autour de r', dans un intervalle $r_3 r_4$ supérieur à $he^{-\frac{1}{2}(r'+\mu)}$, ($h$ positif fini). Or, dans cet inter-

valle, la variation de $|I(z)|$ est plus petite que celles de e^r, la variation de $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right|$ est elle-même inférieure,[1] (d'après (15)) à

$$(2+\varepsilon)e^{\frac{r'}{r}} + 2(e^{r_4} - e^{r_3})$$

et, par suite,[2] (si l'on tient compte de la valeur de $r_4 - r_3$) à $h_1 e^{\frac{\mu}{2}}[e^r]_{r_3}^{r_4}$, ($h_1$ inférieur à un nombre fixe). Nous obtenons donc finalement, (d'après (16)), pour la variation $\big[|I(z)|\big]_{z_3}^{z_4}$, la limite supérieure $(h_1+1)\left[e^{r+\frac{\mu}{2}}\right]_{r_3}^{r_4}$. On voit ainsi que l'on peut toujours prendre μ assez grand pour que l'on ait en z_2 l'inégalité (20) et, par suite, l'inégalité (18).

Ce point établi, appelons z_2' le point de Oa_i le plus voisin du pôle a_i, où l'on ait $|\zeta| = e^r$. Entre z_2' et a_i, $|I(z)|$ croît moins vite que e^r; l'inégalité (18) ne peut donc cesser d'être vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

16. Partons maintenant du pôle a_i, et éloignons-nous en sur un chemin de longueur finie: tant que z sera assez près de a_i pour que l'on ait

$$(21)\qquad |\zeta| > e^{r_1+\mu_1} \qquad (\mu_1 > \mu),$$

on aura certainement l'égalité (18), et l'équation (15) se présentera sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^3} + 1 + \delta = 0, \qquad |\delta| < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ comparable à } e^{\mu-\mu_1}).$$

D'où, par intégration

$$(22)\qquad \frac{1}{\sqrt{|\zeta|}} = \sqrt{2}\,|1+\delta_1|\,|z-a_i|, \qquad |\delta_1| < \varepsilon_1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \text{ fini}\right).$$

Faisons alors

$$z - a_i = \frac{z}{\sqrt{2e^{r_1+\mu}}},$$

[1] On a, en effet, l'inégalité

$$\left[\left|\frac{\zeta'^2}{\zeta^3}\right|\right]^{z_4} < (4+\varepsilon)e^{r'} + 4\big[|I(z)|\big]_{z_3}^{z_4}$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{\mu}$. La variation de $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right|$ est inférieur à la racine carré du second membre.

[2] $$e^{\frac{r'}{2}} < h_2 e^{r_3} e^{\frac{r'}{2}} < h' e^{\frac{\mu}{2}} e^{r_3}(r_4 - r_3) < h' e^{\frac{\mu}{2}} e^{r_3}(e^{r_4-r_3} - 1).$$

$|\tau|$ étant compris entre deux nombres finis, et $\frac{\theta}{u}$ augmentant indéfiniment avec r_1. En portant cette valeur dans l'égalité (22), nous constatons d'abord que l'on a

$$|\zeta| > \frac{1}{(1+\varepsilon_1)^2} \frac{e^{r_1+\theta}}{|\tau^2|};$$

cette inégalité entraînera, si r_1 est assez grand, l'inégalité (21), ce qui montre que les calculs effectués sont bien legitimes entre a_i et z.

D'autre part, nous constatons que, lorsque $|\tau|$ augmente à partir de o, $|\zeta|$ va en diminuant: lorsque τ dépassera un certain nombre fini k_1 on aura en z

$$(23) \qquad |\zeta| < k_1 e^{r_1+\theta} \qquad (k_1 \text{ positif fini}).$$

Nous en concluons que *l'on peut entourer chaque pôle a_i d'un cercle c_i de rayon proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{e^{r_1+\theta}}}$ ne contenant aucun autre pôle, et sur le contour duquel on aura l'inégalité* (23).

Il serait d'ailleurs possible d'entourer a_i d'un rayon η fois plus grand (η arbitrairement grand) jouissant de la même propriété, et l'on en conclut comme dans la seconde partie que tous les cercles c_i sont extérieurs les uns aux autres. Des lors le cercle C de rayon r_1, ayant son centre à l'origine, ne peut contenir plus de $r_1^2 e^{r_1+\theta}$ cercles c_i, et par conséquent plus de $r_1^2 e^{r_1+\theta}$ pôles.

Il en résulte que *l'on aura, à partir d'une certaine valeur de r*

$$(24) \qquad n' < e^{r+\theta(r)+2\log r}$$

$\theta(r)$ étant une fonction croissante de r, croissant aussi lentement que l'on veut.

D'ailleurs, puisque chacun des cercles c_i ne contient qu'un pôle a_i, on voit que ces cercles constituent précisément les petites aires proportionnelles à $\frac{r_1^2}{n'}$ que nous devrions d'après le § 9 exclure du cercle C, pour y pouvoir limiter le module de $g(z)$ et de ses dérivées successives. Construisons alors la couronne D limitée par le cercle C et par un cercle concentrique de rayon $\eta' r_1$ (nous ferons $\eta < \eta' < 1$, η étant toujours inférieur

à $\frac{1}{e+1}$. *Nous pouvons affirmer que l'on a,*[1] *dans toutes les portions de la couronne D extérieure aux cercles c_i*

$$|g'(z)| < e^{(1+\varepsilon_1)r_1}, \qquad |g''(z)| < e^{\frac{3}{2}(1+\varepsilon_1)r_1}, \qquad |g'''(z)| < e^{2(1+\varepsilon_1)r_1} \quad \ldots \tag{25}$$

ε_1 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$.

17. Je dis maintenant que l'on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$\nu' < (1+\varepsilon)r_1. \tag{26}$$

En effet s'il n'en était pas ainsi, nous constaterions (en raisonnant comme au § 24 de la seconde partie), que l'on peut tracer dans la couronne D une courbe fermée Γ entourant l'origine et ne rencontrant aucun cercle c_i telle que l'on ait en une infinité de ses points

$$H(z) > he^{\nu'} > e^{(1+\varepsilon_1)r_1}. \tag{27}$$

On aura d'ailleurs

$$|H'(z)| < |H(z)|^{1+\alpha}, \qquad |H''(z)| < |H(z)|^{1+\alpha}$$

α tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Dès lors, si l'inégalité (27) était satisfaite en même temps que les inégalités (25), le terme ζ^3 ne pourrait être détruit par aucun autre dans l'équation (14), quand r_1 dépasserait un certain nombre. On a donc bien l'inégalité (26) à partir d'une certaine valeur de r.

18. Cherchons maintenant des limites inférieures de n' et ν'. Nous considérons dans ce but un angle ω ayant pour sommet l'origine et contenant l'axe réel, ω pouvant décroître avec $\frac{1}{r}$ plus vite qu'une puissance quelconque $\frac{1}{r^m}$ de $\frac{1}{r}$. Supposons que l'on ait pour des valeurs de r indéfiniment croissantes l'inégalité

$$n' < e^{r(1-\alpha)}, \qquad \alpha > 0. \tag{28}$$

[1] On a, en particulier, les inégalités (25) dans certaines portions de la couronne D_1 limitée par les cercles de rayons r_1 et $r_1(1-\varepsilon)$, ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$.

Nous pourrons alors appliquer le théorème du § 12 dans les portions de l'angle ω intérieures à des couronnes D_1 s'éloignant indéfiniment de l'origine, et limitées respectivement par des cercles de rayon r_1, $r_1(1-\varepsilon)$, (ε tendant vers zéro comme ω).

Dans l'une quelconque A_1 de ces portions d'angles, il existe des cercles d de rayon supérieur à $\frac{1}{\sqrt{e^{r_1+\lambda}}}$ (λ fonction décroissante *quelconque* de r_1), où l'on a[1]

$$(28') \qquad |g'(z)| < e^{r_1(1-\alpha_1)}, \qquad |g'''(z)| < e^{2r_1(1-\alpha_1)},$$

α_1 étant un nombre positif, par rapport auquel λ devient infiniment petit lorsque r_1 augmente indéfiniment.

Je dis que pour la valeur r_1 de r considérée, le module maximum $M(r)$ de la fonction $H(z)$ satisfait nécessairement à l'inégalité

$$(29) \qquad M(r) > e^{r_1(1-\varepsilon')},$$

ε' devenant (avec $\frac{1}{r}$) infiniment petit par rapport à α.

En effet, on peut choisir λ de manière que les cercles d couvrent par exemple, plus de la moitié de la région A. Il existe alors (Seconde Partie, § 8) dans A_1, des cercles d où l'on a

$$\left|\frac{H'(z)}{H(s)}\right| < e^{\varepsilon_1 r_1}, \qquad \left|\frac{H''(z)}{H(z)}\right| < e^{\varepsilon_1 r_1},$$

ε_1 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$. Dès lors, si $|H(z)|$ n'était pas, dans un tel cercle d, supérieur à la limite (29), on y aurait évidemment

$$(29') \qquad |\zeta| < e^{r_1(1-\alpha_1)}, \qquad |\zeta''| < e^{2r_1(1-\alpha_1)};$$

$\zeta\zeta''$ et ζ^3 se trouveraient être négligeable par rapport à ζe^{2z}, et l'équation (14) se présenterait sous la forme

$$\zeta'^2 + (1+\delta)\zeta e^{2z} = 0,$$

---

[1] En se reportant au § 8, on voit que si l'inégalité (28) est vérifiée pour $r = r_2$, les inégalités (28') seront satisfaites pour $r = r_1 = x_2(1+a)^{-b}$, ($a > 0$, $b > 0$).

$\delta|$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$. Or on constate aisément que l'on ne saurait avoir cette équation dans tout un cercle d; supposons en effet qu'elle soit satisfaite dans un tel cercle le long d'une droite $z_0 z$ joignant deux points de distance égale à $e^{-\frac{1}{2}(r_1+\lambda)}$, les inégalités (29′) étant satisfaites en z_0; l'expression

$$\left| \sqrt{\zeta(z)} - \sqrt{\zeta(z_0)} \right|$$

serait proportionnelle à $e^{r_1 - \frac{1}{2}(r_1+\lambda)}$, ce qui ne peut avoir lieu, puisque la première inégalité (29′) est par hypothèse satisfaite en z.

L'hypothèse faite sur $M(r)$ était donc inadmissible: ou n'est, pour $r = r_1$, supérieur à la limite (28), ou l'on a l'inégalité (29).

19. Des divers résultats qui précèdent, nous pouvons tirer les conséquences suivantes:

Considérons le module maximum $m(r)$ de la fonction méromorphe ζ dans le champ défini au § 10, (les pôles a_i étant entourés de petites aires b_i que l'on a exclues de ce champ): $m(r)$ *satisfera dans les régions restantes à la double inégalité*

$$e^{(1-\varepsilon)r} < m(r) < e^{(1+\varepsilon)r}.$$

Les modules maxima de $f(z)$ et de $\log u = \int f(z)dz$ satisferont dans les mêmes régions aux mêmes inégalités.

Considérons maintenant la fonction entière

$$u = G(z)e^{K(z)}.$$

Si on a l'inégalité (28) pour une valeur r_2 de r les inégalités (28′) et (29) seront satisfaites pour $r = r_1 = r_2(1+\alpha)^{-b}$, $(b > 0)$. Il en résulte, puisque $H = K''$, que le module maximum[1] $M_1(r)$ de $K(z)$ est, lui-même, supérieur, dans la couronne D_1 à $e^{r_1(1-\varepsilon'')}$. Désignons alors par $A(r)$ la plus grande valeur positive de la partie réelle de K pour $r = r_1$, et soit

[1] D'après les théorèmes de la seconde partie, on peut toujours tracer dans la couronne D_1 un cercle sur lequel on a

$$\left| \frac{H(z)}{K(z)} \right| < e^{\gamma r} \qquad \gamma \text{ tendant vers zéro avec } \frac{1}{r_1}.$$

$r_1' = r_2(1+\alpha)^{-b'} = r_1 - \rho$, $(b' > 0,\ \rho > 0)$. Il résulte d'un théorème de M. Borel[1] que l'on a, (quel que soit ρ), à partir d'une certaine valeur de r_1

$$M_1(r_1') < \frac{8 r_1' A(r_1)}{\rho}.$$

Si nous faisons, par exemple, $\rho = \frac{1}{r^q}$, (q arbitrairement grand, on voit que l'on aura certainement à partir d'une certaine valeur de r_1

$$8A(r_1) > e^{r_1(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{r_1}\right) - \log\frac{1}{\rho} - \log r_1} > e^{r_1 [illegible]}.$$

Cette inégalité, jointe au théorème du § 2, nous montre que le module maximum de u satisfera, lorsque r sera assez grand

$$e^{e^{(1-\varepsilon)r}} < \mathsf{M}(r) < e^{e^{(1+\varepsilon)r}},$$

quelque petit que soit ε.

20. Il n'est pas nécessaire d'insister pour montrer que la méthode précédente s'applique, tout aussi aisément, au cas laissé de côté où la constante γ de l'équation (13) est différente de zéro. On a alors, avons-nous dit l'une des deux équations

$$\zeta\zeta'' = \zeta'^2 + \alpha\zeta^3 - \zeta^4 + \beta\zeta e^{2z} + e^{4z}, \tag{31}$$

$$\zeta\zeta'' = \zeta'^2 + \alpha\zeta^3 - \zeta^4 + \zeta e^{z} \tag{32}$$

avec

$$\zeta^2 - \alpha\zeta = f'(z) \tag{33}$$

$f(z)$ étant, en vertu de l'équation (12'), la dérivée logarithmique d'une fonction entière. Nous poserons comme plus haut

$$f(z) = g(z) + H(z)$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires.

[1] *Sur les zéros des fonctions entières*, p. 365.

21. Toute intégrale de (31) satisfait aux deux équations

$$(33)\qquad \frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} = \alpha\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \beta\frac{e^{2z}}{\zeta} - \frac{e^{4z}}{2\zeta^2} + 2\int^z\left(\frac{\beta e^{2z}}{\zeta} + \frac{e^{4z}}{\zeta^2}\right)dz,$$

$$(34)\qquad \frac{\zeta'}{\zeta} = \int(\alpha\zeta - \zeta^2)dz + \int^z\left(\frac{\beta e^{2z}}{\zeta} + \frac{e^{4z}}{\zeta^2}\right)dz.$$

μ étant un nombre qui croît indéfiniment avec r_1, je dis d'abord qu'en tout pôle a_i, $(|a_i| = r_i)$ contenu dans le cercle C de rayon r_1, on a l'inégalité

$$(35)\qquad |I(z)| = \left|\int^z\left(\frac{\beta e^{2z}}{\zeta} + \frac{e^{4z}}{\zeta^2}\right)dz\right| < 2e^{2r+\mu}.$$

Pour le démontrer, on établira d'abord que l'on ne peut avoir simultanément en aucun point de Oa_i

$$(36)\qquad |\zeta^2| = e^{2r}, \qquad |I(z)| > 2e^{2r+\mu}.$$

Supposons, en effet que cette condition, satisfaite en z_0, cesse de l'être en z_2. On vérifiera alors, en raisonnant comme au § 15, que l'on a en z_2

$$|f(z_2)| = <\left|\int^{z_2}(\zeta^2 - \alpha\zeta)dz\right| < e^{2r_2+\mu}.$$

D'ailleurs on aura, (en combinant (33) et (34))

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta_2'^2}{\zeta_2^2} - 2\frac{\zeta_2'}{\zeta_2} = \alpha\zeta_2 - \frac{\zeta_2}{2} - \beta\frac{e^{2z}}{\zeta_2} - \frac{e^{4z}}{2\zeta_2} + 2f_1(z_2)$$

et l'on en conclura, (d'après (34)), que l'inégalité (35) est satisfaite au point z_2 et, par suite, au pôle a_i.

Si maintenant nous nous éloignons du pôle a_i, on voit que tant que l'on aura

$$|\zeta^2| > e^{2r+\mu_1} \qquad (\mu_1 > \mu),$$

l'équation (33) se présentera sous la forme

$$\frac{\zeta'^2}{\zeta^4} + 1 + \delta = 0 \quad \left(|\delta| \text{ tendant vers zero avec } \frac{1}{r} \text{ et } \frac{1}{\mu_1 - \mu}\right)$$

ou encore sous la forme

$$\frac{1}{4}\frac{w'^2}{w^3}+1+\partial=0, \qquad w=\zeta^2.$$

On en conclut (comme au § 16) que à l'intérieur du cercle C' on peut entourer les pôles a_i de cercles de rayon proportionnel à $e^{-\frac{1}{2}(2r_1+\theta)}$, $(\theta>\mu_1)$, ne contenant chacun qu'un pôle, tous extérieurs les uns aux autres, et sur le contour desquels on a l'inégalité

$$|w|<ke^{2r_1+\theta}.$$

On constate alors, — en désignant par ν' le nombre des zéros de $H(z)$ dont le module est inférieur à ηr $\left(\eta<\dfrac{1}{e+1}\right)$, — que l'on a, à partir d'une certaine valeur de r, les inégalités

$$n'<e^{2r+\theta(r)+2\log r}, \qquad \nu'<2r(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{r}$.

22. Soit d'autre part $M(r)$ le module maximum de $H(z)$ pour $|z|=r$. Si l'inégalité

$$n'<e^{2r(1-\alpha)} \qquad \alpha>0$$

se trouve vérifiée pour des valeurs r_1 de r indéfiniment croissantes, on aura dans certaines régions de la partie commune à la couronne D_1 et à l'angle ω définis au § 18

$$|g'(z)|<e^{2r_1(1-\alpha_1)}, \qquad |g'''(z)|<e^{4r_1(1-\alpha_1)}, \qquad (\alpha_1>0).$$

On constate alors que dans la couronne D_1, $M(r)$ est supérieur à $e^{2r_1(1-\varepsilon)}$, ε tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{r_1}$; car, s'il n'en était pas ainsi l'équation (31) donnerait dans un cercle de rayon proportionnel à $e^{-\frac{1}{2}(2r_1+\lambda)}$ l'égalité

$$\frac{1}{2}w'^2+(1+\partial)we^{4z}=0, \qquad (w=\zeta^2),$$

$|\partial|$ tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{r_1}$, ce qui conduit à une contradiction (§ 18).

Si l'on pose

$$u = G(z)e^{K(z)},$$

le module maximum de $K(z)$ satisfait dans la couronne D_1 à la même inégalité que $M(r)$, et l'on en conclut, en désignant par $\mathsf{M}(r)$ le module maximum de u que

$$e^{e^{2r(1-\varepsilon)}} < \mathsf{M}(r) < e^{e^{2r(1+\varepsilon)}},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

23. Toute intégrale de l'équation (32) satisfait aux deux équations

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} = \alpha\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \frac{e^{2z}}{\zeta} + 2\int \frac{e^{2z}}{\zeta}\,dz, \tag{37}$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta^2} = \int (\alpha\zeta - \zeta^2)\,dz + \int \frac{e^{2z}}{\zeta}\,dz. \tag{38}$$

μ étant un nombre qui croît indéfiniment avec r_1, on constate que l'on a en tout point pôle a_i contenu dans le cercle C de rayon r_1, l'inégalité

$$\left| \int^z \frac{e^{2z}}{\zeta}\,dz \right| < 2e^{\frac{4}{3}r+\mu}, \qquad (r = |z|).$$

On voit alors qu'au voisinage d'un pôle a_i, tant que l'on a

$$|\zeta| > e^{\frac{2}{3}r+\mu_1}, \qquad (\mu_1 > \mu),$$

l'équation (37) se présente sous la forme

$$\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} + (1 + \delta)\zeta^2 = 0 \qquad |\delta| < \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Conservant toutes les notations du paragraphe précédent, nous déduirons de là les inégalités

$$n' < e^{\frac{4}{3}r+\theta(r)+2\log r}, \qquad \nu' < \frac{4}{3}r(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, et $\theta(r)$ croissant arbitrairement lentement.

D'autre part, on a à partir d'une certaine valeur de r l'une au moins des deux inégalités

$$n' > e^{\frac{4}{3} r(1-\varepsilon)}, \qquad M(r) > e^{\frac{4}{3} r(1-\varepsilon)}.$$

On en conclut que le module maximum de la fonction entière, satisfait aux inégalités

$$e^{\frac{4}{3} r(1-\varepsilon)} < M(r) < e^{\frac{4}{3} r(1+\varepsilon)},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

QUATRIÈME PARTIE.

1. Les résultats qui m'ont permis plus haut d'étudier les fonctions entières découvertes par M. PAINLEVÉ ont une portée générale: on pourra les appliquer à l'étude d'une fonction entière quelconque satisfaisant à une équation différentielle donnée. On ne connaît encore, il est vrai, que très peu d'équations dont les intégrales soient entières. Mais il est probable que les profondes méthodes de M. PAINLEVÉ, appliquées aux ordres supérieures, permettront bientôt d'en former de nouvelles. On saura alors vraisemblablement étudier leur croissance et évaluer leur ordre de grandeur.

Il est naturel de se demander si, dans les recherches de ce genre, l'hypothèse d'après laquelle l'intégrale étudiée est une fonction entière est une condition indispensable de la précision des résultats. En fait, si l'on est en présence de certaines classes simples d'équations, on saura étudier la croissance de leurs intégrales, sans faire aucune hypothèse sur la nature de ces intégrales. Il convient d'examiner jusqu'où peut conduire une semblable méthode.

Je me bornerai ici aux équations algébriques du premier ordre. Elles ont été étudiées au point de vue de la croissance par M. BOREL, et, après lui, par M. LINDELÖF.[1]

[1] BOREL, *Mémoire sur les séries divergentes* (Ann. Ec. Norm. Sup. 1899). LINDELÖF, Bull. de la Soc. math. de France 1899.

Considérons une intégrale réelle que nous supposons continue lorsque x est réel et varie de o à $+\infty$. M. Borel a démontré que *l'intégrale y est à partir d'une certaine valeur de x, inférieure à e^{e^x}*. Précisant ce résultat, M. Lindelöf désigne par m le degré de l'équation par rapport à x, et il montre que l'on a, à partir d'une valeur x_1 de x

$$|y| < e^{Cx^{m+1}}$$

C étant une constante finie.

Il pourra arriver cependant que $|y|$ reste très inférieur à cette limite, comme le montre la proposition suivante à laquelle est parvenu M. Lindelöf:

Ou bien l'intégrale y est du type exponentiel et reste comparable à une fonction croissante de la forme e^{x^c} (c nombre fini); ou bien y reste compris, à partir d'une certaine valeur de x entre e^{-x^ε} et e^{x^ε}, quelque petit que soit ε.

Les recherches de M. Lindelöf nous ont ainsi révélé l'existence de deux types d'intégrales fort différents. Mais elles ne nous ont pas appris à reconnaître si une équation donnée admet des intégrales de l'un ou de l'autre type. D'autre part la méthode de M. Lindelöf qui repose sur une application du théorème de Rolle suppose x réel. Elle exige de plus que y soit continu sur tout l'axe réel: or nous ne savons pas reconnaître, a priori, si cette condition est réalisée, et l'étude de la croissance de y devrait précisément avoir pour premier but de nous renseigner sur ce point.

C'est pourquoi je n'ai pas cru inutile de revenir sur le même problème, en prenant pour point de comparaison la théorie des fonctions entières. On va voir que le problème comporte une solution assez précise.

2. Les résultats obtenus dans la seconde partie de ce travail nous montrent immédiatement quelle doit être la forme d'une équation algébrique du premier ordre pour qu'elle puisse admettre une ou plusieurs intégrales entières (de genre fini). Il faut que cette équation contienne *plusieurs* termes de degré supérieur par rapport à y et y'. En effet, lorsque le terme de plus haut degré en y et y' est unique, il suffit de se reporter aux inégalités du § 13 de la seconde partie, pour voir qu'il ne pourrait être détruit par aucun autre, si y était une fonction entière. Dans ce cas, si y est une fonction uniforme ayant une singularité essentielle à

l'infini, elle sera nécessairement, au voisinage de cette singularité, une fonction méromorphe semblable à celles que j'ai étudiées dans la seconde partie de ce travail; elle restera comparable, (si l'on exclut du champ de la variable le voisinage immédiat de ses pôles) à une puissance finie de x.

Nous sommes ainsi conduits à répartir les équations algébriques entre deux classes, suivant qu'elles contiennent ou ne contiennent pas deux ou plusieurs termes de degré supérieur par rapport à y et à y'. Cette distinction va nous permettre de compléter les résultats de M. Lindelöf.

3. Considérons, pour commencer, une équation résolue par rapport à y'

$$y'Q(x, y) - P(x, y) = 0 \tag{1}$$

P et Q étant des polynômes en x et y.

Je dis que si cette équation est de la seconde classe, toutes ses intégrales appartiennent au second type signalé par M. Lindelöf. Plus précisément, si l'on suppose encore que l'intégrale y est réelle, continue et croissante sur l'axe réel, *cette intégrale croîtra moins vite qu'une puissance finie de la variable x.*

Il suffit, pour le vérifier, de reprendre le raisonnement employé par M. Borel dans son mémoire *Sur les séries divergentes,* en y apportant une légère modification.

y étant une fonction quelconque de ξ satisfaisant aux conditions qui viennent d'être énoncées, M. Borel a montré que si l'on ne peut pas trouver de nombre ξ_0 tel que l'on ait, pour $\xi > \xi_0$

$$y < e^{e^{\xi}}$$

il existe sûrement des valeurs indéfiniment croissantes de ξ pour lesquelles on a à la fois

$$y > e^{e^{\xi}}, \qquad y' > \frac{1}{2}e^{\xi}y.$$

De plus, parmi ces valeurs, il en est d'aussi grandes que l'on veut pour lesquelles on a, en même temps que les inégalités précédentes, l'inégalité

$$y' \leq y^{1+\varepsilon}.$$

Il est clair que ces résultats subsistent si l'on remplace ξ par la fonction croissante de x $\log\log\varphi(x)$. Supposons alors que $\varphi(x)$ croisse moins vite

qu'une puissance[1] finie de x. Nous pouvons affirmer que si l'on n'a pas, à partir d'une certaine valeur de x, l'inégalité

$$y < \varphi(x),$$

on aura simultanément, pour des valeurs x_1 de x indéfiniment croissantes

$$y > \varphi(x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\,.\log\varphi} > \frac{2}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}y > \frac{s_1 y}{2x} \quad (s_1 \text{ positif fini})$$

et

$$\frac{dy}{dx} < \frac{s y^{1+\varepsilon}}{x}.$$

Ces inégalités limitent la croissance de l'intégrale y. Désignons en particulier par m un nombre supérieur aux degrés par rapport à x des polynômes P et Q. Nous constatons que $\varphi(x)$ sera nécessairement inférieur à x^m *si la différence des degrés p et q de P et de Q par rapport à y n'est pas égale à l'unité.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, tous les termes de l'équation (1) seraient, pour $x = x_1$, négligeables par rapport au terme en y^p ou au terme en $y'y^q$: le premier membre de l'équation ne pourrait donc s'annuler.

Ainsi, si $p - q$ est différent de 1, comme nous le supposons ici, on aura, à partir d'une certaine valeur de x

$$(2) \qquad y < x^m.$$

Le résultat serait le même si l'équation étudiée n'était pas résolue par rapport à y': soit dans ce cas

$$A(x)y^\alpha y'^\beta$$

le terme de degré supérieur en y et y', terme qui est supposé unique: si l'on avait par l'inégalité (2), ce terme ne pourrait être détruit par aucun autre (pour certaines valeurs x_1 de x).

---

[1] Je suppose qu'il existe des nombres s, s_1 tels que les rapports $\frac{x^s}{\varphi}$ et $\frac{\varphi}{x^{s_1}}$ soient croissants à partir d'une certaine valeur de x. On a alors $\frac{s_1}{x} < \frac{\varphi'}{\varphi} < \frac{s}{x}$.

Considérons maintenant le cas où $p - q = 1$. L'équation (1) prend alors la forme

$$y'(a_1 + a_2 y + \ldots + a_p y^{p-1}) = b_0 + \ldots + b_p y^p \tag{3}$$

les a et les b étant des polynômes en x.

Deux cas sont encore à distinguer suivant que le degré de a_p est supérieur, ou au contraire inférieur ou égal à celui de b_p.

Lorsque le degré de a_p est supérieur à celui de b_p, l'intégrale y (supposée réelle, continue et croissante) satisfait, à partir d'une certaine valeur de x à l'inégalité (2). En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait pour certaines valeurs de x

$$y > x^m \quad (m \text{ arbitraire grand}) \quad \text{et} \quad y' > \frac{hy}{x} \quad (h \text{ positif fini}),$$

et le terme $a_p y' y^{p-1}$ de l'équation (3) ne pourrait alors être détruit par aucun autre.

Ainsi se trouvent définies deux classes d'équations (1), dont les intégrales satisfont, à partir d'une certaine valeur de x, à l'inégalité (2). On voit que ces intégrales ne peuvent pas croître comme des exponentielles, mais restent comparables à une puissance finie de la variable x. Elles appartiennent au second type signalé par M. Lindelöf.

Lorsque y est complexe, on doit former les équations auxquelles satisfont sa partie réelle d'une part, sa partie imaginaire d'autre part, et étudier ces équations séparément. Mais pour parvenir à des résultats pratiquement utilisables, il faudrait savoir déterminer les lignes sur lesquelles le module de y est croissant. Or cette détermination semble présenter de grandes difficultés.

4. Si nous considérons au contraire les équations (3) pour lesquelles le *degré de a_p est inférieur ou égal à celui de b_p*, nous pourrons faire une étude descriptive assez précise de leurs intégrales. On peut observer que dans le cas où nous nous plaçons ($p - q = 1$), les intégrales de l'équation (1) sont à un certain point de vue comparables à des fonctions entières. Ces intégrales ne peuvent en effet devenir infinies en aucun point non singulier essentiel. Supposons en effet que y devienne infini comme x^{-m} ($m > 0$). On aurait au voisinage du point singulier

$$\frac{|y'|^m}{|y|^{m+1}} > c \qquad (c \text{ fini}),$$

inégalité que ne peut vérifier aucune intégrale de (1) en un point non singulier pour les coefficients. Nous allons voir se poursuivre l'analogie entre les fonctions entières et les intégrales des équations (3) considérées, en étudiant la croissance du module $|y|$ lorsque x approche du point singulier transcendant situé à l'infini.

5. Posons

$$y = uv$$

et faisons

$$u = e^{\int \frac{b_p}{a_p} dx}.$$

Nous supposerons que le degré de b_p surpasse celui de a_p de μ unités. Plaçons-nous en dehors d'un cercle contenant les zéros de b_p et ceux de a_p. Sur une infinité de rayons R issus de l'origine et situés dans $\mu + 1$ angles égaux à $(1 - \alpha)\frac{\pi}{\mu + 1}$ (α étant un nombre positif fini, arbitrairement petit), u est comparable à $e^{k|x|^{\mu+1}}$, k étant un nombre positif fini.

D'autre part, on a

$$v' = \frac{b_0 + \ldots + b_{p-1} u^{p-1} v^{p-1} - u'(a_1 v + \ldots + a_{p-1} u^{p-2} v^{p-1})}{a_1 u + \ldots + a_p u^p v^{p-1}}. \tag{4}$$

Cherchons une limite supérieure du module $|v'|$ sur un rayon R. [1]

Désignons dans ce but par σ un nombre supérieur aux dégrés de tous les polynômes a. Si l'on a, à partir d'une certaine valeur de $|x|$

$$|uv| > h|x|^\sigma, \tag{5}$$

h étant un nombre fixe, tous les termes du dénominateur s'effaceront devant le dernier, lorsque $|x|$ croîtra; en particulier, si $|x|$ dépasse un certain nombre r_0, ce dénominateur sera, en module, supérieur à

$$h_1 |a_p u^p v^{p-1}| \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

[1] Je me contente de dire que les nombres σ, σ_1, σ_2 sont finis, n'ayant pas besoin de plus de précision. Mais on pourrait facilement les calculer. Ainsi, désignons par τ et τ_1 les degrés de a_{p-1} et de b_{p-1}. σ est le plus grand des nombres τ_1 et $\mu\tau$.

D'autre part le module du numérateur de v' est inférieur à

$$h_2 \left| u^{p-1} v^{p-1} x^{\sigma_1} \right|, \qquad (h_2 \text{ et } \sigma_1 \text{ nombres finis}).$$

On a, par suite sur le rayon R considéré

$$(6) \qquad |v'| < h_3 \frac{|x|^{\sigma_2}}{|u|} \qquad (h_3\,,\ \sigma_2 \text{ positifs finis}).$$

Posons alors $|x| = r$, et soit v_0 la valeur que prend v (sur le rayon R) au point de module r_0. Nous pouvons, avons-nous dit, trouver un nombre positif k tel que l'on ait, sur le rayon R considéré (pour $r > r_0$)

$$|u| > e^{kr^{\mu+1}}.$$

Nous aurons évidemment à partir d'une certaine valeur de r

$$|v - v_0| < \int_{r_0}^{r} e^{-k_1 r^{\mu+1}} dr,$$

k_1 étant un nombre positif inférieur à k.

Il en résulte que [1]

$$|v| < c \qquad (c \text{ inférieur à un nombre fixe})$$

et

$$|v| > |v_0| - e^{-k_1 r_0^{\mu+1}}.$$

Si donc la valeur initiale $|v_0|$ satisfait à l'inégalité

$$(7) \qquad |v_0| - e^{-k_1 r_0^{\mu+1}} > c_1$$

la valeur de $|v|$ en x sera elle-même finie et supérieure à c_1.

Pour parvenir à ce résultat, nous avons dû supposer que l'inégalité (5) était vérifiée pour $r > r_0$. Cette supposition est sans conséquences si l'inégalité (7) est satisfaite au point x_0. Imaginons en effet que l'inégalité

---

[1] On a en effet

$$\int_{r_0}^{r} e^{k_1 r^{\mu+1}} dr < \int_{r_0}^{r} (\mu + 1) k_1 r^{\mu} e^{-k_1 r^{\mu+1}}$$

$$< e^{-k_1 r_0^{\mu+1}} - e^{-k_1 r^{\mu+1}}.$$

(5) vérifiée pour $r_0 < r < r_1$ cesse de l'être au point r_1: il faudra que l'inégalité

$$(8) \qquad |v| > c_1$$

cesse elle-même d'être satisfaite en un point r_2 situé entre r_0 et r_1: conclusion absurde, puisque nous avons démontré que l'inégalité (5) satisfaite pour $r_0 < r \leqq r_1$ entraîne l'inégalité (8) dans tout l'intervalle $r_0 r_1$.

Nous constatons ainsi que l'inégalité (7) entraîne l'inégalité (8) le long du rayon R. Il en serait évidemment de même le long d'une droite quelconque sur laquelle $|x|$ croît comme ηr (η fini), et, par suite, dans tout l'angle A ayant pour sommet l'origine dans lequel on a

$$|u| > e^{kr^{\mu+1}}.$$

Dans tout cet angle (pour $|x| > r_0$), y ne présente ni zéros ni pôles, et l'on a

$$|y| = e^{\lambda |x|^{\mu+1}},$$

λ étant compris entre deux nombres positifs fixes.

On peut interpréter comme il suit ce résultat: il est possible de mettre l'intégrale y de l'équation (3) sous la forme

$$(9) \qquad y = Cu + \varphi(x, C),$$

C étant une constante arbitraire, de telle façon que le second terme de l'égalité (9) s'efface devant le premier dans l'angle A, à moins que C n'approche de la valeur particulière *zéro*. Cu est alors une valeur principale de y dans l'angle A.

On obtiendrait les mêmes résultats dans les $\mu + 1$ angles où le module de u est croissant. Supposons en particulier que le quotient $\frac{b_p}{a_p}$ se réduise à une constante. C'est alors dans tout un demi-plan que $|y|$ serait comparable à $e^{\lambda |x|}$, ($\lambda > 0$).

6. Pour parvenir à ce résultat, il n'est pas nécessaire de supposer que dans l'équation (3) les fonctions de x, $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sont des polynômes. Supposons que sur un rayon R issu de l'origine, tous les a et b soient à partir d'une certaine valeur r_0 de r inférieurs à une puis-

sance finie de r, r^σ; supposons de plus que sur ce rayon, l'on ait, pour $r > r_0$

$$|u| > e^{kr^{\mu+1}},$$

et

$$|u'| < r^\rho |u|,$$

k et ρ étant des nombres positifs finis. Tous les résultats du paragraphe précédent s'appliqueront sur le rayon R au produit $y = uv$.

Les fonctions a_1, a_2, ..., b_1, b_2 pourront être par exemple, des fonctions méromorphes semblables à celles que j'ai étudiées dans la seconde partie de ce travail, ou des fonctions algébriques. La méthode précédente permettra d'étudier tous ces cas en détail, quoique leur diversité nous empêche d'énoncer à leur sujet des propositions générales.

7. L'étude des intégrales de l'équation (3) conduit donc, au point de vue de la croissance, à des résultats particulièrement intéressants. Dans les $\mu + 1$ angles définis plus haut, nous savons évaluer le module d'une intégrale: ce module croît comme celui d'une fonction entière de genre fini.

Les résultats précédents permettront encore d'étudier l'équation (1), dans le cas considéré au § 4, où elle contient un seul terme de degré supérieur par rapport à y et y'. Désignons en effet par ζ une intégrale particulière de l'équation (1), et posons

$$Y = \frac{1}{y - \zeta}.$$

La fonction Y satisfera à une équation de la forme (3). Pour s'en rendre compte, il suffirait de remarquer qu'une intégrale y, différente de ζ, ne peut être égale à ζ en aucun point non transcendant pour l'équation; dans le cas contraire, en effet, on aurait en même temps, $y' = \zeta'$, et les deux intégrales coïncideraient dans tout le plan. La fonction Y ne présente donc, en dehors des points singuliers transcendants de l'équation, aucune singularité polaire. Elle est de même nature que celle qui a été étudiée dans les paragraphes précédents.

Supposons en particulier que l'équation (1) admette une integrale rationnelle qui sera celle que nous appelons ζ. Dans l'équation (3) à laquelle satisfait Y, les fonctions a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... seront alors des polynômes, et l'on pourra appliquer à la fonction Y les résultats du § 5 si le degré

de a_p est inférieur ou égal à celui de b_p. Nous constatons alors que dans les $\mu+1$ angles définis plus haut, *l'intégrale générale y se rapproche indéfiniment, lorsque $|x|$ croît, de l'intégrale rationnelle ζ*. La différence $y-\zeta$ est égale, d'après ce qui précède, à $e^{-\lambda r^{\mu+1}}$, λ restant compris entre deux nombres positifs fixes.

On pourrait chercher à généraliser ces résultats en étudiant des équations plus compliquées. Ils peuvent sans doute donner lieu à diverses applications pratiques, puisque la méthode qui vient d'être développée ne permet pas seulement de limiter le module d'une intégrale, mais aussi d'évaluer ce module dans des régions étendues du plan.

Mais il n'est nécessaire de multiplier les exemples précédents pour conclure que la croissance de certains types fort généraux de fonctions obéit à des lois très simples et très précises. Il serait intéressant de rechercher dans quelle mesure la grandeur d'une fonction en est une propriété caractéristique et, jusqu'à quel point la connaissance de sa croissance renseigne sur la nature analytique de la fonction. On a vu que l'ordre de grandeur d'une fonction entière dépend étroitement de la densité de ses zéros; c'est dire qu'il est déterminé par la grandeur des éléments composant l'ensemble des déterminations de la fonction inverse. Mise sous cette forme, la proposition est susceptible d'être étendue à des classes de fonctions beaucoup plus vastes que celle des fonctions entières, et il est très vraisemblable qu'elle peut l'être.

Ainsi la relation que nous avons observée dans le cas des fonctions entières n'est peut-être que la manifestation d'une propriété appartenant à des fonctions plus générales. C'est pourquoi il n'était peut-être pas inutile de la mettre en lumière, comme je me suis proposé de le faire dans ce travail.

SUR UNE SÉRIE D'ABEL

PAR

S. PINCHERLE

à BOLOGNE.

1. Dans le mémoire posthume d'ABEL: »Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes»,[1] on trouve, à la page 73, une formule très remarquable; c'est la suivante:

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x+\alpha) = \varphi(x) + \alpha \frac{d\varphi(x+\beta)}{dx} + \frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{1 \,.\, 2} \frac{d^2\varphi(x+2\beta)}{dx^2} + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} \frac{d^n\varphi(x+n\beta)}{dx^n} + \ldots .$$

Ce développement est obtenu par l'Auteur en appliquant la méthode des fonctions génératrices ou, comme on dit à présent, la transformation de LAPLACE au développement donné par LEGENDRE:[2]

$$\text{(b)} \qquad e^{\alpha v} = 1 + \alpha v e^{\beta v} + \frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{1 \,.\, 2} v^2 e^{2\beta v} + \frac{\alpha(\alpha-2\beta)^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} v^3 e^{3\beta v} + \ldots .$$

La formule (a) semble avoir appelé l'attention d'ABEL d'une façon particulière; un autre de ses travaux[3] renferme, en effet, la démonstration de la formule pour le cas où $\varphi(x) = x^n$, d'où résulte immédiatement la même formule pour tout polynôme entier. Dans ce cas, il n'y a rien à remarquer sur notre formule; mais dans des cas plus généraux, elle peut parfaitement

[1] Mém. XI du t. II de l'édition de SYLOW et LIE, p. 67.

[2] *Exercices de calcul intégral*, t. 2, p. 234. On obtient sans peine cette série comme application de la série de LAGRANGE.

[3] Mém. X du t. I de l'édition citée, p. 102.

ne pas être exacte, car le second membre, même s'il est convergent, peut ne pas avoir pour somme le premier membre. C'est là une conséquence de l'application pure et simple de la transformation de LAPLACE, qui échappait naturellement au temps d'ABEL, étant données les connaissances qu'on avait alors sur la théorie des fonctions. En particulier, comme on l'a remarqué depuis longtemps, l'application faite par ABEL de la formule à la fonction $\log x$ est inexacte.

HALPHEN a repris l'étude de la série d'ABEL dans un intéressant mémoire [1] où il donne les conditions sous lesquelles la formule (a) est exacte. La méthode tenue par HALPHEN pour établir cette formule diffère complètement de celle d'ABEL; il s'attache, en effet, à l'étude du système de polynômes

$$P_n(\alpha) = \alpha(\alpha - n\beta)^{n-1} \tag{c}$$

et cherche les conditions de convergence d'une série ordonnée suivant ces polynômes et les propriétés des fonctions représentées par de semblables séries. Un autre auteur, M. PARETO,[2] a repris la question par la méthode d'ABEL, c'est à dire en partant de la transformation de LAPLACE, mais en précisant les conditions d'application de cette transformation selon des idées plus modernes sur la théorie des fonctions; de cette façon il retrouve, pour la validité de la formule (a), les conditions données par HALPHEN.

2. Le présent travail se propose de reprendre l'étude de la série d'ABEL à un autre point de vue. Au lieu de considérer comme éléments principaux de ce développement les polynômes (c), ainsi que l'a fait HALPHEN, je donne le plus d'importance, en chaque terme de la série, au facteur

$$\frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{dx^n}, \tag{d}$$

où je considère $\varphi(x)$ comme une fonction analytique arbitrairement variable dans une certaine classe, ou, comme je dis aussi, dans un certain *champ fonctionnel*. Je regarde ce facteur comme le résultat de l'opération

---

[1] *Sur une série d'Abel.* Bulletin de la Soc. Math. de France, T. X, p. 67, 1882.

[2] *Sur les fonctions génératrices d'Abel.* Crelle, t. 110, p. 290, 1892.

V^n, appliquée à la fonction $\varphi(x)$, où $V(\varphi)$ est l'opération $\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx}$; je donne quelques propriétés et des conditions de convergence des opérations représentées par des séries de puissances de V à coefficients quelconques; enfin je passe au cas particulier d'une de ces opérations qui, dans une partie de son champ fonctionnel de convergence, représente $\varphi(x+\alpha)$ et j'obtiens ainsi la série d'Abel comme spécialisation des opérations susdites.

3. Soit un système de constantes

$$a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots,\ a_n\,,\ \ldots$$

tel que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

ait un rayon ρ de convergence fini ou infini, mais non nul. Nous allons nous occuper de l'opération représentée par la série

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n V^n(\varphi). \tag{2}$$

L'ensemble des branches de fonctions analytiques monogènes qui, substituées à $\varphi(x)$ dans cette série, la rendent uniformément convergente dans une aire du plan x, constitue ce que j'appelle le *champ de convergence* de la série. Pour toute fonction appartenant à ce champ, l'opération (2) donne comme résultat une branche de fonction analytique. En outre, cette opération jouit évidemment de la propriété d'être *distributive*, et d'être *permutable* avec l'opération de dérivation.

Il est facile de montrer qu'il existe deux classes distinctes de branches de fonctions, n'ayant pas d'éléments communs, et appartenant l'une et l'autre au champ de convergence de la série (2).

a) J'indique par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des fonctions entières

$$\varphi(x) = \sum \frac{k_n}{|\underline{n}} x^n \tag{3}$$

dont les séries associées[1] $\sum k_n x^n$ ont un rayon de convergence non nul.

[1] Au sens de M. Borel. V. p. ex. Acta math., t. 21, p. 243.

Je considère une fonction (3), et soit r le rayon de convergence de sa série associée; si r_1 est un nombre positif moindre que r, il existe un nombre positif μ tel que

$$|k_n| < \frac{\mu}{r_1^n}, \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

et on en conclut immédiatement que si $b = |\beta|$, $|x| = t$, on a

$$\left|\frac{d^n \varphi(x+n\beta)}{dx^n}\right| < \frac{\mu}{r_1^n} e^{\frac{t+nb}{r_1}};$$

par suite, il suffit de la condition

$$(4) \qquad e^{\frac{b}{r}} < r\rho$$

pour que la fonction $\varphi(x)$ appartienne au champ de convergence de la série (2). La valeur de x ne figure pas dans cette condition, en sorte que $A(\varphi)$ est une fonction entière. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

I. *Etant donnés $b = |\beta|$ et ρ, l'équation $e^{\frac{b}{r}} = r\rho$ donne pour r une racine positive unique $\bar{r}$. Les fonctions de l'ensemble $\mathfrak{M}$ pour lesquelles on a $r < \bar{r}$ constituent un ensemble linéaire $\mathfrak{M}_1$ qui appartient tout entier au champ de convergence de $A(\varphi)$.*

En particulier, si $\rho = \infty$, tout l'ensemble $\mathfrak{M}$ appartient à ce champ de convergence, quel que soit β.

b) J'indique maintenant par $\mathfrak{N}$ l'ensemble des branches de fonctions analytiques régulières dans un domaine de $x = \infty$, et représentées par conséquent par des séries de puissances entières négatives de x. Soit $\varphi(x)$ un élément de cet ensemble:

$$\varphi(x) = \frac{k_0}{x} + \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{x^3} + \ldots;$$

soit r le rayon du cercle à l'extérieur duquel la série converge; si r_1 est un nombre positif plus grand que r, il existe un nombre positif μ tel que, pour toute valeur de n, on a

$$|k_n| < \mu r_1^n.$$

Soit maintenant m un nombre entier tel que $m\beta$ soit extérieur au cercle de rayon r; il en sera de même de $n\beta$ pour $n > m$; et si l'on prend un nombre positif t tel que l'on ait

$$t < mb - r,$$

où $b = |\beta|$, pour tout x tel que

$$t < |x| < mb - r \tag{5}$$

et pour $n \geqq m$, les inégalités

$$|x + n\beta| > mb - |x| > r$$

se trouvent vérifiées.

Les séries

$$\frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{dx^n} = (-1)^n \frac{n!}{(x + n\beta)^n}\left(\frac{k_0}{x + n\beta} + (n + 1)\frac{k_1}{(x + n\beta)^2} + \ldots\right) \tag{6}$$

sont donc convergentes pour toutes les valeurs de x sus indiquées; en substituant aux valeurs absolues des termes de la série (5) les nombres positifs respectivement supérieurs

$$\frac{\mu r_1^n}{(nb - |x|)^n},$$

on trouve sans peine que l'expression asymptotique en n des fonctions (6) n'est pas supérieure à

$$\frac{g_n}{e^{bn}\sqrt{n}},$$

où e est la base de logarithmes, et où g_n tend, pour $n = \infty$, à une valeur finie.

Cela posé, reprenons la série $A(\varphi)$ dont nous négligerons les m premiers termes dont la présence n'a actuellement aucune importance. En indiquant encore par ρ le rayon de convergence de la série (1), les remarques précédentes permettent de conclure immédiatement que

II. *La série, où φ est un élément quelconque de l'ensemble $\mathfrak{N}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n F^n(\varphi)$$

est convergente uniformément pour toutes les valeurs de x données par (5), *pourvu que l'on ait*

$$\rho > \frac{1}{eb}.$$

III. *Il en est de même pour*

$$\rho = \frac{1}{eb}$$

si l'on ajoute la condition que la série

$$\sum \frac{|a_n|}{\sqrt{n}}$$

soit convergente.

Dans les deux cas, tout l'ensemble $\mathfrak{M}$ appartient donc au champ de convergence de $A(\varphi)$.

IV. *Si la série $\varphi(x)$ est convergente dans tout le plan excepté $x = 0$, sous les conditions des théorèmes II et III la convergence uniforme de la série $A(\varphi)$ s'étend à toutes les valeurs de x, en excluant du plan de la variable les points $-n\beta$ par des aires renfermant chacune un de ces points et aussi petites qu'on voudra.*

4. L'opération V étant permutable avec la dérivation et ayant la même *racine* que celle-ci, c'est à dire la constante, toute opération permutable avec la dérivation et n'admettant pas cette racine pourra, par les principes généraux de la théorie des opérations distributives,[1] s'exprimer par un développement en série de puissances de V à coefficients constants, c'est à dire de la forme (2). Ce développement sera certainement valable pour un ensemble de fonctions, plus ou moins restreint, mais auquel appartiennent les éléments $1, x, x^2, \dots$ En outre, les coefficients du développement s'obtiennent par la méthode des coefficients indéterminés, en y faisant successivement $\varphi = 1, x, x^2, \dots$; chacun de ces éléments x^n étant racine de V^n et non des puissances précédentes de V.

[1] V. mon ouvrage *Le operazioni distributive ecc*, in collaborazione on U. Amaldi, p. 45. Bologna, Zanichelli, 1901.

Appliquons cette méthode à la recherche du développement en série de puissances de V de l'opération que j'indique par θ^{α}, et qui consiste à remplacer, dans une fonction donnée, x par $x + \alpha$. On aura

$$\theta^{\alpha}(\varphi) = c_0 \varphi + c_1 V(\varphi) + c_2 V^2(\varphi) + \ldots ;$$

et en faisant ici la fonction φ successivement égale à $1, x, x^2, \ldots,$ on obtient immédiatement

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = \alpha, \qquad c_2 = \frac{\alpha(\alpha - 2\beta)}{1 \cdot 2}, \qquad c_3 = \frac{\alpha(\alpha - 3\beta)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

En supposant alors démontrée la formule

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}}{\lfloor n}$$

jusqu'à une certaine valeur de n, on l'étend à la valeur suivante $n + 1$ en s'appuyant sur la formule d'analyse combinatoire

$$\begin{aligned} m^{m-k}(m - 1)(m - 2)\ldots(m - k + 1) - m(m - 1)^{m-k}(m - 2)(m - 3)\ldots(m - k) \\ + \binom{m}{2}(m - 2)^{m-k}(m - 3)(m - 4)\ldots(m - k - 1) - \ldots \\ + (-1)^{m-k}\binom{m}{k} k^{m-k}(k - 1)(k - 2)\ldots 2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

dont la démonstration n'offre pas de difficultés.

Nous avons ainsi obtenu la série d'Abel, dont les coefficients, c'est à dire les polynômes (c), se sont présentés de la façon la plus naturelle. La méthode suivie enseigne que la formule sera valable, c'est à dire que le second membre sera une série convergente dont la somme sera égale au premier membre, pour un certain ensemble fonctionnel renfermant les fonctions $1, x, x^2, \ldots$. Quant à l'extension de cet ensemble, c'est le théorème I (§ 3) qui va nous permettre de l'évaluer: il s'agit seulement de trouver la valeur de ρ.

Or, l'expression asymptotique des coefficients (c) s'obtient sans difficulté; elle est donnée par

(7) $$(eb)^n e^{\;\;b} n^{\;\;2};$$

on déduit de là que

$$\rho = \frac{1}{eb},$$

et par suite, en appliquant le théorème I, on obtient le résultat suivant:

IV. *Si $\bar{r}$ est la racine positive de l'équation*

$$\frac{b}{\bar{r}} e^{\bar{r}+1} = 1,$$

toutes les fonctions de l'ensemble $\mathfrak{M}$ pour lesquelles on a $r < \bar{r}$ appartiennent au champ de validité de la formule d'Abel.[1]

5. Si l'on indique par $A(\varphi)$ la série d'Abel, c'est à dire le second membre de la formule (a), les coefficients de la série $A(\varphi)$ donnent, comme on l'a vu, $\rho = \frac{1}{eb}$; les conditions exigées par le théorème III sont en outre vérifiées, comme le montre l'expression asymptotique (7) des coefficients. On en conclut:

V. *L'ensemble $\mathfrak{M}$ appartient tout entier au champ de convergence de la série $A(\varphi)$.*

Cependant, pour les fonctions de cet ensemble, la série $A(\varphi)$ ne représente pas $\varphi(x + \alpha)$, c'est à dire la formule (a) n'est pas valable: l'exemple de $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, déjà considéré par Halphen, suffit à le prouver. Il n'y a pas là de contradiction, puisque $1, x, x^2, \ldots$ n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathfrak{M}$.

6. Bien que la série $A(\varphi)$, appliquée à une fonction de $\mathfrak{M}$, ne donne pas comme résultat $\varphi(x + \alpha)$, cette série nous donne une fonction $\psi(x, \alpha)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial \psi(x, \alpha + \beta)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x + \beta, \alpha)}{\partial \alpha} \tag{8}$$

propriété qui est vérifiée, en particulier, par les fonctions de $x + \alpha$. En

[1] C'est là la condition obtenue par Halphen, loc. cit., p. 78, et par Pareto, loc. cit., p. 307.

particulier, si $\varphi(x)$ est une fonction entière de $\frac{1}{x}$, la fonction $\psi(x, \alpha)$ est une fonction uniforme de x et de α, entière en α, ayant par rapport à x les points singuliers $-n\beta$, et qui vérifie l'équation (8).

D'autres séries de puissances de V, en outre de la série d'ABEL, donnent naissance à des fonctions qui vérifient l'équation (8). Ce sont les séries

$$\sum \frac{p_n(\alpha)}{|n} V^n$$

où les coefficients $p_n(\alpha)$ satisfont à l'équation aux différences mêlées

$$\frac{dp_n(\alpha)}{d\alpha} = np_{n-1}(\alpha - \beta). \tag{9}$$

La solution la plus générale de cette équation est donnée par

$$p_n(\alpha) = c_0 P_n + nc_1 P_{n-1} + \binom{n}{2} c_2 P_{n-2} + \ldots + nc_{n-1} P_1 + c_n,$$

où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes arbitraires et P_n sont les polynômes

$$P_n = \alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}$$

qui figurent dans la formule d'ABEL.

NOTES SUR DEUX TRAVAUX D'ABEL RELATIFS A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENCES FINIES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA
à PORTO — PORTUGAL.

I.

1. Le premier des travaux d'ABEL que nous allons considérer fut publié dans le Magazin for Naturvidenskaberne (Christiania, t. 2, 1823). Dans la troisième partie de ce travail (Oeuvres complètes, 1881, t. 1, p. 21) présente le grand analyste la formule suivante:

$$(1)\qquad \Sigma\varphi(x) = \int\varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_0^{\infty} \frac{\varphi\left(x + \frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}i\right)}{2i} \cdot \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} + C,$$

où $\Sigma\varphi(x)$ représente l'intégrale finie de $\varphi(x)$ et C une constante arbitraire, et en fait application à la détermination de quelques intégrales définies, qui avait été considérées par LEGENDRE dans ses *Exercices de Calcul intégral*, parmi lesquelles se trouve la suivante:

$$(2)\qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^{u} - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}.$$

C'est de cette formule (1) que nous allons premièrement nous occuper, pour en faire une nouvelle application, en démontrant au moyen d'elle et de (2) la formule qui donne l'expression de la dérivée d'ordre quelconque des fonctions de e^x, connue par le nom de *formule d'Herschell*.

Appliquons, pour cela, la formule (1) à la fonction $e^{ux}x^{2n}$, n étant un nombre entier positif et u un nombre quelconque, et remarquons que, au moyen de l'intégration par parties, on trouve

$$\sum e^{ux}x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1}x^{2n} - \sum \frac{e^{u(x+1)}}{e^u - 1}\Delta x^{2n},$$

et par conséquent

$$\sum e^{ux}x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1}\left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1}\Delta x^{2n} + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^2 \Delta^2 x^{2n} \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n} \Delta^{2n} x^{2n}\right].$$

En posant alors

$$P = x^{2n} - \binom{2n}{2}\frac{x^{2n-2}}{2^2}t^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}t^{2n},$$

$$Q = 2n\frac{x^{2n-1}}{2}t - \binom{2n}{3}\frac{x^{2n-3}}{2^3}t^3 + \ldots,$$

on trouve

$$\int_0^\infty \left(P\sin\frac{ut}{2} + Q\cos\frac{ut}{2}\right)\frac{dt}{e^{\pi t} - 1}$$

$$= \frac{1}{e^u - 1}\left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1}\Delta x^{2n} + \ldots + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n}\Delta^{2n}x^{2n}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{x^{2n}}{u} - \frac{2nx^{2n-1}}{u^2} + \ldots + \frac{1 \,.\, 2 \ldots 2n}{u^{2n+1}}\right] + \frac{1}{2}x^{2n} + Ce^{-ux}.$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de cette identité doivent être égals. En considérant premièrement ceux de x^{2n}, on trouve l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{u^{2n}}{1 \,.\, 2 \ldots 2n}C,$$

qui, à cause de la formule (2), fait voir qu'est $C = 0$. Et en y posant ensuite $x = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1} e^u}{(e^u - 1)^2} \left[\Delta 0^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta^2 0^{2n} + \ldots \right.$$
$$\left. - \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n-1} \Delta^{2n} 0^{2n} \right] + (-1)^{n+1} 2^{2n} \frac{1 \,.\, 2 \ldots 2n}{u^{2n+1}}.$$

En appliquant la formule (1) à la fonction $x^{2n-1} e^{ux}$, on trouve de la même manière

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1} \cos \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^n \frac{2^{2n-1} e^u}{(e^u - 1)^2} \left[\Delta 0^{2n-1} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta^2 0^{2n-1} + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n-2} \Delta^{2n-1} 0^{2n-1} \right] - (-1)^n 2^{2n-1} \frac{1 \,.\, 2 \ldots (2n-1)}{u^{2n}}.$$

Mais, d'un autre côté, en dérivant les deux membres de l'égalité (2), par rapport à u, $2n - 1$ et $2n$ fois, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1} \cos \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \left[\frac{1 \,.\, 2 \ldots (2n-1)}{u^{2n}} + \frac{d^{2n-1}(e^u - 1)^{-1}}{du^{2n-1}} \right],$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n+1} 2^{2n} \left[\frac{1 \,.\, 2 \ldots 2n}{u^{2n+1}} - \frac{d^{2n}(e_u - 1)^{-1}}{du^{2n}} \right].$$

De ces deux égalités et des deux antérieures on tire la suivante:

$$\frac{d^m(e^u - 1)^{-1}}{du^m} = -\frac{e^u}{(e^u - 1)^2} \left[\Delta 0^m - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta^2 0^m + \ldots \pm \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{m-1} \Delta^m 0^m \right].$$

Maintenant il n'a qu'un pas à donner pour obtenir la dérivée d'ordre m de $y = f(e^u)$ par rapport à u. Il suffit qu'on forme quelques dérivées successives de $f(e^x)$ pour remarquer qu'on a

$$y^{(m)} = f'(e^u) e^u + A f''(e^u) e^{2u} + B f'''(e^u) e^{3u} + \ldots + f^m(e^u) e^{mu},$$

A, B, ... étant des nombres, qui ne dépendent pas de la fonction considérée, et qu'on peut, par conséquent, obtenir au moyen d'une fonction particulière. En appliquant, pour cela, cette formule à la fonction $(e^u - 1)^{-1}$, on trouve

$$y^{(m)} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^2}\left[1 - 1.2A\frac{e^u}{e^u-1} + 1.2.3B\left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^2 - \dots \pm 1.2\dots m\left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{m-1}\right].$$

On voit donc qu'est

$$A = \frac{1}{1.2}\Delta^2 0^m, \qquad B = \frac{1}{1.2.3}\Delta^3 0^m, \qquad C = \frac{1}{1.2.3.4}\Delta^4 0^m, \quad \dots,$$

et par conséquent

$$y^{(m)} = f'(e^u)e^u + \frac{\Delta^2 0^m}{1.2}f''(e^u)e^{2u} + \frac{\Delta^3 0^m}{1.2.3}f'''(e^u)e^{3u} + \dots + f^m(e^u)e^{mu},$$

qui est la *formule d'Herschell.*

II.

2. Le second travail d'Abel que nous allons considérer, fut publié pour la première fois après sa mort, et se trouve dans le tome 2, p. 1 des Oeuvres complètes. Il y donne la représentation de l'intégrale finie $\sum \frac{1}{x^a}$ par une intégrale définie, au moyen de laquelle il l'étudie. Ici nous allons étudier la même fonction en prenant pour point de depart une série qui la représente, et en appliquant les méthodes de la théorie des fonctions analytiques.

Considérons la série

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+x)^\alpha}\right],$$

où α représente un nombre positif quelconque, laquelle contient comme cas particulier quelqu'unes qu'on trouve dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$, qui correspondent aux valeurs entières de α, et supposons que m^α représente une quelconque des valeurs que prend z^α, quand $z = m$, et

qu'on détermine $(m+x)^a$ par la condition de se reduire à la valeur choisie pour m^a, quand $x = 0$.

Cela posé, nous allons démontrer que la série considérée est *uniformément convergente* dans une aire A, limitée par un contour quelconque, laquelle ne contienne aucun des points d'affixes $-1, -2, -3, \ldots$

Pour cela nous remarquerons premièrement que, si n est le premier nombre entier supérieur à la plus grande des valeurs que prend le module de x dans l'aire A, il suffit qu'on démontre qu'est uniformément convergente dans cette aire la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^a} - \frac{1}{(m+x)^a}\right],$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{m^a\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^a - 1\right]}{m^a(m+x)^a},$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{a\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{a-1}}{m(m+x)^a},$$

où $\lambda \overline{\overline{<}} 1$, $0 < \theta < 1$.

Or il est facile de voir qu'il existe un nombre M que le module de $\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{a-1}$ ne peut pas surpasser, quand x varie, sans sortir de l'aire A, et m prend les valeurs $n+1, n+2, \ldots$. En effet, si est $\alpha > 1$, on a

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{\alpha-1} \overline{\overline{<}} \left(1+\theta\left|\frac{x}{m}\right|\right)^{a-1} < 2^{\alpha-1},$$

quand $m > n$ et $|x| < n$; et, si $\alpha < 1$, on a

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{1-\alpha} > \left(1-\theta\left|\frac{x}{m}\right|\right)^{1-\alpha} > 1 - \frac{n}{n+1},$$

et par conséquent

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{a-1} < n+1.$$

Nous avons donc

$$\left|\frac{\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}}{m(m+x)^{\alpha}}\right| < \frac{M}{m\,|m+x|^{\alpha}} < \frac{M}{m(m-|x|)^{\alpha}} < \frac{M}{(m-n)^{\alpha+1}}.$$

Mais la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(m-n)^{\alpha+1}}$$

est convergente. La série (1) est donc *uniformément convergente dans l'aire considérée* A, et elle définit, par conséquent, une fonction $L_1(x)$, que nous allons étudier.

3. Soit x_0 l'affixe d'un point quelconque de l'aire A. Chaqu'un des termes de la série (1) peut être développé en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-x_0$, convergente à l'intérieur d'un cercle dont le centre soit le point d'affixe x_0 et dont le rayon R soit égal ou inférieur à la distance de ce point à celui des points d'affixes -1, -2, -3, ... qu'en est plus prochain. Mais, d'un autre côté, la série (1) est uniformement convergente dans tout cercle de centre x_0 et de rayon inférieur à R. En appliquant un théorème de Weierstrass bien connu, on voit donc que la fonction définie par la série (1) peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $x-x_0$, convergente à l'intérieur du cercle de rayon R, et que, par conséquent elle est *régulière* en tous les points différents de -1, -2, -3, ... Il convient encore remarquer que -1, -2, -3, ... sont des *points critiques* de la fonction considérée et qu'on a

$$L_1(x) = -\frac{1}{(x+n)^{\alpha}} + P(x+n), \qquad (n=-1,-2,-3,\ldots)$$

$P(x+n)$ représentant un développement ordonné suivant les puissances de $x+n$ qu'il est facile d'obtenir, et que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'affixe $-n$ et dont le rayon est égal à l'unité.

4. En développant $L_1(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de x, on trouve le résultat

$$L_1(x) = \alpha S_{\alpha+1}x - \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}S_{\alpha+2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\,.\,2\,.\,3}S_{\alpha+3}x^3 - \ldots,$$

en posant

$$S_i = 1 + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \frac{1}{4^i} + \ldots,$$

laquelle est convergente à l'intérieur de la circonférence de centre o et de rayon égale à l'unité.

On tire de cette égalité les suivantes:

$$L_1'(0) = \alpha S_{\alpha+1}, \qquad L_1''(0) = -\alpha(\alpha+1) S_{\alpha+2}, \quad \ldots$$

dont nous allons faire usage en cherchant le développement de la même fonction en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{x}{x+2}$.

Pour cela, remarquons, en premier lieu, que la droite tirée par le point d'affixe -1, perpendiculairement à l'axe des abscisses, divise le plan de représentation de x en deux demiplans et que, dans celui qui contient le point d'affixe o, la fonction $L_1(x)$ est holomorphe. En appliquant maintenant un théorème que nous avons démontré dans le Journal de Crelle (t. 122, p. 98), on conclut que la fonction $L_1(x)$ peut être développée en série de la forme

$$L_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x}{x+2}\right)^n,$$

convergente dans ce demiplan. On détermine A_n au moyen de la formule

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(L_1'(x)(x+2)^n\right)\right]_{x=0},$$

qui donne

$$A_n = 2L_1'(0) + (n-1)\frac{2^2}{1 \cdot 2} L_1''(0) + \binom{n-1}{2} \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} L_1'''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{2^n}{1 \cdot 2 \ldots n} L^{(n)}(0),$$

ou

$$A_n = 2\alpha S_{\alpha+1} - (n-1)\frac{2^2}{1.2}\alpha(\alpha+1) S_{\alpha+2} + \binom{n-1}{2} \frac{2^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) S_{\alpha+3} \ldots$$
$$\pm \frac{2^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) S_{\alpha+n}.$$

5. En dérivant n fois la série (1) par rapport à x, il vient

$$L_1^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+x)^{\alpha+n}}.$$

Donc entre la dérivée d'ordre n de $L_1(x, \alpha)$ et la fonction $L_1(x, \alpha+n)$ existe la relation

$$L_1^{(n)}(x, \alpha) = (-1)^{n}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\left[L_1(x, \alpha+n) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha+n}}\right].$$

6. Nous avons supposé jusqu'ici que les binômes qui entrent dans la série (1) sont des branches quelconques des fonctions qu'ils représentent. En nous plaçant maintenant dans un point de vue plus particulier, nous supposerons qu'on choisit les valeurs des quantités 1^a, 2^a, 3^a, ..., qui entrent dans cette série, de manière qu'elles coincident avec celles que prend, dans les points d'affixes $1, 2, 3, \ldots$, une branche uniforme de la fonction x^a, déterminée par une certaine valeur initialle et par une coupure, qui part du point d'affixe 0 et que x ne puisse traverser, et qu'on prend pour valeurs des binômes $(1+x)^a$, $(2+x)^a$, $(3+x)^a$, ..., dans chaque point, celles que prend la même branche de x^a dans les points $1+x$, $2+x$, $3+x$, ... Alors, si l'on change dans la série (1) x en $x+1$ et si l'on représente par K_a et K'_a les sommes des a premiers termes des deux séries, on a

$$K'_a - K_a = \frac{1}{(1+x)^a} - \frac{1}{(a+1+x)^a},$$

et, par conséquent, en posant $a = \infty$,

$$L_1(x+1) - L_1(x) = \frac{1}{(1+x)^a}.$$

La fonction $L_1(x)$ représente donc l'intégrale finie de $\frac{1}{(1+x)^a}$, ou $L_1(x-1)$ celle de $\frac{1}{x^a}$. La fonction $L_1(x-1)$ coincide donc, dans le cas particulier maintenant considéré, avec la fonction $L(x)$ de Abel.

RECHERCHES SUR LES VALEURS EXTRÊMES DES INTÉGRALES ET SUR L'INTERPOLATION

PAR

A. MARKOFF

à S:t PETERSBOURG.

Dans ce mémoire j'ai en vue de donner la plus grande généralité aux résultats, obtenus auparavant, de compléter les démonstrations et enfin d'expliquer la connexion entre mes recherches et les recherches des autres géomètres.[1]

Les recherches sur les maxima et les minima peuvent être divisées en trois parties.

La première partie consiste dans la déductions des équations, par lesquelles se déterminent le maximum ou le minimum cherché et les autres inconnus liés à celui-ci. La seconde partie consiste dans la solution des équations obtenues ou, au moins, dans l'éclaircissement, que ces équations sont compatibles et déterminent les inconnus. Enfin la troisième partie consiste dans la démonstration, que les équations établies correspondent effectivement au maximum ou minimum cherché.

---

[1] A. MARKOFF, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, (en russe), 1884. *Sur une question de maximum et de minimum*, (Acta mathematica, 1886). *Nouvelles applications des fractions continues*, (Mathematische Annalen, B. 47).

TCHÉBYCHEF, *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données*, (Mémoires de l'Acad. de Sciences de St Petersb., VII série, I, 1859).

A. KORKINE et G. ZOLOTAREF, *Sur un certain minimum*, (Nouvelles Annales, 1873).

STIELTJES, *Jets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere*, (Delft, 1876).

Bien que plusieurs recherches de cette espéce se bornent à la première partie, mais le défaut de la seconde et de la troisième partie peut dénuer ces recherches de toute importance. On ne saurait justifier ce défaut par une affirmation mal fondée, qu'il est évident, que la question posée doit avoir une solution.

Au contraire, en développant convenablement la seconde et la troisième partie, nous pouvons supprimer la première, s'il est possible de deviner le résultat cherché.

Dans nos recherches il s'agit justement des questions, dont nous pouvons deviner la résolution au moyen de l'analogie à la résolution des autres questions discutées. C'est pourquoi nous tenons pour superflu de nous arrêter à la première partie.

§ 1. Soit

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \ldots$$

une série de fonctions satisfaisantes aux inégalités

$$\lambda_1(z)>0,\quad \begin{vmatrix}\lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z)\\ \lambda_2(z)\,, & \lambda_2'(z)\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}\lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z)\,, & \lambda_1''(z)\\ \lambda_2(z)\,, & \lambda_2'(z)\,, & \lambda_2''(z)\\ \lambda_3(z)\,, & \lambda_3'(z)\,, & \lambda_3''(z)\end{vmatrix}>0,\ \ldots,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z)\,, & \ldots, & \lambda_1^{(n)}(z)\\ \lambda_2(z)\,, & \lambda_2'(z)\,, & \ldots, & \lambda_2^{(n)}(z)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{n+1}(z)\,, & \lambda_{n+1}'(z)\,, & \ldots, & \lambda_{n+1}^{(n)}(z)\end{vmatrix}>0,$$

pour toutes les valeurs de z comprises entre a et b.

$$(a\leq z\leq b).$$

Pour nos recherches il est important de démontrer la proposition suivante.

Théorème I.

Si

$$a \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} \leq b,$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & , & \lambda_1(u_2) & , \ldots , & \lambda_1(u_n) & , & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & , & \lambda_2(u_2) & , \ldots , & \lambda_2(u_n) & , & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \lambda_3(u_1) & , & \lambda_3(u_2) & , \ldots , & \lambda_3(u_n) & , & \lambda_3(u_{n+1}) \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1) & , & \lambda_{n+1}(u_2) & , \ldots , & \lambda_{n+1}(u_n) & , & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

est un nombre positif.

Démonstration.

Dans le cas de $n = 0$ le théorème est évident, car dans ce cas il ne donne que l'inégalité posée

$$\lambda_1(z) > 0.$$

Cela étant, nous supposons, que ce théorème est juste pour n fonctions λ et pour n valeurs u, satisfaisantes à nos conditions, et nous allons démontrer que le même théorème sera aussi juste pour $n + 1$ fonctions λ et pour $n + 1$ valeurs u.

Pour cet effet présentons le déterminant considéré

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & , & \lambda_1(u_2) & , & \lambda_1(u_3) & , \ldots , & \lambda_1(u_n) & , & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & , & \lambda_2(u_2) & , & \lambda_2(u_3) & , \ldots , & \lambda_2(u_n) & , & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \lambda_3(u_1) & , & \lambda_3(u_2) & , & \lambda_3(u_3) & , \ldots , & \lambda_2(u_n) & , & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1) & , & \lambda_{n+1}(u_2) & , & \lambda_{n+1}(u_3) & , \ldots , & \lambda_{n+1}(u_n) & , & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

comme le produit de l'expression

$$\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_2)\lambda_1(u_3)\ldots\lambda_1(u_n)\lambda_1(u_{n+1})$$

et de l'autre déterminant

$$\begin{vmatrix}
\frac{\lambda_2(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \frac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_2(u_2)}{\lambda_1(u_2)}, & \ldots, & \frac{\lambda_2(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_2(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \\
\frac{\lambda_3(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \frac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_3(u_2)}{\lambda_1(u_2)}, & \ldots, & \frac{\lambda_3(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_3(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\lambda_{n+1}(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_{n+1}(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \frac{\lambda_{n+1}(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_{n+1}(u_2)}{\lambda_1(u_2)}, & \ldots, & \frac{\lambda_{n+1}(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_{n+1}(u_n)}{\lambda_1(u_n)}
\end{vmatrix}$$

lequel est égal à un produit de la forme

$$(u_2-u_1)(u_3-u_2)\ldots(u_{n+1}-u_n)\begin{vmatrix}
\Lambda_1(U_1), & \Lambda_1(U_2), & \ldots, & \Lambda_1(U_n) \\
\Lambda_2(U_1), & \Lambda_2(U_2), & \ldots, & \Lambda_2(U_n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Lambda_n(U_1), & \Lambda_n(U_2), & \ldots, & \Lambda_n(U_n)
\end{vmatrix},$$

où l'on pose

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Lambda_1(z), \quad \frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_3(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Lambda_2(z), \quad \ldots, \quad \frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_{n+1}(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Lambda_n(z)$$

et l'on désigne par

$$U_1, U_2, \ldots, U_n$$

des valeurs indéterminées satisfaisantes aux inégalités

$$u_1 < U_1 < u_2 < U_2 < u_3 < \ldots < u_n < U_n < u_{n+1}.$$

Les fonctions nouvelles Λ, semblablement à λ, satisfont aux conditions

$$\Lambda_1(z) > 0, \quad \begin{vmatrix} \Lambda_1(z), & \Lambda_1'(z) \\ \Lambda_2(z), & \Lambda_2'(z) \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \Lambda_1(z), & \Lambda_1'(z), & \Lambda_1''(z) \\ \Lambda_2(z), & \Lambda_2'(z), & \Lambda_2''(z) \\ \Lambda_3(z), & \Lambda_3'(z), & \Lambda_3''(z) \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

pour $a \leqq z \leqq b$, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1(z), & A_1'(z), & A_1''(z), & \ldots, & A_1^{(k-1)}(z) \\ A_2(z), & A_2'(z), & A_2''(z), & \ldots, & A_2^{(k-1)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_k(z), & A_k'(z), & A_k''(z), & \ldots, & A_k^{(k-1)}(z) \end{vmatrix}$$

ne diffère du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z), & \ldots, & \lambda_1^{(k)}(z) \\ \lambda_2(z), & \lambda_2'(z), & \ldots, & \lambda_2^{(k)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{k+1}(z), & \lambda_{k+1}'(z), & \ldots, & \lambda_{k+1}^{(k)}(z) \end{vmatrix}$$

que par le diviseur $\{\lambda_1(z)\}^{k+1}$, ce qu'il est facile de manifister par des transformations simples au moyen de la formule de Leibniz

$$A_i^{(l)}(z) = \frac{1}{\lambda_1(z)} \lambda_{i+1}^{(l+1)}(z) + (l+1)\left(\frac{1}{\lambda_1(z)}\right)' \lambda_{i+1}^{(l)}(z) + \frac{(l+1)l}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{\lambda_1(z)}\right)'' \lambda_{i+1}^{(l-1)}(z) + \ldots$$

Il en résulte conformément à notre supposition, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1(U_1), & A_1(U_2), & \ldots, & A_1(U_n) \\ A_2(U_1), & A_2(U_2), & \ldots, & A_2(U_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n(U_1), & A_n(U_2), & \ldots, & A_n(U_n) \end{vmatrix}$$

est un nombre positif, et par conséquent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1(u_2), & \ldots, & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2(u_2), & \ldots, & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1), & \lambda_{n+1}(u_2), & \ldots, & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

doit être aussi un nombre positif en vertu des égalités précédentes.

Cela suffit pour la démonstration de notre théorème.

De ce théorème découlent plusieurs corollaires importants.

Corollaire 1. Si dans le système des inégalités

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < u_{n+1}$$

nous remplaçerons certains des signes $<$ par $=$, n'égalisant cependant aucuns trois nombres voisins de notre système

$$u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots,\ u_n\,,\ u_{n+1}\,,$$

et si conformément à chaque égalité

$$u_i = u_{i+1}$$

nous remplaçerons dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & , \lambda_1(u_2) & , \ldots, & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & , \lambda_2(u_2) & , \ldots, & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n+1}(u_1) & , \lambda_{n+1}(u_2) & , \ldots, & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

la colonne

$$\lambda_1(u_{i+1})\,,\ \lambda_2(u_{i+1})\,,\ \ldots,\ \lambda_{n+1}(u_{i+1})$$

par

$$\lambda_1'(u_i)\,,\ \lambda_2'(u_i)\,,\ \ldots,\ \lambda_{n+1}'(u_i)$$

le déterminant obtenu de cette manière sera aussi un nombre positif.

On peut atteindre ce résultat en divisant le déterminant primitif par les différences $u_{i+1} - u_i$ et en diminuant ces différences jusqu'à limite zéro.

Il en résulte que le déterminant nouveau ne peut être un nombre négatif, mais, il reste en doute, s'il ne puisse pas être égal à zéro.

On écartera ce doute, en exprimant le déterminant obtenu par le produit d'une quantité, qui différe de zéro, et d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1(U_1)\,, & A_1(U_2)\,, & \ldots, & A_1(U_n) \\ A_2(U_1)\,, & A_2(U_2)\,, & \ldots, & A_2(U_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n(U_1)\,, & A_n(U_2)\,, & \ldots, & A_n(U_n) \end{vmatrix}$$

où l'on a comme auparavant

$$A_1(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)}\right\}, \qquad A_2(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_3(z)}{\lambda_1(z)}\right\}, \quad \ldots, \quad A_n(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_{n+1}(z)}{\lambda_1(z)}\right\},$$

$$a < U_1 < U_2 < \ldots < U_n < b.$$

Examinons par exemple le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1'(u_1)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2'(u_1)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1)\,, & \lambda_3'(u_1)\,, & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix}.$$

En transformant ce déterminant nous trouvons successivement

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1'(u_1)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2'(u_1)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1)\,, & \lambda_3'(u_1)\,, & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix} = \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3) \begin{vmatrix} 1\,, & \dfrac{\lambda_1'(u_1)}{\lambda_1(u_1)}\,, & 1 \\[2ex] \dfrac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)}\,, & \dfrac{\lambda_2'(u_1)}{\lambda_1(u_1)}\,, & \dfrac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)} \\[2ex] \dfrac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)}\,, & \dfrac{\lambda_3'(u_1)}{\lambda_1(u_1)}\,, & \dfrac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3) \begin{vmatrix} A_1(u_1)\,, & \dfrac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)} - \dfrac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)} \\[2ex] A_2(u_1)\,, & \dfrac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)} - \dfrac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3)\{u_3 - u_1\} \begin{vmatrix} A_1(U_1)\,, & A_1(U_2) \\ A_2(U_2)\,, & A_1(U_2) \end{vmatrix},$$

où l'on a

$$U_1 = u_1 < U_2 < u_3.$$

Corollaire 2. Si nous remplaçerons les éléments

$$\lambda_1(u_{2k}),\ \lambda_2(u_{2k}),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}(u_{2k})$$

de chaque colonne paire du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1(u_2), & \ldots, & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2(u_2), & \ldots, & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n+1}(u_1), & \lambda_{n+1}(u_2), & \ldots, & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

par

$$\lambda_1'(u_{2k-1}),\ \lambda_2'(u_{2k-1}),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}'(u_{2k-1}),$$

le déterminant obtenu de cette manière restera un nombre positif pour toutes les valeurs des nombres

$$u_1,\ u_3,\ u_5,\ \ldots,$$

pourvu qu'elles soient différentes et comprises entre a et b.

Ce corollaire découle du corollaire précédent.

Remarque. Il est évident, que dans notre théorème et dans ces corollaires la fonction $\lambda_{n+1}(z)$ peut être remplacée par chaque autre fonction $\Omega(z)$, satisfaisante à l'inégalité

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z), & \ldots, & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z), & \lambda_2'(z), & \ldots, & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n(z), & \lambda_n'(z), & \ldots, & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z), & \ldots, & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} > 0$$

pour l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ entier.

On peut admettre aussi que l'inégalité dernière parfois se réduit à l'égalité, mais alors il faut compter parmi les nombres positifs le zéro.

Corollaire 3. Si la fonction $\Omega(z)$ satisfait à l'inégalité

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z), & \ldots, & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z), & \lambda_2'(z), & \ldots, & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n(z), & \lambda_n'(z), & \ldots, & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z), & \ldots, & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} > 0$$

pour l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ entier et les coefficients

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

sont déterminés par les équations

$$\begin{aligned} p_1\lambda_1(u_1) + p_2\lambda_2(u_1) + \ldots + p_n\lambda_n(u_1) &= \Omega(u_1), \\ p_1\lambda_1(u_2) + p_2\lambda_2(u_2) + \ldots + p_n\lambda_n(u_2) &= \Omega(u_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1\lambda_1(u_n) + p_2\lambda_2(u_n) + \ldots + p_n\lambda_n(u_n) &= \Omega(u_n), \end{aligned}$$

où l'on a

$$a \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-1} < u_n \leq b,$$

cette expression $\Phi(z)$ doit satisfaire aux inégalités

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\leq \Omega(z) \text{ pour } u_n < z < b, \\ \Phi(z) &\geq \Omega(z) \quad \text{»} \quad u_{n-1} < z < u_n, \\ \Phi(z) &\leq \Omega(z) \quad \text{»} \quad u_{n-2} < z < u_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n\Phi(z) &\geq (-1)^n\Omega(z) \text{ pour } u_1 < z < u_2, \\ (-1)^n\Phi(z) &\leq (-1)^n\Omega(z) \quad \text{»} \quad a < z < u_1. \end{aligned}$$

On obtient ce corollaire en remarquant la formule

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \ldots, & \lambda_1(u_n) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \ldots, & \lambda_2(u_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_n(u_1)\,, & \lambda_n(u_2)\,, & \ldots, & \lambda_n(u_n) \end{vmatrix} \left\{\Omega(z) - \Phi(z)\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \ldots, & \lambda_1(u_n)\,, & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \ldots, & \lambda_2(u_n)\,, & \lambda_2(z) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_n(u_1)\,, & \lambda_n(u_2)\,, & \ldots, & \lambda_n(u_n)\,, & \lambda_n(z) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2)\,, & \ldots, & \Omega(u_n)\,, & \Omega(z) \end{vmatrix}.$$

§ 2. Ajoutons maintenant aux fonctions

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z),$$

satisfaisantes aux conditions précédentes, une fonction $\Omega(z)$, laquelle satisfait aux inégalités

$$\Omega(z) > 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z) \\ \Omega(z)\,, & \Omega'(z) \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z)\,, & \lambda_1''(z) \\ \lambda_2(z)\,, & \lambda_2'(z)\,, & \lambda_2''(z) \\ \Omega(z)\,, & \Omega'(z)\,, & \Omega''(z) \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z)\,, & \lambda_1''(z)\,, & \ldots, & \lambda_1^{(n+1)}(z) \\ \lambda_2(z)\,, & \lambda_2'(z)\,, & \lambda_2''(z)\,, & \ldots, & \lambda_2^{(n+1)}(z) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_{n+1}(z)\,, & \lambda_{n+1}'(z)\,, & \lambda_{n+1}''(z)\,, & \ldots, & \lambda_{n+1}^{(n+1)}(z) \\ \Omega(z)\,, & \Omega'(z)\,, & \Omega''(z)\,, & \ldots, & \Omega^{(n+1)}(z) \end{vmatrix} > 0$$

pour toutes les valeurs de z, comprises entre a et b.

Nous pouvons établir la proposition suivante.

Théorème 2.

Si les fonctions

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \Omega(z)$$

satisfont aux inégalités indiquées ci-dessus et si les $k+l=n+1$ nombres

$$a_k\,,\ a_{k-1}\,,\ a_{k-2}\,,\ \ldots,\ a_1\,,\ b_1\,,\ b_2\,,\ \ldots,\ b_{l-1}\,,\ b_l,$$

satisfont aux inégalités

$$a \leqq a_k < a_{k-1} < \ldots < a_1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_l \leqq b,$$

la fonction

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(z),$$

dont les coefficients

$$p_1\,,\ p_2\,,\ \ldots,\ p_{n+1}$$

se déterminent par les équations

$$\begin{array}{l}
p_1\lambda_1(a_k) + p_2\lambda_2(a_k) + \ldots + p_n\lambda_n(a_k) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_k) = \Omega(a_k)\,,\\
p_1\lambda_1(a_{k-1}) + p_2\lambda_2(a_{k-1}) + \ldots + p_n\lambda_n(a_{k-1}) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_{k-1}) = \Omega(a_{k-1}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1\lambda_1(a_1) + p_2\lambda_2(a_1) + \ldots + p_n\lambda_n(a_1) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_1) = \Omega(a_1)\,,\\
p_1\lambda_1(b_1) + p_2\lambda_2(b_1) + \ldots + p_n\lambda_n(b_1) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_1) = 0\,,\\
p_1\lambda_1(b_2) + p_2\lambda_2(b_2) + \ldots + p_n\lambda_n(b_2) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_2) = 0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1\lambda_1(b_l) + p_2\lambda_2(b_l) + \ldots + p_n\lambda_n(b_l) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_l) = 0\,,
\end{array}$$

doit satisfaire aux inégalités

$$\Phi(z) \leq \Omega(z) \quad \text{pour} \quad a_1 \leq z \leq b,$$

$$\Phi(z) \geq \Omega(z) \quad \text{»} \quad a_2 \leq z \leq a_1,$$

$$\Phi(z) \leq \Omega(z) \quad \text{»} \quad a_3 \leq z \leq a_2,$$

. . . .

$$(-1)^{k-1}\Phi(z) < (-1)^{k-1}\Omega(z) \quad \text{pour} \quad a_k \leq z \leq a_{k-1},$$

$$(-1)^{k}\Phi(z) < (-1)^{k}\Omega(z) \quad \text{»} \quad a \leq z \leq a_k,$$

$$\Phi(z) \geq 0 \quad \text{pour} \quad a_1 \leq z \leq b_1,$$

$$\Phi(z) \leq 0 \quad \text{»} \quad b_1 \leq z \leq b_2,$$

$$\Phi(z) \geq 0 \quad \text{»} \quad b_2 \leq z \leq b_3,$$

. . . .

$$(-1)^{l-1}\Phi(z) > 0 \quad \text{pour} \quad b_{l-1} \leq z \leq b_l,$$

$$(-1)^{l}\Phi(z) > 0 \quad \text{»} \quad b_l \leq z \leq b.$$

Démonstration.

Ce théorème a été déjà démontré dans mon mémoire *Sur une question de maximum et de minimum;* or nous allons donner une autre démonstration.

Nous remarquons d'abord que le théorème est évidemment juste dans le cas de $k = 0$, car dans ce cas la fonction $\Phi(z)$ se réduit à zéro.

Il est facile de vérifier ce théorème et dans le cas, où l'on a

$$k = 1 \quad \text{et} \quad l = 0.$$

En effet dans ce cas on obtient

$$\Phi(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\lambda_1(a_1)}\Omega(a_1)$$

et par conséquent la différence

$$\Phi(z) - \Omega(z),$$

se réduit à

$$\frac{1}{\lambda_1(a_1)}\begin{vmatrix}\lambda_1(z), & \lambda_1(a_1)\\ \Omega(z), & \Omega(a_1)\end{vmatrix} = \frac{-1}{\lambda_1(a_1)}\begin{vmatrix}\lambda_1(a_1), & \lambda_1(z)\\ \Omega(a_1), & \Omega(z)\end{vmatrix}.$$

Il en résulte que cette différence est un nombre positif pour $a < z < a_1$ et au contraire — négatif pour $a_1 < z < b$; or on a

$$\Phi(z) \geqq 0$$

pour toutes les valeurs considérées de z.

Cela étant, admettons que notre théorème est établi pour tous les cas, où au lieu du nombre $n + 1$ on a n.

Formons les expressions

$$\Phi_0(z) = p_1^0\lambda_1(z) + p_2^0\lambda_2(z) + \ldots + p_n^0\lambda_n(z)$$

et

$$\Phi_1(z) = p_1'\lambda_1(z) + p_2'\lambda_2(z) + \ldots + p_n'\lambda_n(z),$$

en déterminant les coefficients

$$p_1^0,\ p_2^0,\ \ldots,\ p_n^0,\ p_1',\ p_2',\ \ldots,\ p_n'$$

par les équations

$$\begin{array}{ll}
\Phi_0(a_k) = \Omega(a_k), & \\
\Phi_0(a_{k-1}) = \Omega(a_{k-1}), & \Phi_1(a_{k-1}) = \Omega(a_{k-1}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_0(a_1) = \Omega(a_1), & \Phi_1(a_1) = \Omega(a_1), \\
\Phi_0(b_1) = 0, & \Phi_1(b_1) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_0(b_{l-1}) = 0, & \Phi_1(b_{l-1}) = 0, \\
 & \Phi_1(b_l) = 0.
\end{array}$$

Ces fonctions $\Phi_0(z)$ et $\Phi_1(z)$, conformément à notre supposition, doivent satisfaire aux inégalités

$$(-1)^k \Phi_0(z) \leqq (-1)^k \Omega(z) \text{ pour } a < z < a_k, \quad (-1)^{k-1} \Phi_1(a_k) \leqq (-1)^{k-1} \Omega(a_k),$$

$$(-1)^{k-1} \Phi_0(z) \text{ et } (-1)^{k-1} \Phi_1(z) \leqq (-1)^{k-1} \Omega(z) \text{ pour } a_k < z < a_{k-1},$$

. . . .

$$\Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \geqq \Omega(z) \text{ pour } a_2 < z < a_1,$$

$$\Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \leqq \Omega(z) \quad \text{»} \quad a_1 < z < b_1,$$

$$\Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \geqq 0 \quad \text{»} \quad a_1 < z < b_1,$$

$$\Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \leqq 0 \quad \text{»} \quad b_1 < z < b_2,$$

. . . .

$$(-1)^{l-1} \Phi_0(z) \text{ et } (-1)^{l-1} \Phi_1(z) \geqq 0 \text{ pour } b_{l-1} < z < b_l,$$

$$(-1)^{l-1} \Phi_0(b_l) \geqq 0, \quad (-1)^l \Phi_1(z) \geqq 0 \text{ pour } b_l < z < b.$$

D'autre part, il est facile de voir, que la fonction $\Phi(z)$ déterminée par les conditions du théorème est liée avec les fonctions $\Phi_0(z)$ et $\Phi_1(z)$ par les formules

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) - \Phi_0(b_l) \frac{\Delta_0(z)}{\Delta_0(b_l)}$$

et

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \{\Omega(a_k) - \Phi_1(a_k)\} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(a_k)},$$

où l'on a

$$\Delta_0(z) = \begin{vmatrix} \lambda_1(a_k), & \ldots, & \lambda_1(a_1), & \lambda_1(b_1), & \ldots, & \lambda_1(b_{l-1}), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(a_k), & \ldots, & \lambda_2(a_1), & \lambda_2(b_1), & \ldots, & \lambda_2(b_{l-1}), & \lambda_2(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n+1}(a_k), & \ldots, & \lambda_{n+1}(a_1), & \lambda_{n+1}(b_1), & \ldots, & \lambda_{n+1}(b_{l-1}), & \lambda_{n+1}(z) \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_1(z) = \begin{vmatrix} \lambda_1(z) , & \lambda_1(a_{k-1}) , & \ldots , & \lambda_1(a_1) , & \lambda_1(b_1) , & \ldots , & \lambda_1(b_l) \\ \lambda_2(z) , & \lambda_2(a_{k-1}) , & \ldots , & \lambda_2(a_1) , & \lambda_2(b_1) , & \ldots , & \lambda_2(b_l) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(z) , & \lambda_{n+1}(a_{k-1}) , & \ldots , & \lambda_{n+1}(a_1) , & \lambda_{n+1}(b_1) , & \ldots , & \lambda_{n+1}(b_l) \end{vmatrix}$$

C'est pourquoi nous pouvons, en vertu du théorème 1 établir les inégalités

$$(-1)^k \Phi(z) < (-1)^k \Phi_0(z) \leqq (-1)^k \Omega(z) \text{ pour } a < z < a_k,$$

$$(-1)^{k-1} \Phi(z) \leqq (-1)^{k-1} \Phi_0(z) \leqq (-1)^{k-1} \Omega(z) \text{ pour } a_k < z < a_{k-1},$$

. . . .

$$\Phi(z) > \Phi_0(z) > \Omega(z) \text{ pour } a_2 < z < a_1,$$

$$\Phi(z) < \Phi_0(z) < \Omega(z) \quad \text{»} \quad a_1 < z < b_1,$$

$$\Phi(z) > \Phi_1(z) > 0 \quad \text{»} \quad a_1 < z < b_1,$$

$$\Phi(z) < \Phi_1(z) < 0 \quad \text{»} \quad b_1 < z < b_2,$$

. . . .

$$(-1)^l \Phi(z) > (-1)^l \Phi_1(z) > 0 \text{ pour } b_l < z < b.$$

De cette manière nous avons obtenu les inégalités du théorème 2, en supposant k et l différents de zéro.

Dans le cas de $l = 0$ la fonction $\Phi_0(z)$ perd le sens.

Il en reste la seule fonction auxiliaire $\Phi_1(z)$, laquelle peut servir pour démontrer l'inégalité

$$\Phi_1(z) > 0$$

pour $a_1 < z < b$.

Quant aux autres inégalités, elles sont une suite immédiate du corollaire troisième.

Ces considérations suffisent pour reconnaître notre théorème.

§ 3. Abordons maintenant le problème suivant.

Etant donnés les nombres a, b, c, C et les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \quad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = \alpha_n;$$

il s'agit de trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz,$$

à la condition

$$c < f(z) < C.$$

Or nous supposons que les fonctions λ satisfont aux conditions établies auparavant.

Le problème posé est une généralisation du problème résolu dans mon mémoire *Nouvelles applications des fractions continues*.

Si les nombres

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

sont donnés arbitrairement, les conditions de notre problème peuvent être incompatibles.

On peut écarter toute incompatibilité en supposant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se déterminent par les égalités

$$\alpha_1 = \int_a^b F(z)\lambda_1(z)dz, \qquad \alpha_2 = \int_a^b F(z)\lambda_2(z)dz, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \int_a^b F(z)\lambda_n(z)dz,$$

où la fonction donnée $F(z)$ satisfait aux inégalités

$$c \leqq F(z) \leqq C.$$

Nous excluons cependant les fonctions $F(z)$, pour lesquelles l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ se divise en n, ou en un nombre plus petit de parties de telle manière que dans chaque de ces parties la fonction $F(z)$ conserve une seule valeur c ou C.

Pour les fonctions $F(z)$ excluées les égalités

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \int_a^b F(z)\lambda_1(z)dz, \quad \ldots, \quad \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = \int_a^b F(z)\lambda_n(z)dz$$

conjointement avec les inégalités

$$c \leq f(z) \leq C$$

trainent après elles

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz = \int_a^b F(z)\lambda_{n+1}(z)dz.$$

Sous la restriction indiquée la solution de notre problème se réduit aux égalités que nous allons donner.

Abordons en premier lieu les deux cas les plus simples:

$$n = 1 \quad \text{et} \quad n = 2.$$

Pour résoudre le problème dans le cas de $n = 1$ il faut déterminer deux nombres η et ξ par les conditions

$$C\int_a^\eta \lambda_1(z) + c\int_\eta^a \lambda_1(z)dz = \alpha_1 = c\int_a^\xi \lambda_1(z)dz + C\int_\xi^b \lambda_1(z)dz.$$

Ces conditions sont exécutables et déterminent effectivement les nombres η et ξ; car si le nombre x croît continuellement de a jusqu'à b, la somme

$$C\int_a^x \lambda_1(z)dz + c\int_x^b \lambda_1(z)dz$$

croît aussi continuellement

$$\text{de} \quad c\int_a^b \lambda_1(z)dz \quad \text{jusqu'à} \quad C\int_a^b \lambda_1(z)dz.$$

et la somme

$$c\int_a^x \lambda_1(z)dz + C\int_x^b \lambda_1(z)dz$$

décroît

$$\text{de} \quad C\int_a^b \lambda_1(z)dz \quad \text{jusqu'à} \quad c\int_a^b \lambda_1(z)dz.$$

et outre cela on a

$$c\int_a^b \lambda_1(z)dz < \int_a^b F(z)\lambda_1(z)dz < C\int_a^b \lambda_1(z)dz.$$

Au moyen de ces nombres η et ξ formons deux fonctions f_{min} et f_{max} du nombre variable z:

$$f_{min} = C \text{ pour } a < z < \eta, \qquad f_{min} = c \text{ pour } \eta < z < b$$

et

$$f_{max} = c \text{ pour } a < z < \xi, \qquad f_{max} = C \text{ pour } \xi < z < b.$$

Les intégrales

$$\int_a^b f_{min}\,\lambda_2(z)\,dz = C\int_a^\eta \lambda_2(z)\,dz + c\int_\eta^b \lambda_2(z)\,dz$$

et

$$\int_a^b f_{max}\,\lambda_2(z)\,dz = c\int_a^\xi \lambda_2(z)\,dz + C\int_\xi^b \lambda_2(z)\,dz$$

seront les valeurs extrêmes cherchées de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz,$$

ce qu'il est clair des formules

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz - \int_a^b f_{min}\,\lambda_2(z)\,dz = \int_a^b \{f(z) - f_{min}\}\lambda_2(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{\lambda_1(\eta)}\int_a^b \{f(z) - f_{min}\}\begin{vmatrix} \lambda_1(\eta), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\eta), & \lambda_2(z) \end{vmatrix} dz$$

et

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz - \int_a^b f_{max}\,\lambda_2(z)\,dz = \int_a^b \{f(z) - f_{max}\}\lambda_2(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{\lambda_1(\xi)}\int_a^b \{f(z) - f_{max}\}\begin{vmatrix} \lambda_1(\xi), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\xi), & \lambda_2(z) \end{vmatrix} dz.$$

En abordant le cas

$$n = 2,$$

introduisons dans nos considérations un nombre variable η'' borné par les inégalités

$$a < \eta'' < \eta,$$

η étant le nombre déterminé auparavant.

A chaque valeur de η'' corresponde une valeur déterminée d'un autre variable ξ'', satisfaisant aux inégalités

$$\eta'' < \xi'' < b$$

et à l'équation

$$C\int_a^{\eta}\lambda_1(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi}\lambda_1(z)dz + C\int_{\xi''}^{b}\lambda_1(z)dz = \alpha_1.$$

L'existence d'un tel nombre ξ'' se manifeste de la recherche précédente, car on trouvera au moyen de ce nombre ξ'' la valeur maximum de l'intégrale

$$\int_{\eta''}^{b} f(z)\lambda_2(z)dz$$

aux conditions

$$c \leqq f(z) \leqq C \text{ et } \int_{\eta''}^{b} f(z)\lambda_1(z)dz = \int_{\eta''}^{b} f_{min}\lambda_1(z)dz,$$

où l'on a

$$f_{min} = C \text{ pour } \eta'' < z < \eta \text{ et } f_{min} = c \text{ pour } \eta < z < b.$$

En vertu de la liaison établie entre ξ'' et η'', on aura

$$\lambda_1(\xi'')d\xi'' = \lambda_1(\eta'')d\eta'',$$

en désignant par $d\xi''$ et $d\eta''$ les différentiels de ces variables.

Il en résulte que η'' et ξ'' croissent et décroissent simultanément.

Il est facile de voir aussi, qu'aux valeurs a et η du nombre η'' correspondent les valeurs ξ et b du nombre ξ''.

Après ces remarques formons l'expression

$$C\int_a^{\eta''}\lambda_2(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi''}\lambda_2(z)dz + C\int_{\xi''}^{b}\lambda_2(z)dz - \alpha_2,$$

laquelle nous désignons par $\chi(\eta'')$.

Si η'' croît de a jusqu'à η, la fonction $\chi(\eta'')$ decroît, car on a

$$\lambda_1(\xi'')\frac{d\chi(\eta'')}{d\eta''} = (c - C)\begin{vmatrix} \lambda_1(\eta''), & \lambda_1(\xi'') \\ \lambda_2(\eta''), & \lambda_2(\xi'') \end{vmatrix} < 0.$$

Or il est facile de conclure, au moyen de la solution de notre problème pour le cas de $n = 1$, que $\chi(a)$ est un nombre positif et $\chi(\eta)$ au contraire est un nombre négatif:

$$\chi(a) = c\int_a^\xi \lambda_2(z)dz + C\int_\xi^b \lambda_2(z)dz - \int_a^b F(z)\lambda_2(z)dz > 0,$$

$$\chi(\eta) = C\int_a^\eta \lambda_2(z)dz + c\int_\eta^b \lambda_2(z)dz - \int_a^b F(z)\lambda_2(z)dz < 0.$$

Par conséquent, il existe dans l'intervalle

de $\eta'' = a$ jusqu'à $\eta'' = \eta$

une seule valeur de η'', pour laquelle $\chi(\eta'')$ se réduit à zéro.

Nous nous persuadons ainsi, qu'il existe un seul ensemble de valeurs de η'' et ξ'', satisfaisant aux deux conditions

$$C\int_a^{\eta''} \lambda_1(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi''} \lambda_1(z)dz + C\int_{\xi''}^b \lambda_1(z)dz = \alpha_1$$

et

$$C\int_a^{\eta''} \lambda_2(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi''} \lambda_2(z)dz + C\int_{\xi''}^b \lambda_2(z)dz = \alpha_2.$$

A cet ensemble correspond la fonction f_{max} du nombre variable z, déterminée par les formules $f_{max} = c$ pour $\eta'' < z < \xi''$ et $f_{max} = C$ pour toutes autres valeurs de z. La fonction f_{max} donne pour l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz$$

sa valeur maximum

$$\int_a^b f_{max}\lambda_3(z)dz.$$

En effet, au moyen des égalités

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \int_a^b f_{max}\lambda_1(z)dz$$

et

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \int_a^b f_{max}\lambda_2(z)dz$$

il est facile d'obtenir la suivante

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz - \int_a^b f_{max}\lambda_3(z)dz$$

$$= \frac{\int_a^b \{f(z) - f_{max}\} \begin{vmatrix} \lambda_1(\eta''), & \lambda_1(\xi''), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\eta''), & \lambda_2(\xi''), & \lambda_2(z) \\ \lambda_3(\eta''), & \lambda_3(\xi''), & \lambda_3(z) \end{vmatrix} dz}{\begin{vmatrix} \lambda_1(\eta''), & \lambda_1(\xi'') \\ \lambda_2(\eta''), & \lambda_2(\xi'') \end{vmatrix}}$$

d'où il est évident que la différence

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz - \int_a^b f_{max}\lambda_3(z)dz$$

ne peut être un nombre positif.

De la même manière il est facile de se convaincre, qu'il existe deux autres nombres ξ', η' satisfaisant aux équations

$$c\int_a^{\xi'} \lambda_1(z)dz + C\int_{\xi'}^{\eta'} \lambda_1(z)dz + c\int_{\eta'}^b \lambda_1(z)dz = \alpha_1,$$

$$c\int_a^{\xi'} \lambda_2(z)dz + C\int_{\xi'}^{\eta'} \lambda_2(z)dz + c\int_{\eta'}^b \lambda_2(z)dz = \alpha_2$$

et aux inégalités

$$a < \xi' < \xi, \ \eta < \eta' < b.$$

Et si l'on pose

$f_{min} = C$ pour $\xi' < z < \eta'$ et $f_{min} = c$ pour toutes les autres valeurs de z,

à cette fonction f_{min} corresponde la valeur minimum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz,$$

comme il est facile de conclure au moyen de la formule

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz - \int_a^b f_{min}\lambda_3(z)dz$$

$$= \frac{\displaystyle\int_a^b \{f(z) - f_{min}\} \begin{vmatrix} \lambda_1(\xi') , & \lambda_1(\eta') , & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\xi') , & \lambda_1(\eta') , & \lambda_2(z) \\ \lambda_3(\xi') , & \lambda_3(\eta') , & \lambda_3(z) \end{vmatrix} dz}{\begin{vmatrix} \lambda_1(\xi') , & \lambda_1(\eta') \\ \lambda_2(\xi') , & \lambda_2(\eta') \end{vmatrix}}.$$

Après avoir examiné le cas de $n = 2$, on peut passer au cas de $n = 3$; mais nous allons considérer le passage générale d'une valeur de n à la valeur suivante: de $n = k$ à $n = k + 1$.

§ 4. Supposons que notre problème est résolue pour le cas des $2m$ données:

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1 , \; \ldots , \; \int_a^b f(z)\lambda_{2m}(z)dz = \alpha_{2m};$$

à savoir supposons, que les fonctions f_{max} et f_{min}, correspondantes à la valeur la plus grande et à la valeur la plus petite de l'intégrale considérée

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+1}(z)dz,$$

se déterminent par les formules

$$f_{max} = C \text{ pour } a < z < \eta_1'' , \; \xi_1'' < z < \eta_2'' , \; \ldots , \; \xi_{m-1}'' < z < \eta_m'' , \; \xi_m'' < z < b,$$

$$f_{max} = c \quad \text{»} \quad \eta_1'' < z < \xi_1'' , \; \eta_2'' < z < \xi_2'' , \; \ldots , \; \eta_m'' < z < \xi_m'',$$

$$f_{min} = C \quad \text{»} \quad \xi_1' < z < \eta_1' , \; \xi_2' < z < \eta_2' , \; \ldots , \; \xi_m' < z < \eta_m',$$

$$f_{min} = c \quad \text{»} \quad a < z < \xi_1' , \; \eta_2' < z < \xi_2' , \; \ldots , \; \eta_{m-1}' < z < \xi_m' , \; \eta_m' < z < b,$$

où l'on a sans doute

$$a < \eta_1'' < \xi_1'' < \eta_2'' < \ldots < \xi_{m-1}'' < \eta_m'' < \xi_m'' < b$$

et

$$a < \xi_1' < \eta_1' < \xi_2' < \ldots < \eta_{m-1}' < \xi_m' < \eta_m' < b.$$

Introduisons ensuite un nombre variable x'', compris entre a et ξ_1', et pour chaque valeur de ce nombre variable déterminons les nombres

$$y_1'' , x_1'' , y_2'' , x_2'' , \ldots , y_m'' , x_m''$$

de telle manière, que la fonction $f(z)$, conservant la valeur constante C pour

$$x'' < z < y_1'' , x_1'' < z < y_2'' , \ldots , x_{m-1}'' < z < y_m'' , x_m'' < z < b$$

et la valeur c pour

$$y_1'' < z < x_1'' , y_2'' < z < x_2'' , \ldots , y_m'' < z < x_m'',$$

donne la valeur la plus grande à l'intégrale

$$\int_{x''}^{b} f(z)\lambda_{2m+1}(z)dz$$

aux conditions

$$c \leq f(z) \leq C$$

et

$$\int_a^b f(z)\lambda_i(z)dz = \int_a^b f_{min}\lambda_i(z)dz,$$

où l'on a

$$i = 1 , 2 , 3 , \ldots , 2m.$$

et f_{min} désigne la fonction indiquée plus haut.

En d'autres termes, nous déterminons les nombres

$$y_1'' , x_1'' , y_2'' , x_2'' , \ldots , y_m'' , x_m''$$

par les équations

$$c\int_a^{x''} \lambda_i(z)dz + C\int_{x''}^{y_1''} \lambda_i(z)dz + \ldots + C\int_{x_m''}^{b} \lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

en posant

$$i = 1 , 2 , 3 , \ldots , 2m.$$

En différentiant ces équations on obtient

$$\lambda_i(x'')dx'' - \lambda_i(y_1'')dy_1'' + \lambda_i(x_1'')dx_1'' - \ldots + \lambda_i(x_m'')dx_m'' = 0,$$

i étant égal à $1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Par conséquent, les différentiels

$$dx'', dy_1'', dx_1'', dy_2'', \ldots, dx_m''$$

sont proportionnels aux déterminants des systèmes de $(2m)^2$ éléments, obtenus de la seule système suivante

$$\begin{array}{l}
\lambda_1(x''), \lambda_1(y_1''), \lambda_1(x_1''), \ldots, \lambda_1(y_m''), \lambda_1(x_m'') \\
\lambda_2(x''), \lambda_2(y_1''), \lambda_2(x_1''), \ldots, \lambda_2(y_m''), \lambda_2(x_m'') \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_{2m}(x''), \lambda_{2m}(y_1''), \ldots\ldots\ldots, \lambda_{2m}(y_m''), \lambda_{2m}(x_m'')
\end{array}$$

lorsqu'on supprime la colonne première, seconde etc.

Cela étant, il est facile de se convaincre au moyen du théorème 1, que tous les nombres

$$y_1'', x_1'', y_2'', \ldots, y_m'', x_m''$$

croissent continuellement, lorsque le nombre x'' croît continuellement.

D'autre part, pour $x'' = a$ on a

$$y_1'' = \eta_1'', \; x_1'' = \xi_1'', \; y_2'' = \eta_2'', \; \ldots, \; y_m'' = \eta_m'', \; x_m'' = \xi_m'';$$

et pour $x'' = \xi_1'$ on a

$$y_1'' = \eta_1', \; x_1'' = \xi_2', \; y_2'' = \eta_2', \; \ldots, \; y_m'' = \eta_m', \; x_m'' = b.$$

Donc, en posant

$$a < x'' < \xi_1'$$

on aura les inégalités

$$\eta_1'' < y_1'' < \eta_1', \; \xi_1'' < x_1'' < \xi_2', \; \eta_2'' < y_2'' < \eta_2', \; \ldots, \; \xi_m'' < x_m'' < b.$$

Formons maintenant la somme

$$c\int_a^{x''} \lambda_{2m+1}(z)dz + C\int_{x''}^{y_1''} \lambda_{2m+1}(z)dz + \ldots + C\int_{x_m''}^{b} \lambda_{2m+1}(z)dz,$$

en la désignant par $\chi(x'')$.

Il est clair de la formule

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(y_1'') \,, & \lambda_1(x_1'') \,, & \ldots, & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(y_1'') \,, & \lambda_2(x_1'') \,, & \ldots, & \lambda_2(x_m'') \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{2m}(y_1'') \,, & \lambda_{2m}(x_1'') \,, & \ldots, & \lambda_{2m}(x_m'') \end{vmatrix} \frac{d\chi(x'')}{dx}$$

$$= -\{c - C\} \begin{vmatrix} \lambda_1(x'') \,, & \lambda_1(y_1'') \,, & \ldots, & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(x'') \,, & \lambda_2(y_1'') \,, & \ldots, & \lambda_2(x_m'') \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{2m}(x'') \,, & \lambda_{2m}(y_1'') \,, & \ldots, & \lambda_{2m}(x_m'') \\ \lambda_{2m+1}(x'') \,, & \cdots & \cdots, & \lambda_{2m+1}(x_m'') \end{vmatrix} .$$

que cette somme décroît continuellement, lorsque x'' croît continuellement de $x'' = a$ jusqu'à $x'' = \xi_1'$.

Or, nous avons

$$\chi(a) = \int_a^b f_{max} \lambda_{2m+1}(z) dz > \alpha_{2m+1}$$

et

$$\chi(\xi_1') = \int_a^b f_{min} \lambda_{2m+1}(z) dz < \alpha_{2m+1} .$$

En vertu de cela, il existe dans l'intervalle

$$\text{de } x'' = a \text{ jusqu'à } x'' = \xi_1'$$

une seule valeur de x'', pour laquelle la valeur correspondante de $\chi(x'')$ est égale à α_{2m+1}.

Donc, il existe un seul système de nombres

$$x'' , y_1'' , x_1'' , y_2'' , \ldots , x_{m-1}'' , y_m'' , x_m'' ,$$

déterminés par les inégalités

$$a < x'' < \xi_1' , \eta_1'' < y_1'' < \eta_1' , \xi_1'' < x_1'' < \xi_2' , \ldots , \eta_m'' < y_m'' < \eta_m' , \xi_m'' < x_m'' < b$$

et par les équations

$$c\int_a^{x''}\lambda_i(z)dz + C\int_{x''}^{y_1''}\lambda_i(z)dz + c\int_{y_1''}^{x_1''}\lambda_i(z)dz + \ldots + C\int_{x_m''}^{b}\lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

i étant égal à $1, 2, 3, \ldots, 2m, 2m+1$.

Or, si l'on désigne par f_{max} la fonction du nombre z, qui a la valeur C pour

$$x'' < z < y_1'' , \; x_1'' < z < y_2'' , \; \ldots , \; x_{m-1}'' < z < y_m'' , \; x_m'' < z < b$$

et la valeur c pour

$$a < z < x'' , \; y_1'' < z < x_1'' , \; \ldots , \; y_{m-1}'' < z < x_{m-1}'' , \; y_m'' < z < x_m'' ,$$

la valeur correspondante

$$\int_a^b f_{max}\lambda_{2m+2}(z)dx$$

sera le maximum cherché de l'intégrale considérée

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)dz,$$

car on a

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x'') , & \lambda_1(y_1'') , & \ldots , & \lambda_1(y_m'') , & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(x'') , & \lambda_2(y_1'') , & \ldots , & \lambda_2(y_m'') , & \lambda_2(x_m'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{2m+1}(x'') , & \lambda_{2m+1}(y_1'') , & \ldots & \ldots , & \lambda_{2m+1}(x_m'') \end{vmatrix} \left\{ \int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)dz - \int_a^b f_{max}\lambda_{2m+2}(z)dz \right\}$$

$$= \int_a^b \{f(z) - f_{max}\} \begin{vmatrix} \lambda_1(x'') , & \lambda_1(y_1'') , & \ldots , & \lambda_1(x_m'') , & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(x'') , & \lambda_2(y_1'') , & \ldots , & \lambda_2(x_m'') , & \lambda_2(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{2m+2}(x'') , & \lambda_{2m+2}(y_1'') , & \ldots , & \lambda_{2m+2}(x_m'') , & \lambda_{2m+2}(z) \end{vmatrix} dz$$

De la même manière on peut trouver le minimum de la même integrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)\,dz.$$

A savoir il est facile de se convaincre, qu'il existe des nombres

$$y',\ x_1',\ y_1',\ x_2',\ \ldots,\ y_{m-1}',\ x_m',\ y_m',$$

déterminés par les inégalités

$$a < y' < \eta_1'',\ \xi_1' < x_1' < \xi_1'',\ \eta_1' < y_1' < \eta_2'',\ \ldots,\ \xi_m' < x_m' < \xi_m'',\ \eta_m' < y_m' < b$$

et par les équations

$$C\int_a^{y'}\lambda_i(z)\,dz + c\int_{y'}^{x_1'}\lambda_i(z)\,dz + C\int_{x_1'}^{y_1'}\lambda_i(z)\,dz + \ldots + c\int_{y_m'}^{b}\lambda_i(z)\,dz = \alpha_i,$$

i étant égal à $1, 2, 3, \ldots, 2m+1$.

Et si l'on désigne par f_{min} la fonction du nombre z, qui est égale à C pour

$$a < z < y',\ x_1' < z < y_1',\ x_2' < z < y_2',\ \ldots,\ x_m' < z < y_m',$$

et à c pour

$$y' < z < x_1',\ y_1' < z < x_2',\ \ldots,\ y_{m-1}' < z < x_m',\ y_m' < z < b.$$

cette fonction donnera le minimum cherché de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)\,dz.$$

Les considérations précédentes établissent aussi les inégalités

$$x'' < \xi_1' < x_1' < \xi_1'' < x_1'' < \xi_2' < x_2' < \xi_2'' < \ldots < \xi_m' < x_m' < \xi_m'' < x'$$

et

$$y' < \eta_1'' < y_1'' < \eta_1' < y_1' < \eta_2'' < y_2'' < \eta_2' < \ldots < \eta_m'' < y_m'' < \eta_m' < y_m'.$$

De la même manière on peut passer du cas, où l'on a $n = 2k+1$, au cas de $n = 2k+2$.

Donc, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Etant données les égalités

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \qquad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \alpha_2\ , \ \ldots, \ \int_a^b f(z)\lambda_n(z) = \alpha_n$$

et la condition

$$c \leqq f(z) \leqq C,$$

les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz$$

correspondent aux fonctions

$$f(z) = f_{max} \quad \text{et} \quad f(z) = f_{min}$$

lesquelles dans l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ n'ont que deux valeurs C et c et changent la valeur justement n fois.

Or, la fonction f_{max}, donnant le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz,$$

est égale à C pour les valeurs de z voisines à b, et la fonction f_{min}, donnant le minimum de la même intégrale, est au contraire égale à c pour les valeurs de z voisines à b.

§ 5. En abordant un autre problème ajoutons aux nombres a et b un nombre intermédiaire v $(a < v < b)$ et aux fonctions

$$\lambda_1(z)\ ,\ \lambda_2(z)\ ,\ \ldots,\ \lambda_n(z)$$

ajoutons aussi une fonction $\Omega(z)$, satisfaisant aux inégalités

$$\Omega(z) > 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\ , & \lambda_1'(z) \\ \Omega(z)\ , & \Omega'(z) \end{vmatrix} > 0\ , \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\ , & \lambda_1'(\lambda)\ , & \ldots, & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n(z)\ , & \lambda_n'(z)\ , & \ldots, & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z)\ , & \Omega'(z)\ , & \ldots, & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} > 0,$$

pour l'intervalle entier de $z = a$ jusqu'à $z = b$.

Notre second problème consiste dans la détermination des valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

aux mêmes conditions qu'auparavant

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \quad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \alpha_2\,, \;\ldots\,, \;\int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = \alpha_n.$$

$$c \leqq f(z) \leqq C.$$

Pour éclaircir notre solution, posons

$$n = 3,$$

en nous restreignant à la recherche de la valeur la plus petite de l'intégrale examinée.

Désignons par

$$x'',\, y_1'',\, x_1'',\, y_1',\, x_1',\, y_1',$$

les nombres satisfaisant aux inégalités

$$a < x'' < x_1' < x_1'' < b\,,\; a < y' < y_1'' < y_1' < b$$

et aux égalités

$$C\int_a^{y'}\lambda_i(z)dz + c\int_{y'}^{x_1'}\lambda_i(z)dz + C\int_{x_1'}^{y_1'}\lambda_i(z)dz + c\int_{y_1'}^{b}\lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

$$c\int_a^{x''}\lambda_i(z)dz + C\int_{x''}^{y_1''}\lambda_i(z)dz + c\int_{y_1''}^{x_1''}\lambda_i(z)dz + C\int_{x_1''}^{b}\lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

i étant égal à 1, 2, 3.

L'existence de ces nombres est démontrée par les considérations précédentes.

Cela étant nous distinguons deux cas par rapport à v:

1) v est compris entre a et x'' ou entre x_1' et x_1'';

2) v est compris entre x'' et x_2' ou entre x_1'' et b.

Considérons d'abord le cas premier.

Dans ce cas, en désignant par x le nombre variable compris entre a et x'' déterminons les fonctions

$$y\,,\, x_1\,,\, y_1$$

de ce nombre par les conditions

$$c\int_a^x \lambda_i(z)dz + C\int_x^y \lambda_i(z)dz + c\int_y^{x_1}\lambda_i(z)dz + C\int_{x_1}^{y_1}\lambda_i(z)dz + c\int_{y_1}^b \lambda_i(z)dz = \alpha_i$$

pour $i = 1, 2, 3$.

Si x croît de a jusqu'à x'', le nombre x_1 croît de x_1' jusqu'à x_1''.

Par conséquent il existe une telle valeur de x, pour laquelle on a

$$x = r \quad \text{ou} \quad x_1 = r.$$

Et si l'on donne à x cette valeur et on pose

$$f_r(z) = c \text{ pour } a < z < x,\ y < z < x_1,\ y_1 < z < b$$

et $f_r(z) = C$ pour les autres valeurs de z, l'intégrale correspondante

$$\int_a^b f_r(z)\,\Omega(z)dz$$

sera la valeur la plus petite de l'intégrale considérée

$$\int_a^b f(z)\,\Omega(z)dz.$$

Cette assertion sera évidente dans le cas, où l'on a $a < r < x''$, car dans ce cas on aura

$$\int_a^b f_r(z)\,\Omega(z)dz = c\int_a^b \Omega(z)dz.$$

En supposant ensuite

$$x_1' < r < x_1'',$$

formons l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + p_3\lambda_3(z),$$

en déterminant les coefficients

$$p_1,\ p_2,\ p_3$$

par les conditions

$$\Phi(x) = \Omega(x), \qquad \Phi(y) = \Omega(y), \qquad \Phi(y_1) = 0.$$

En vertu du théorème 2 on aura

$$\begin{aligned}
&\Phi(z) < \Omega(z) \quad \text{pour} \quad a < z < x, \\
&\Phi(z) > \Omega(z) \quad \text{»} \quad x < z < y, \\
&\Phi(z) < \Omega(z) \quad \text{»} \quad y < z < x_1 = v, \\
&\Phi(z) > 0 \qquad \text{»} \quad x_1 < z < y_1, \\
&\Phi(z) < 0 \qquad \text{»} \quad y_1 < z < b,
\end{aligned}$$

et ensuite, l'inégalité

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)dz < \int_a^v f(z)\,\Omega(z)dz$$

découle immédiatement de la formule

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)dz - \int_a^v f(z)\,\Omega(z)dz$$

$$= \int_a^v \{f_v(z) - f(z)\}\{\Omega(z) - \Phi(z)\}dz - \int_v^b \{f_v(z) - f(z)\}\,\Phi(z)dz.$$

Supposons maintenant

$$x'' < v < x_1' \text{ ou } x_1'' < v < b.$$

Dans ce cas, en désignant par y un nombre variable compris entre a et y', déterminons les fonctions

$$x\,,\, y_1\,,\, x_1$$

de ce nombre par les conditions

$$C\int_a^y \lambda_i(z)dz + c\int_y^x \lambda_i(z)dz + C\int_x^{y_1} \lambda_i(z)dz + c\int_{y_1}^{x_1} \lambda_i(z)dz + C\int_{x_1}^b \lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

i étant égal à $1\,,\,2\,,\,3$.

Lorsque y croît continuellement de a jusqu'à y', les nombres x et x_1 croissent aussi continuellement: le premier de x'' jusqu'à x' et le second de x_1'' jusqu'à b.

Il en résulte, que l'un des deux nombres

$$x\,,\; x_1$$

peut être égalisé à r.

En disposant de y de telle manière qu'on aura

$$x = r \quad \text{ou} \quad x_1 = r,$$

posons

$$f_r(z) = C \text{ pour } a < z < y\,,\; x < z < y_1\,,\; x_1 < z < b,$$

et

$$f_r(z) = c \text{ pour } y < z < x\,,\; y_1 < z < x_1.$$

Alors, l'intégrale

$$\int_a f_r(z)\,\Omega(z)\,dz$$

présentera la valeur la plus petite de l'intégrale considérée

$$\int_a^r f(z)\,\Omega(z)\,dz.$$

Nous nous persuadons de cela au moyen de la formule

$$\int_a^r f_r(z)\,\Omega(z)\,dz - \int_a^r f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

$$= \int_a^r \{f_r(z) - f(z)\}\{\Omega(z) - \Phi(z)\}\,dz - \int_r^b \{f_r(z) - f(z)\}\,\Phi(z)\,dz$$

où l'on a

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + p_3\lambda_3(z),$$

en déterminant les coefficients p_1, p_2, p_3 par les équations

$$\Phi(y) = \Omega(y), \qquad \Phi(x) = \Omega(x) \quad \text{et} \quad \Phi(y_1) = \Omega(y_1)$$

dans le cas de $x_1 = r$ et par les équations

$$\Phi(y) = \Omega(y), \qquad \Phi(y_1) = \Phi(x_1) = 0,$$

si l'on a $x = r$.

De la même manière on peut trouver la valeur la plus grande de la même intégrale

$$\int_r f(z)\Omega(z)dz.$$

Abordons les considérations générales.

§ 6. En nous arrêtant pour fixer les idées à la recherche du maximum de l'intégrale

$$\int_r f(z)\Omega(z)dz,$$

nous posons

$$n = 2m.$$

Quant à r nous distinguons deux cas en conservant les désignations du § 4:

1) r est compris entre

$$a \text{ et } \eta_1'', \text{ ou } \eta_1' \text{ et } \eta_2'', \text{ ou } \eta_2' \text{ et } \eta_3'' \ldots, \text{ ou entre } \eta_m' \text{ et } b;$$

2) r est compris entre

$$\eta_1'' \text{ et } \eta_1', \text{ ou } \eta_2'' \text{ et } \eta_2', \ldots, \text{ ou entre } \eta_m'' \text{ et } \eta_m'.$$

En abordant le premier cas désignons par y un nombre variable, compris entre a et η_1'' et par

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m$$

les fonctions de ce variable, déterminées par les équations

$$C\int_r^y \lambda_i(z)dz + c\int^{x_1} \lambda_i(z)dz + \ldots + C\int_{x_m}^{y_m} \lambda_i(z)dz + c\int^{b} \lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

où l'on a $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$.

L'existence de ces fonctions est démontrée par les raisonnements du § 4.

Il est facile aussi de se convaincre, que les nombres

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

croissent en même temps que y croît; à savoir y_1 croît de η_1' jusqu'à η_2'', y_2 — de η_2' jusqu'à η_3'' etc., lorsque y croît de a jusqu'à η_1''.

Par conséquent on peut disposer du nombre y ainsi, que l'un des nombres

$$y\,,\; y_1\,,\; y_2\,,\; \ldots\,,\; y_m$$

sera égal à v.

Alors, en posant

$$f_v(z) = C \text{ pour } a < z < y\,,\; x_1 < z < y_1\,,\; x_2 < z < y_2\,,\; \ldots\,,\; x_m < z < y_m$$

et

$$f_v(z) = c \text{ pour } y < z < x_1\,,\; y_1 < z < x_2\,,\; y_2 < z < x_3\,,\; \ldots\,,\; y_m < z < b,$$

on obtiendra le maximum cherché

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz$$

de l'intégrale considérée.

Soit en effet

$$v = y_k.$$

Posons

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{2m}\lambda_{2m}(z)$$

en déterminant les coefficients

$$p_1\,,\; p_2\,,\; \ldots\,,\; p_{2m}$$

par les équations

$$\Phi(y) = \Omega(y), \quad \Phi(x_1) = \Omega(x_1), \quad \Phi(y_1) = \Omega(y_1)\;,\; \ldots\,,\; \Phi(x_k) = \Omega(x_k),$$
$$\Phi(x_{k+1}) = 0, \quad \Phi(y_{k+1}) = 0\;,\; \ldots\,,\; \Phi(x_m) = 0, \quad \Phi(y_m) = 0.$$

En vertu du théorème 2, la fonction $\Phi(z)$ satisfait à l'inégalité

$$\Phi(z) \leqq \Omega(z),$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(a\,, y_1)\,,\; (x_1\,, y_1)\,,\; (x_2\,, y_2)\,,\; \ldots\,,\; (x_k\,, y_k),$$

et au contraire

$$\Phi(z) \geqq \Omega(z),$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(y\,, x_1)\,,\; (y_1\,, x_2)\,,\; (y_2\,, x_3)\,,\; \ldots\,,\; (y_{k-1}\,, x_k).$$

En vertu du théorème, on aura aussi

$$\Phi(z) \geq 0,$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(y_k, x_{k+1}), (y_{k+1}, x_{k+2}), \ldots, (y_m, b),$$

et au contraire

$$\Phi(z) \leq 0,$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2}), \ldots, (x_m, y_m).$$

D'après cela, la formule

$$\int_a^v f_v(z)\Omega(z)dz - \int_a^v f(z)\Omega(z)dz$$

$$= \int_a^v \{f_v(z) - f(z)\}\{\Omega(z) - \Phi(z)\}dz - \int_v^b \{f_v(z) - f(z)\}\Phi(z)dz$$

donne l'inégalité

$$\int_a^v f_v(z)\Omega(z)dz > \int_a^v f(z)\Omega(z)dz.$$

En passant au second cas prenons le système de nombres variables

$$x, y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, x_m, y_m$$

déterminé par les inégalités

$$a < x < \xi_1', \eta_1'' < y_1 < \eta_1', \xi_1'' < x_1 < \xi_2', \eta_2'' < y_2 < \eta_2', \ldots, \xi_m'' < x_m < b$$

et les équations

$$c\int_a^x \lambda_i(z)dz + C\int_x^{y_1} \lambda_i(z)dz + c\int_{y_1}^{x_1} \lambda_i(z)dz + \ldots + C\int_{x_m}^b \lambda_i(z)dz = \alpha_i.$$

où l'on a $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Conformément à ce que nous avons expliqué dans le § 4, lorsque x croît continuellement de a jusqu'à ξ_1', les variables

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

croissent aussi continuellement: y_1 de η_1'' jusqu'à η_1', y_2 de η_2'' jusqu'à η_2' etc.

Il en résulte que l'un des nombres

$$y_1 \, , y_2 \, , \, \ldots \, , y_m$$

peut être égalisé à v.

Cela faisant, posons

$$f_v(z) = C \text{ pour } x < z < y_1 \, , x_1 < z < y_2 \, , \ldots , x_{m-1} < z < y_m \, , x_m < z < b$$

et

$$f_v(z) = c \text{ pour } a < z < x \, , y_1 < z < x_1 \, , \ldots , y_{m-1} < z < x_{m-1} \, , y_m < z < x_m .$$

La valeur

$$\int_a^v f_v(z)\, \Omega(z) dz$$

obtenue de cette manière sera le minimum cherché de l'intégrale examinée

$$\int_a^v f(z)\, \Omega(z) dz,$$

ce qu'il est facile de démontrer par la méthode expliquée ci-dessus.

Donc nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Etant données les égalités

$$\int_a^b f(z) \lambda_1(z) dz = \alpha_1 , \quad \int_a^b f(z) \lambda_2(z) dz = \alpha_2 \, , \, \ldots \, , \, \int_a^b f(z) \lambda_n(z) dz = \alpha_n$$

et la condition

$$c < f(z) < C,$$

les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^v f(z)\, \Omega(z) dz$$

correspondent aux telles fonctions $f(z)$, lesquelles dans l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ n'ont que deux valeurs C et c et changent la valeur justement $n + 1$ fois.

Or l'une de ces deux fonctions, donnant le maximum de l'intégrale

$$\int_a^v f(z)\, \Omega(z) dz,$$

satisfait aux conditions

$$f(v-\varepsilon)=C \quad \text{et} \quad f(v+\varepsilon)=c,$$

et l'autre, donnant le minimum de la même intégrale, satisfait aux conditions

$$f(v-\varepsilon)=c \quad \text{et} \quad f(v+\varepsilon)=C,$$

le nombre ε étant infiniment petit.

En résolvant notre problème nous avons supposé que v diffère de toutes les valeurs de z, qui séparent les valeurs C et c de la fonction f_{max} ou de la fonction f_{min}.

Mais il est facile de se convaincre, que dans les cas, où v coincide avec l'une ou l'autre de ces valeurs, le maximum ou le minimum de l'intégrale examinée

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

se réduit à

$$\int_a^v f_{min}\,\Omega(z)\,dz \quad \text{ou à} \quad \int_a^v f_{max}\,\Omega(z)\,dz.$$

Quant aux fonctions

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \Omega(z),$$

nous avons supposé, qu'elles sont continues et ont des dérivées de certains ordres.

Mais ces suppositions ne sont pas indispensables et il est facile de voir que les résultats obtenues concernent toutes les fonctions

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \Omega(z),$$

pour lesquelles les expressions

$$\lambda_1(u_1)\,,\ \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2) \end{vmatrix}\,,\ \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1)\,, & \lambda_3(u_2)\,, & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

sont toujours positives et les expressions

$$\Omega(u_1)\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2) \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2)\,, & \Omega(u_3) \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

ne peuvent être négatives, où

$$u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots\,,\, u_{n+1}$$

désignent des nombres arbitraires assujettis seulement aux inégalités

$$a \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+1} \leqq b.$$

Outre cela, nous avons supposé, que les nombres

$$a\,,\, b\,,\, c\,,\, C$$

sont finis.

La solution de notre problème dans le cas, où l'on a

$$c = 0, \qquad C = +\infty,$$

a été donnée dans le mémoire *Sur une question de maximum et de minimum.*

Nous y avons supposé sans démonstration, qu'il existe des maxima et des minima cherchés.

Mais il est facile de remplir cette lacune au moyen de considérations tout à fait analogues à celles, que nous avons employées plus haut.

§ 7. En rapprochant maintenant nos recherches des questions sur l'interpolation, traitées par les autres géomètres, posons

$$c = -1, \qquad C = +1, \qquad F(z) = 0$$

et par conséquent

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0\,,\, \ldots\,,\, \alpha_n = 0.$$

Alors le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

ne se distingue du minimum que par le signe $\pm$.

Cela étant, la question sur les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz$$

aux conditions

$$-1 < f(z) < +1$$

et

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \ldots = \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = 0$$

se réduit aux équations

$$\int_a^{\zeta_1}\lambda_1(z)dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\lambda_1(z)dz + \ldots + (-1)^n\int_{\zeta_n}^b\lambda_1(z)dz = 0,$$

$$\int_a^{\zeta_1}\lambda_2(z)dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\lambda_2(z)dz + \ldots + (-1)^n\int_{\zeta_n}^b\lambda_2(z)dz = 0,$$

. . . .

$$\int_a^{\zeta_1}\lambda_n(z)dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\lambda_n(z)dz + \ldots + (-1)^n\int_{\zeta_n}^b\lambda_n(z)dz = 0,$$

où l'on a

$$a < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_n < b.$$

Le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz$$

sera égal dans ce cas à la somme

$$\int_{\zeta_n}^b\lambda_{n+1}(z)dz - \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n}\lambda_{n+1}(z)dz + \int_{\zeta_{n-2}}^{\zeta_{n-1}}\lambda_{n+1}(z)dz + \ldots + (-1)^n\int_a^{\zeta_1}\lambda_{n+1}(z)dz,$$

que nous désignons, à l'exemple de Tchébychef, par le symbole

$$\int_a \lambda_{n+1}(z),$$

en posant

$$\int_n \omega(z) = \int_{\zeta_n}^{b} \omega(z)dz - \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} \omega(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_a^{\zeta_1} \omega(z)dz$$

pour chaque fonction $\omega(z)$.

Aux symboles

$$\int_1 \omega(z)\,,\ \int_2 \omega(z)\,,\ \int_3 \omega(z)\,,\ \ldots$$

nous ajoutons, aussi à l'exemple de Tchébychef, le symbole

$$\int_0 \omega(z),$$

en désignant ainsi l'intégrale

$$\int_a^b \omega(z)\,dz.$$

Il faut retenir que les symboles

$$\int_0 \lambda_1(z)\,,\ \int_1 \lambda_2(z)\,,\ \int_2 \lambda_3(z)\,,\ \ldots$$

désignent des nombres positifs: le premier désigne le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\lambda_1(z)dz$$

à la condition

$$-1 \leq f(z) \leq 1,$$

le second désigne le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz$$

aux conditions

$$-1 \leq f(z) \leq 1 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = 0,$$

le troisième désigne le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz$$

aux conditions

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = 0, \qquad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = 0$$

et

$$-1 \leq f(z) \leq 1$$

etc.

Au contraire, l'expression

$$\int_n \lambda_m(z)$$

doit se réduire à zéro chaque fois, lorsque on a

$$n \geq m,$$

et par conséquent on aura

$$\int_n \Phi(z) = 0$$

pour chaque expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

dont les coefficients

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

sont des nombres constants.

Cela étant établi, désignons par $\Omega(z)$ une fonction quelconque, satisfaisant seulement à la condition

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), \lambda_1(u_2), \ldots, \lambda_1(u_n), \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1), \lambda_2(u_2), \ldots \lambda_2(u_n), \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n(u_1), \lambda_n(u_2), \ldots, \lambda_n(u_n), \lambda_n(u_{n+1}) \\ \Omega(u_1), \Omega(u_2), \ldots \Omega(u_n), \Omega(u_{n+1}) \end{vmatrix} \geq 0,$$

quels que soient les nombres

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$$

assujettis aux inégalités

$$a \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} < b;$$

dans le mémoire *Iets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere* T. Stieltjes a traité le poblème suivant.

Trouver les coefficients

$$p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots\,,\,p_n$$

de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

à condition que la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b [\Omega(z) - \Phi(z)]dz$$

soit la plus petite, en désignant par $[\omega(z)]$ la valeur absolue de $\omega(z)$.

Or, dans le mémoire *Sur un certain minimum* M. A. Korkine et G. Zolotareff ont traité, beaucoup plus tôt que T. Stieltjes, le cas particulier du même problème, où l'on a

$$\lambda_1(z) = 1, \quad \lambda_2(z) = z\,,\;\ldots\,,\;\lambda_n(z) = z^{n-1}, \quad \Omega(z) = z^n.$$

Les raisonnements de M. A. Korkine et G. Zolotareff sont tout à fait complets et indiscutables, mais il n'est pas possible de reconnaître le même par rapport aux raisonnements de T. Stieltjes.

Nous allons donner la résolution de ce problème sous la forme du théorème.

Théorème 3.

L'intégrale

$$\int_a^b [\Omega(z) - \Phi(z)]dz$$

atteint son minimum

$$\int \Omega(z).$$

lorsque les coefficients $p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots\,,\,p_n$ de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

sont déterminés par le système d'équations

$$p_1\lambda_1(\zeta_1) + p_2\lambda_2(\zeta_1) + \ldots + p_n\lambda_n(\zeta_1) = \Omega(\zeta_1),$$
$$p_1\lambda_1(\zeta_2) + p_2\lambda_2(\zeta_2) + \ldots + p_n\lambda_n(\zeta_2) = \Omega(\zeta_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1\lambda_1(\zeta_n) + p_2\lambda_2(\zeta_n) + \ldots + p_n\lambda_n(\zeta_n) = \Omega(\zeta_n),$$

où

$$\zeta_1\,,\ \zeta_2\,,\ \ldots,\ \zeta_n \ \text{ et } \int_n \Omega(z)$$

ont les significations susindiquées.

Démonstration.

Posons, que l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

se réduit à $\varphi(z)$ dans le cas, où les coefficients

$$p_1\,,\ p_2\,,\ \ldots,\ p_n$$

sont déterminés conformément aux conditions du théorème: en sorte qu'on aura

$$\varphi(\zeta_1) = \Omega(\zeta_1), \quad \varphi(\zeta_2) = \Omega(\zeta_2)\,,\ \ldots\,,\ \varphi(\zeta_n) = \Omega(\zeta_n).$$

Cela étant, en vertu du corollaire 3 du théorème I, la différence

$$\Omega(z) - \varphi(z)$$

doit être un nombre positif pour

$$b > z > \zeta_n\,,\ \zeta_{n-1} > z > \zeta_{n-2}\,,\ \zeta_{n-3} > z > \zeta_{n-4}\,,\ \ldots$$

et au contraire — un nombre négatif, lorsqu'on a

$$\zeta_n > z > \zeta_{n-1}\,,\ \zeta_{n-2} > z > \zeta_{n-3}\,,\ \ldots$$

Donc

$$\int_a^b [\Omega(z) - \varphi(z)]dz = \int_n (\Omega(z) - \varphi(z)) = \int_n \Omega(z),$$

car

$$\int_n \varphi(z) = 0.$$

Or pour toute autre expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

on a

$$\int_a^b [\Omega(z) - \Phi(z)]dz > \int_n (\Omega(z) - \Phi(z)) = \int_n \Omega(z).$$

Les recherches de §§ 5 et 6 peuvent aussi être liées à un problème sur la représentation approximative des fonctions, si l'on posera comme auparavant

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1,$$

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0\,, \;\ldots\,,\; \alpha_n = 0.$$

Posons, que l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

doit représenter approximativement une fonction $\Omega(z)$ dans l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = v$ et zéro dans l'intervalle de $z = v$ jusqu'à $z = b$.

En mesurant l'erreur de cette représentation par la somme

$$\int_a^v [\Omega(z) - \Phi(z)]dz + \int_v^b [\Phi(z)]dz$$

nous parvenons au problème: trouver les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

de telle manière, que la somme

$$\int_a^v [\Omega(z) - \Phi(z)]dz + \int_v^b [\Phi(z)]dz$$

soit la plus petite.

Nous allons donner la solution de ce problème sous la forme du théorème suivant pour le cas, où les expressions

$$\Omega(u_1)\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2) \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2)\,, & \Omega(u_3) \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

n'obtiennent pas des valeurs négatives, quels que soient les nombres

$$u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots,\ u_{n+1}\,,$$

assujettis aux inégalités

$$a \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} \leq b.$$

Théorème 4.

Si v ne se confond avec aucun des nombres susdits

$$\zeta_1\,,\ \zeta_2\,,\ \ldots,\ \zeta_n\,,$$

il existe d'autres nombres

$$\theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \ldots,\ \theta_n$$

satisfaisant aux inégalités

$$a < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k < v < \theta_{k+1} < \ldots < \theta_n < b$$

et aux équations

$$\int_a^{\theta_1} \lambda_i(z)dz - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_i(z)dz + \ldots \pm \int_{\theta_k}^{v} \lambda_i(z)dz \mp \int_v^{\theta_{k+1}} \lambda_i(z)dz \ldots \pm \int_{\theta_n}^{b} \lambda_i(z)dz = 0,$$

où l'on a $i = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots, n$.

Or, la somme considérée

$$\int_a^v [\Omega(z) - \Phi(z)]dz + \int_v^b [\Phi(z)]dz$$

atteint le minimum dans le cas, où les coefficients $p_1\,, p_2\,, \ldots, p_n$ de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

sont déterminés par les équations

$$\begin{aligned}
&p_1\lambda_1(\theta_1) \;\;\;+ p_2\lambda_2(\theta_1) \;\;\;+ \ldots + p_n\lambda_n(\theta_1) \;\;\;= \Omega(\theta_1),\\
&p_1\lambda_1(\theta_2) \;\;\;+ p_2\lambda_2(\theta_2) \;\;\;+ \ldots + p_n\lambda_n(\theta_2) \;\;\;= \Omega(\theta_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_1\lambda_1(\theta_k) \;\;\;+ p_2\lambda_2(\theta_k) \;\;\;+ \ldots + p_n\lambda_n(\theta_k) \;\;\;= \Omega(\theta_k),\\
&p_1\lambda_1(\theta_{k+1}) + p_2\lambda_2(\theta_{k+1}) + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_{k+1}) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_1\lambda_1(\theta_n) \;\;\;+ p_2\lambda_2(\theta_n) \;\;\;+ \ldots + p_n\lambda_n(\theta_n) \;\;\;= 0;
\end{aligned}$$

ce minimum est égal à

$$\int_{\theta_k}^{c}\Omega(z)dz - \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}\Omega(z)dz + \ldots + (-1)^k\int_a^{\theta_1}\Omega(z)dz.$$

Et lorsqu'on a

$$c = \zeta_k,$$

l'expression cherchée

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_1(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

donnant à la somme

$$\int_c^v[\Omega(z) - \Phi(z)]dz + \int_c^b[\Omega(z)]dz$$

la plus petite valeur

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}\Omega(z)\,dz - \int_{\zeta_{k-2}}^{\zeta_{k-1}}\Omega(z)dz + \ldots + (-1)^{k-1}\int_a^{\zeta_1}\Omega(z)dz,$$

se détermine par les équations

$$\Phi(\zeta_1) = \Omega(\zeta_1), \qquad \Phi(\zeta_2) = \Omega(\zeta_2)\;, \;\ldots\;, \;\; \Phi(\zeta_{k-1}) = \Omega(\zeta_{k-1}),$$

$$p_n = 0, \qquad \Phi(\zeta_{k+1}) = 0, \qquad \Phi(\zeta_{k+2}) = 0\;, \;\ldots\;, \;\; \Phi(\zeta_n) = 0.$$

§ 8. Passons enfin à une généralisation de la méthode d'interpolation, donnée par Tchébychef dans son mémoire *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations.*

Pour ce but, nous introduisons dans nos recherches les fonctions

$$\begin{aligned}
\psi_1(z) &= \lambda_1(z), \\
\psi_2(z) &= \lambda_2(z) + g_{1,2}\lambda_1(z), \\
\psi_3(z) &= \lambda_3(z) + g_{2,3}\lambda_2(z) + g_{1,3}\lambda_1(z), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi_n(z) &= \lambda_n(z) + g_{n-1,n}\lambda_{n-1}(z) + \ldots + g_{2,n}\lambda_2(z) + g_{1,n}\lambda_1(z), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

en déterminant les coefficients

$$g_{n-1,n}\,,\ g_{n-2,n}\,,\ \ldots\,,\ g_{2,n}\,,\ g_{1,n}$$

par les équations

$$\int\limits_0 \psi_n(z) = 0, \qquad \int\limits_1 \psi_n(z) = 0\,, \ \ldots\,, \ \int\limits_{n-2} \psi_n(z) = 0.$$

Ces équations se réduisent à celles-ci

$$\begin{gathered}
\int\limits_{n-2}\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int\limits_{n-2}\lambda_{n-1}(z) = 0, \\
\int\limits_{n-3}\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int\limits_{n-3}\lambda_{n-1}(z) + g_{n-2,n}\int\limits_{n-3}\lambda_{n-2}(z) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int\limits_1\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int\limits_1\lambda_{n-1}(z) + \ldots + g_{2,n}\int\limits_1\lambda_2(z) = 0, \\
\int\limits_0\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int\limits_0\lambda_{n-1}(z) + \ldots + g_{2,n}\int\limits_0\lambda_2(z) + g_{1,n}\int\limits_0\lambda_1(z) = 0,
\end{gathered}$$

les nombres

$$\int\limits_{n-2}\lambda_{n-1}(z)\,,\ \int\limits_{n-3}\lambda_{n-2}(z)\,,\ \ldots\,,\ \int\limits_1\lambda_2(z)\,,\ \int\limits_0\lambda_1(z)$$

étant différents de zéro.

La fonction $\psi_n(z)$ satisfait à l'équation

$$\int\limits_m \psi_n(z) = 0$$

pour toutes les valeurs du nombre entier m, excepté $m = n - 1$.

Quant à

$$\int_{n\,1} \psi_n(z).$$

il est facile de se convaincre, que ce symbole représente le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\psi_n(z)dz$$

aux conditions

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1,$$

$$\int_a^b f(z)\psi_1(z)dz = \int_a^b f(z)\psi_2(z)dz = \ldots = \int_a^b f(z)\psi_{n-1}(z)dz = 0$$

et aussi dans le cas, où l'on a ajouté à ces conditions les suivantes

$$0 = \int_a^b f(z)\psi_{n+1}(z)dz = \int_a^b f(z)\psi_{n+2}(z)dz = \ldots.$$

Supposons maintenant, que pour une fonction de la forme

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

dont les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ restent inconnus, nous pouvons évaluer assez exactement l'intégrale

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(z)dz,$$

quels que soient les nombres ξ et η compris entre a et b.

Alors, en représentant cette fonction sous la forme

$$\Phi(z) = q_1\psi_1(z) + q_2\psi_2(z) + \ldots + q_n\psi_n(z),$$

nous pouvons déterminer les coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ par les formules suivantes

$$q_1 \int_0 \psi_1(z) = \int_0 \Phi(z).$$

$$q_2 \int_1 \psi_2(z) = \int_1 \Phi(z),$$

$$q_n \int_{n\,1} \psi_n(z) = \int \Phi(z).$$

En généralisant de cette manière la méthode d'interpolation, donné par TCHÉBYCHEF dans le mémoire *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données*, nous parvenons à la formule

$$\Phi(z) = \frac{\psi_1(z)\int\limits_0 \Phi(z)}{\int\limits_0 \psi_1(z)} + \frac{\psi_2(z)\int\limits_1 \Phi(z)}{\int\limits_1 \psi_2(z)} + \ldots + \frac{\psi_n(z)\int\limits_{n-1} \Phi_n(z)}{\int \Phi_n(z)}$$

dont chaque membre se détermine indépendamment des autres.

Dans le cas traité par TCHÉBYCHEF on a

$$\lambda_1(z) = 1, \qquad \lambda_2(z) = z, \qquad \lambda_3(z) = z^2, \ \ldots, \ \lambda_n(z) = z^{n-1},$$

Par exemple, posons

$$a = 0, \qquad b = \pi,$$

$$\lambda_1(z) = 1, \qquad \lambda_2(z) = -\cos z, \qquad \lambda_3(z) = \cos 2z, \qquad \lambda_4(z) = -\cos 3z \quad \text{etc.}$$

Il est facile de se convaincre, que ces fonctions $\lambda(z)$ satisfont aux nos conditions.

Il est clair aussi, que le maximum de l'intégrale

$$\int\limits_0^\pi f(z)\cos z\,dz$$

à la condition

$$-1 < f(z) < +1$$

correspond au cas, où l'on a

$$\begin{array}{lll}
+1 & \text{pour} & 0 < z < \dfrac{\pi}{2n}, \\[2ex]
-1 & \text{»} & \dfrac{\pi}{2n} < z < \dfrac{3\pi}{2n}, \\[2ex]
+1 & \text{»} & \dfrac{3\pi}{2n} < z < \dfrac{5\pi}{2n}, \\[2ex]
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$$(-1)^{n-1} \ \text{pour} \ \frac{(2n-3)\pi}{2n} < z < \frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

$$(-1)^n \ \text{pour} \ \frac{(2n-1)\pi}{2n} < z < \pi.$$

Dans le même cas on a

$$\int_0^{\pi} f(z)\,dz = 0, \qquad \int_0^{\pi} f(z)\cos z\,dz = 0\ ,\ \ldots,\ \int_0^{\pi} f(z)\cos(n-1)z\,dz = 0,$$

en vertu de la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz$$

$$= \frac{2}{m}\left\{\sin\frac{m\pi}{2n} - \sin\frac{3m\pi}{2n} + \sin\frac{5m\pi}{2n} - \ldots \pm \sin\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\right\}.$$

En effet, il est évident de cette formule, que la somme algébrique

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz$$

se réduit à zéro pour toutes les valeurs positives de m, excepté

$$m = n,\ 3n,\ 5n,\ \ldots;$$

or, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz = \frac{2n}{m}(-1)^{\frac{m-n}{2n}},$$

si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier impair.

Par conséquent, la somme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos nz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos nz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos nz\,dz,$$

égale à 2, représente aussi le maximum de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} f(z)\cos nz\,dz$$

dans le cas où outre les inégalités

$$-1 \leq f(z) \leq +1,$$

on a les égalités

$$\int_0^{\pi} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(z)\cos z\,dz = \ldots = \int_0^{\pi} f(z)\cos(n-1)z\,dz = 0.$$

Donc, nous pouvons poser

$$\int_n \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \omega(z)dz + \ldots \pm \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \omega(z)dz,$$

en multipliant notre symbole par ± 1.

Cela étant, on aura

$$\int_n \cos mz = 0$$

pour toutes les valeurs considérées de m, excepté

$$m = n,\ 3n,\ 5n,\ \ldots;$$

or, on aura

$$\int_n \cos mz = \frac{2n}{m}(-1)^{\frac{m-n}{2n}},$$

si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier impair.

Enfin

$$\int_0^{\pi} dz = \pi \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \cos mz\,dz = 0$$

quel que soit le nombre entier m.

Passons aux fonctions

$$\psi_1(z) = 1,$$

$$\psi_2(z) = \cos z + g_{1,2},$$

$$\psi_3(z) = \cos 2z + g_{2,3}\cos z + g_{1,3},$$

. . . .

$$\psi_{n+1}(z) = \cos nz + g_{n,n+1}\cos(n-1)z + \ldots + g_{2,n+1}\cos z + g_{1,n+1},$$

. . . .

dont les coefficients

$$g_{1,2}\,,\; g_{2,3}\,,\; g_{1,3}\,,\; g_{3,4}\,,\; g_{2,4}\,,\; g_{1,4}\,,\;\ldots$$

doivent être déterminés conformément aux conditions

$$\int_0 \psi_{n+1}(z) = \int_1 \psi_{n+1}(z) = \int_2 \psi_{n+1}(z) = \ldots = \int_{n-1} \psi_{n+1}(z) = 0.$$

En considérant les cas particuliers les plus simples, on trouvera

$$\psi_1(z) = 1, \quad \psi_2(z) = \cos z, \quad \psi_3(z) = \cos 2z, \quad \psi_4(z) = \cos 3z + \frac{1}{3}\cos z$$

$$\psi_5(z) = \cos 4z, \quad \psi_6(z) = \cos 5z - \frac{1}{5}\cos z, \quad \psi_7(z) = \cos 6z + \frac{1}{3}\cos 2z$$

$$\psi_8(z) = \cos 7z + \frac{1}{7}\cos z, \quad \psi_9(z) = \cos 8z, \quad \psi_{10}(z) = \cos 9z + \frac{1}{3}\cos 3z$$

$$\psi_{11}(z) = \cos 10z - \frac{1}{5}\cos 2z, \quad \psi_{12}(z) = \cos 11z + \frac{1}{11}\cos z \text{ etc.}$$

Quant au cas général, on peut établir la formule

$$\psi_{n+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{n'} \cos\frac{nz}{n'},$$

en désignant par n' tous les diviseurs impairs du nombre n, sans facteurs carrés, et par h le nombre des facteurs premiers de n' de la forme $4k+1$.

Pour le démontrer il faut et il suffit établir que la somme

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int_m \cos\frac{nz}{n'}$$

se réduit à zéro, si l'on a

$$m = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1.$$

Dans le cas de $m=0$ et dans le cas, où le rapport $\frac{n}{m}$ ne se réduit à aucun nombre entier impair, toutes les expressions

$$\int_m \cos\frac{nz}{n'}$$

sont égales à zéro et par conséquent l'égalité

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_{\substack{\cdot \\ m}}^{\cdot} \cos \frac{nz}{n'} = 0$$

est évidente.

Or, si le rapport $\frac{n}{m}$ est égal à un nombre entier impair, il est facile de réduire notre somme

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_{\substack{\cdot \\ m}}^{\cdot} \cos \frac{nz}{n'}$$

à celle-ci

$$\frac{2m}{n} \sum (-1)^h (-1)^{\frac{n-mn'}{2mn'}}.$$

en désignant par n' tous les diviseurs de $\frac{n}{m}$ sans facteurs carrés.

D'autre part on aura

$$(-1)^{\frac{n-mn'}{2mn'}} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} (-1)^{\frac{n'-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} (-1)^{h_1},$$

en désignant par h_1 le nombre des diviseurs premiers de n' de la forme $4k+3$.

Il en résulte, que $h + h_1$ est égal au nombre de tous les diviseurs premiers de n', et par conséquent on a

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_{\substack{\cdot \\ m}}^{\cdot} \cos \frac{nz}{n'} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} \frac{2m}{n} (N_1 - N_2),$$

en désignant par N_1 le nombre des diviseurs de $\frac{n}{m}$, composés d'un nombre pair de facteurs premiers, et par N_2 le nombre des diviseurs de $\frac{n}{m}$, composés d'un nombre impair de facteurs premiers.

Il est important de retenir, que nous ne comptons pas l'unité au nombre des facteurs premiers et que conformément à cela le nombre des facteurs premiers de l'unité est égal à zéro.

En posant $m = n$, on trouve

$$N_1 = 1, \qquad N_2 = 0$$

et par conséquent

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int_{n} \cos \frac{nz}{n'} = 2\,;$$

dans tous les autres cas on aura

$$N_1 - N_2 = 0.$$

De cette manière, nous nous avons persuadé que la somme

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int_{m} \cos \frac{nz}{n'}$$

se réduit à zéro dans tous les cas, excepté le cas de $m = n$, lorsque cette somme est égale à 2.

Donc, on peut poser

$$\psi_{n+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{n'} \cos \frac{nz}{n'}$$

et ensuite

$$2\,\Phi(z) = \frac{2}{\pi}\psi_1(z) \int_0 \Phi(z) + \psi_2(z) \int_1 \Phi(z) + \ldots + \psi_n(z) \int_{n-1} \Phi(z)$$

quelle que soit la fonction

$$\Phi(z) = p_1 + p_2 \cos z + p_3 \cos 2z + \ldots + p_n \cos (n-1)z.$$

Par exemple dans le cas de $n = 4$ on aura

$$\Phi(z) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(z)\,dz + \frac{1}{2}\cos z \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Phi(z)\,dz \right|$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2z \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Phi(z)\,dz + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \Phi(z)\,dz \right|$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\cos 3z + \frac{1}{3}\cos z\right) \left| \int_0^{\frac{\pi}{6}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \Phi(z)\,dz \right|.$$

En faisant maintenant

$$a = 0, \qquad b = \pi$$

nous pouvons prendre aussi

$$\lambda_1(z) = \sin z, \quad \lambda_2(z) = -\sin 2z, \quad \lambda_3(z) = \sin 3z, \quad \lambda_4(z) = -\sin 4z\,,$$

Dans ce cas, lequel au moyen de la substitution

$$h \cos z = x,$$

se réduit au cas traité par Tchébychef, il n'est pas difficile d'établir les formules

$$\int_{n} \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n+1}} \omega(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{n+1}}^{\pi} \omega(z)dz,$$

$$\int_{m-1} \sin nz = \frac{2m}{n}, \text{ lorsque } \frac{n}{m} \text{ est un nombre entier impair,}$$

$$\int_{m-1} \sin nz = 0 \text{ dans tous les autres cas}$$

et enfin

$$\varphi_n(z) = \sum \frac{(-1)^k}{n} \sin \frac{nz}{n'},$$

en désignant par n' tous les diviseurs impairs de n sans facteurs carrés et par k le nombre des facteurs premiers de n'.

§ 9. Dans tous nos recherches, le système des fonctions

$$\lambda_1(z)\,, \lambda_2(z)\,, \lambda_3(z)\,, \ldots$$

a été assujetti à certaines inégalités.

Cependant on peut étendre plusieurs de nos résultats à certains cas, où les inégalités mentionnées ci-dessus n'ont pas lieu.

En posant par exemple

$$a = 0, \qquad b = 2\pi,$$

$$\lambda_1(z) = 1, \quad \lambda_2(z) = \sin z, \quad \lambda_3(z) = \cos z, \quad \lambda_4(z) = \sin 2z, \quad \lambda_5(z) = \cos 2z, \ldots$$

et en général

$$\lambda_{2k}(z) = \sin kz, \qquad \lambda_{2k+1}(z) = \cos kz,$$

il est facile de voir, que le maximum de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin kz dz$$

à la condition

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1$$

correspond à la fonction $f(z)$ maintenant les valeurs constantes:

$$\begin{array}{lll}
+1 & \text{pour} & 0 < z < \frac{\pi}{k}, \\
-1 & \text{»} & \frac{\pi}{k} < z < \frac{2\pi}{k}, \\
+1 & \text{»} & \frac{2\pi}{k} < z < \frac{3\pi}{k}, \\
\cdots & & \cdots\cdots \\
+1 & \text{»} & \frac{(2k-2)\pi}{k} < z < \frac{(2k-1)\pi}{k}, \\
-1 & \text{»} & \frac{(2k-1)\pi}{k} < z < 2\pi.
\end{array}$$

En déterminant de cette manière la fonction $f(z)$, on aura en même temps

$$\int_0^{2\pi} f(z) \cos mz dz = 0,$$

quel que soit le nombre entier m, et

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin mz dz = \frac{4k}{m},$$

si $\frac{m}{k}$ est un nombre entier impair, et enfin

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin mz dz = 0$$

dans tous les autres cas, lorsque m est un nombre entier et $\frac{m}{k}$ n'est aucun nombre entier impair.

Par conséquent, la somme

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin kz dz - \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \sin kz dz + \int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{3\pi}{k}} \sin kz dz - \dots - \int_{\frac{(2k-1)\pi}{k}}^{2\pi} \sin kz dz,$$

égale à 4, sera aussi le maximum de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin kz dz$$

dans le cas, où la fonction $f(z)$ est assujettie non seulement aux inégalités

$$-1 \leq f(z) \leq 1,$$

mais aussi aux égalités

$$\int_0^{2\pi} f(z)\lambda_1(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_2(z)dz = \dots = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_{2k-1}(z)dz = 0.$$

Pareillement, il est facile de se convaincre, que la somme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2k}} \cos kz dz - \int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{3\pi}{2k}} \cos kz dz + \dots + \int_{\frac{(4k-1)\pi}{2k}}^{2\pi} \cos kz dz,$$

égale à 4, est le maximum de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(z) \cos kz dz$$

aux conditions

$$-1 \leq f(z) \leq +1,$$

$$\int_0^{2\pi} f(z)\lambda_1(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_2(z)dz = \dots = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_{2k}(z)dz = 0.$$

En posant conformément à cela

$$\int_0 \omega(z) = \int_0^{2\pi} \omega(z)\,dz,$$

$$\int_{2k-1} \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \omega(z)dz + \ldots - \int_{\frac{(2k-1)\pi}{k}}^{2\pi} \omega(z)dz,$$

$$\int_{2k} \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{3\pi}{2k}} \omega(z)dz + \ldots + \int_{\frac{(4k-1)\pi}{2k}}^{2\pi} \omega(z)dz,$$

on aura

$$\int_{2k} \sin mz = 0, \qquad \int_{2k-1} \cos mz = 0,$$

quels que soient les nombres entiers positifs m,

$$\int_{2k-1} \sin mz = \frac{4k}{m} \quad \text{et} \quad \int_{2k} \cos mz = (-1)^{\frac{m-k}{2k}} \frac{4k}{m},$$

si $\frac{m}{k}$ est un entier impair, et enfin

$$\int_{2k-1} \sin mz = \int_{2k} \cos mz = 0$$

dans les autres cas, lorsque m est un nombre entier et $\frac{m}{k}$ n'est aucun nombre entier impair.

Cela étant etabli, nous posons

$$\psi_1(z) = \frac{4}{2\pi},$$

$$\psi_{2k}(z) = \sum \frac{(-1)^g}{k'} \sin \frac{kz}{k'},$$

$$\psi_{2k+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{k'} \cos \frac{kz}{k'},$$

en désignant par k' les diviseurs impairs de k sans facteurs carrés, par g le nombre des facteurs premiers de k', et enfin par h le nombre des facteurs premiers de k' de la forme $4i + 1$.

Alors on aura

$$\int_{n=1} \psi_n(z) = 4$$

et tous les autres symboles

$$\int_0 \psi_n(z)\,,\ \int_1 \psi_n(z)\,,\ \int_2 \psi_n(z)\,,\ \ldots$$

seront égals à zéro.

Il en résulte que pour chaque fonction $\Phi(z)$ de la forme

$$\Phi(z) = p_1 + p_2 \sin z + p_3 \cos z + p_4 \sin 2z + \ldots,$$

nous pouvons établir la formule

$$4\Phi(z) = \psi_1(z)\int_0 \Phi(z) + \psi_2(z)\int_1 \Phi(z) + \psi_3(z)\int_2 \Phi(z) + \ldots$$

dont tous les membres se déterminent indépendamment l'un de l'autre.

Voilà les premiers membres de cette formule

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(z)dz + \frac{1}{4}\sin z \left| \int_0^{\pi} \Phi(z)dz - \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(z)dz \right|$$

$$+ \frac{1}{4}\cos z \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \Phi(z)dz + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \Phi(z)dz \right|$$

$$+ \frac{1}{4}\sin 2z \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Phi(z)dz + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \Phi(z)dz \right|$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2z \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Phi(z)dz + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \Phi(z)dz + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \Phi(z)dz \right|$$

etc.

DIE BEDEUTUNG DER ABEL'SCHEN ABHANDLUNG ÜBER DIE BINOMISCHE REIHE[1] FÜR DIE FUNCTIONENTHEORIE

VON

O. STOLZ
in INNSBRUCK.

Cauchy hat in *Cours d'Analyse* (1821) Ch. VIII, § 5, die folgende Aufgabe gelöst.

(I). »Es seien alle für jeden Wert der *reellen* Veränderlichen ξ eindeutigen und stetigen complexen Functionen $f(\xi)$ zu ermitteln, wofür erstens bei beliebigen reellen Werten ξ, η das Additionstheorem

$$f(\xi)\,.\,f(\eta) = f(\xi + \eta) \tag{1}$$

besteht, und zweitens $f(1)$ gleich einer gegebenen, von Null verschiedenen complexen Zahl

$$a = A(\sin\alpha + i\sin\alpha) \qquad (A > 0, \ -\pi < \alpha \leq \pi) \tag{2}$$

ist.» Die verlangten Functionen sind in der Formel

$$f(\xi) = A^{\xi}\big(\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\big)$$

enthalten, worin k jede beliebige, jedoch feste ganze Zahl sein darf.

Ersetzen wir in dieser Aufgabe die reelle Veränderliche ξ durch die aller complexen Werte fähige Veränderliche x und entsprechend in der Beziehung (1) ξ, η bezw. durch die beliebigen complexen Zahlen x, y, so erhalten wir eine ähnliche Aufgabe (II), auf die Cauchy a. a. O. nicht eingegangen ist. Ihre Lösung gibt Abel in der im Titel genannten Abhandlung vom Jahre 1826.[2]

[1] Oeuvres de N. H. Abel, nouv. édit. par Sylow et Lie. I. S. 219 f.

[2] Vgl. Oeuvres I., S. 229 f. Die Formel (3) findet sich S. 234 unter (13).

Sie lautet, wenn wir $x = \xi + i\eta$ setzen

$$(3)\qquad f(x) = A^{\xi}\{\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\}$$
$$\times B^{\eta}\{\cos\eta(\beta + 2l\pi) + i\sin\eta(\beta + 2l\pi)\}$$

unter k, l beliebige, jedoch feste ganze Zahlen, unter B eine willkürliche positive und unter β eine willkürliche reelle Constante verstanden. Da somit auf der rechten Seite der Formel (3) zwei willkürliche Constante B, β vorkommen, so hat die Aufgabe (II) an sich wenig Bedeutung.

Um die Constanten B und $\beta' = \beta + 2l\pi$ zu bestimmen, legt man der Function $f(x)$ die weitere Bedingung auf, dass sie eine analytische sein soll.

Demnach gelangen wir zur Aufgabe:

(III). »Es seien alle *analytischen* (ein- oder mehrdeutigen) Functionen $f(x)$ der complexen Veränderlichen x zu ermitteln, wofür erstens bei beliebigen complexen Werten x, y, wenn nur $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$ erklärt sind, die Gleichung

$$(4)\qquad f(x)\,.\,f(y) = f(x+y)$$

besteht und zweitens $f(1)$ die gegebene, von Null verschiedene Zahl a ist.« Lassen wir die Potenzreihe

$$c_0 + c_1(x-c) + c_2(x-c)^2 + \dots$$

absolut convergent für alle Werte von x, wofür $|x-c|$ kleiner als eine gewisse Constante R ist, das Element sein für eine der gesuchten Functionen $f(x)$, so finden wir aus der Gleichung (4) durch die Annahme $x = c$, $y = x - c$

$$f(x-c) = f(x):f(c) = 1 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \dots \qquad (|x-c| < R).$$

Schreiben wir hier x an Stelle von $x-c$, so folgt, dass wenn nur $|x| < R$ ist

$$(5)\qquad f(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

sein muss. Legt man die auf der rechten Seite von (5) befindliche Potenzreihe von x als Element der in Rede stehenden Function $f(x)$ zu Grunde, so ergibt sich in bekannter Weise (s. u.), dass $f(x)$ eine der eindeutigen Functionen

$$(6)\qquad e^{xLa} \qquad (La = lA + (\alpha + 2k\pi)i)$$

ist, wobei k jede beliebige, jedoch feste ganze Zahl sein darf. Aus der Formel (3) wird die Function (6) durch die Annahme

$$B = e^{-\alpha - 2k\pi}, \qquad \beta' = LA \tag{7}$$

erhalten.

Abel bestimmt a. a. O. die vier Constanten in (3): A, $\alpha + 2k\pi$, B, β' durch die Forderung, dass $f(x)$ die Summe der binomischen Reihe

$$1 + \frac{x}{1} u + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} u^2 + \dots,\text{[1]} \tag{8}$$

$|x|$ kleiner als 1 vorausgesetzt, sein soll. In dieser Weise ist es ihm zum ersten Male gelungen, die binomische Reihe (8) bei complexen x zu summiren. Und zwar fand er als Summe derselben den gewöhnlich als Hauptwert bezeichneten Wert der Potenz $1 + u$ hoch x, der jetzt unter dem Zeichen $(1 + u)^x$ verstanden wird.

Die soeben erwähnte Bedingung Abel's schliesst in sich die, wie wir gesehen haben, auch bei der Lösung der Aufgabe (III) auftretende Forderung, dass $f(x)$ die Summe einer convergenten ganzen Potenzreihe von x sein soll; denn die binomische Reihe (8) lässt sich für jeden Wert von x in eine solche Potenzreihe verwandeln.[2] Abel schränkt aber diese Forderung in der Art ein, dass für $f(x)$ bloss die Summe *einer* bestimmten solchen Reihe verlangt wird. Er hat somit in der in Rede stehenden Arbeit zugleich die Aufgabe (III) bei der Annahme $a = 1 + u$ gelöst, allerdings unter der gerade angegebenen Beschränkung der Function $f(x)$.

Die directe Behandlung und allgemeine Lösung der Aufgabe (III) findet man im 2. Bande von M. Ohm's *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* (1822).[3] Die in den Formeln (7) vorliegende Bestimmung der Constanten B, β' lässt sich ferner mit Hilfe des von Riemann zu Grunde gelegten Begriffes der Function einer complexen Veränderlichen x erweisen.[4]

---

[1] Bei Abel stehen a. a. O. an Stelle von x, u bezw. m, x.

[2] Cauchy, *C. d'Analyse*, S. 545 = Oeuvres 2. sér. III. T. S. 447.

[3] Vgl. 2. B., 2. Aufl. (1829), S. 313 f.

[4] Vgl. des Verfassers *Grundzüge d. Differential- u. Integralrechnung*, II. B., S. 90.

SUR L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUI ADMETTENT DES GROUPES CONTINUS DE TRANSFORMATIONS

PAR

E. VESSIOT

À LYON.

Introduction.

1. On doit à ABEL l'étude des équations algébriques telles que, si x est racine d'une telle équation, $\theta(x)$ en est aussi racine, θ étant une fonction rationnelle connue. Par cette étude, ABEL a ouvert une voie nouvelle, non seulement à la théorie des équations algébriques, mais à toute l'analyse mathématique. La propriété que nous venons de rappeler peut en effet s'énoncer ainsi: les équations algébriques considérées sont celles qui admettent des transformations rationnelles connues: $x' = \theta(x)$. De sorte que lorsque SOPHUS LIE fondait, un demi-siècle plus tard, la théorie des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, il était, dans un champ plus vaste, le continuateur de la pensée de son illustre compatriote.

Le présent travail est une contribution à cette théorie de SOPHUS LIE. Il a en vue la question suivante: »Définir et étudier les divers problèmes d'intégration auxquels peut conduire l'application de la théorie de LIE?»

Cette question peut être considérée comme résolue [1] dans le cas où le système différentiel (A) considéré est un système d'équations différentielles ordinaires, ou un de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles dont

[1] Voir S. LIE. Math. Annalen. Tome XXV.

E. VESSIOT. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Tomes VIII, H; X, C. Comptes Rendus, 13 décembre 1897.

l'intégrale générale ne dépend que de constantes et non de fonctions arbitraires: les systèmes auxiliaires dont l'intégration entraîne celle du système donné sont alors, ou bien des équations différentielles ordinaires linéaires; ou des systèmes d'équations différentielles ordinaires qui sont absolument générales, tant que le système (A) n'a pas de propriété autre que d'admettre le groupe (G) considéré, qui est un groupe fini.

Pour le cas général d'un système différentiel (A) dépendant d'un nombre quelconque de variables dépendantes ou indépendantes, d'ordre et de degré d'indétermination quelconque, et dont on sait seulement qu'il admet un groupe continu (G), fini ou infini, mais connu,[1] la question posée est bien moins élucidée.

Dans un mémoire fondamental,[2] Lie a indiqué, sur des exemples particuliers, la marche à suivre pour décomposer l'intégration du système (A) en deux parties distinctes: 1°) intégration d'un système résolvant (R) qui n'admet plus de groupe de transformations; 2°) intégration d'un système différentiel (S) dont toutes les solutions se déduisent les unes des autres par les transformations du groupe donné (G). Cela revient à décomposer l'ensemble des solutions de (A) en familles de solutions telles que les solutions de chaque famille se déduisent les unes des autres par les transformations de (G); il est bien remarquable que c'est la même réduction qu'opérait déjà Abel sur les équations algébriques dont nous parlions plus haut.

Dans les exemples traités par Lie, où il n'y a que deux variables indépendantes, les systèmes (S) s'intègrent, par la méthode de Darboux, au moyen d'équations différentielles ordinaires. Mais il ne parait pas facile de généraliser cette méthode de manière à pouvoir l'appliquer au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

2. Nous avons repris la même décomposition du problème par une méthode nouvelle dont l'avantage est de conduire, pour les systèmes définitifs (S), à des *systèmes automorphes*. Nous proposons d'appeler ainsi

[1] Si le système (A) est donné, les équations de définition du plus grand groupe que ce système admette sont par là-même connues.

[2] *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.* (Leipziger Berichte, 1895.)

tout système différentiel dont les solutions se déduisent les unes des autres par les transformations d'un groupe ponctuel (G), *effectuées sur les variables dépendantes:* (G) sera dit le groupe associé au système, ou simplement le groupe du système.

Nous pouvons alors appliquer à ces systèmes automorphes les méthodes de réduction indiquées par Lie,[1] et qui permettent d'en remplacer l'intégration par celle d'une suite de systèmes automorphes, dont les groupes soient *simples* et *primitifs*. Pour les seuls types de groupes connus, satisfaisant à cette double condition, les systèmes automorphes correspondants s'intègrent au moyen d'équations différentielles ordinaires, qui sont linéaires si le groupe est fini.

Quant au système résolvant (R), comme il donne seulement la décomposition des solutions de (A) en familles de solutions homologues relativement au groupe (G), il est évident que la difficulté de son intégration ne peut être en aucune façon limitée par la nature de ce groupe (G), et on peut dire qu'elle est arbitraire.

On voit donc que, si l'on ne trouve pas de groupes continus infinis simples d'une nature nouvelle, l'application de la théorie de Lie ne pourra conduire qu'à des systèmes différentiels dont la difficulté d'intégration est tout-à-fait indéterminée, et à des systèmes différentiels s'intégrant par des équations différentielles ordinaires. Telle est donc la réponse que l'on peut faire à la question que nous nous étions posée? On voit que celle-ci ne pourra être entièrement résolue que lorsqu'on connaîtra tous les types de groupes simples.

Il resterait aussi à perfectionner l'étude des systèmes résolvants (R). Ces systèmes sont, au fond, les mêmes dans la méthode de Lie et dans la nôtre, et ils ne se présentent pas d'eux-mêmes sous une forme entièrement arbitraire, car ils comprennent des équations dont la forme dépend encore, en une certaine manière, du groupe (G).

Dans les exemples qu'il a traités, Lie a indiqué une relation simple entre le degré d'indétermination du système (A), celui du système résolvant (R), et celui du système des équations de définition du groupe (G). Il y aurait lieu de chercher à généraliser ces résultats, et même à en compléter la démonstration dans les cas traités par Lie.

[1] *Verwerthung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen* (Leipziger Berichte, 1895).

3. Notre travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier, nous étudions la détermination des systèmes automorphes, qui correspondent à un groupe, donné par les équations de définition de ses transformations finies. Leur forme résulte, à vrai dire, de la théorie générale des invariants différentiels; mais il était utile de préciser les divers cas qui pourraient se présenter; et, de plus, notre travail contient ainsi une méthode complète, et nouvelle,[1] pour la détermination des invariants différentiels et des systèmes différentiels invariants qui correspondent à un groupe donné, tout en ne supposant connus que les principes fondamentaux relatifs aux équations de définition des groupes continus.

Nous rappelons ensuite, en les précisant et les complétant sur divers points, les méthodes de Lie, servant à réduire l'intégration de ces systèmes; et nous étudions les systèmes types auxquels on est ainsi ramené.

Dans le second chapitre, nous étudions la formation des systèmes différentiels les plus généraux, qui admettent un groupe, donné par les équations de définition de ses transformations finies. Le procédé indiqué nous fournit immédiatement, sous une forme précise et élégante, la réduction d'un système donné (A), admettant le groupe considéré (G), à un système résolvant (R) et à un système automorphe.

Nous avons traité d'abord deux exemples. L'un est emprunté au mémoire de Lie; l'avantage de notre méthode y est mis en évidence, car nous pouvons préciser la nature des intégrations indispensables plus que ne le fait Lie.

Dans la théorie générale, nous avons eu surtout en vue le cas qu'on peut considérer comme le cas général dans la formation des systèmes différentiels admettant un groupe donné. Mais l'application de notre méthode aux cas exceptionnels ne nécessiterait que des modifications de détail, comme on s'en rend compte dans les deux exemples particuliers que nous avons complètement traités.

[1] Cette méthode présente, néanmoins, des analogies inévitables avec celles que l'on doit à Lie et à M. Tresse.

CHAPITRE PREMIER.

Sur la forme et l'intégration des systèmes différentiels automorphes.

§ I. *Forme générale des systèmes automorphes.*

1. Nous appelons *système différentiel automorphe* tout système différentiel (S), dépendant d'un nombre quelconque n de fonctions inconnues: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et d'un nombre quelconque m de variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_m$, qui jouit de la propriété suivante: Ses diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles

$$(\sigma) \qquad x_i' = \alpha_i(t_1, t_2, \ldots, t_n), \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

par les diverses transformations d'un groupe ponctuel (G), à n variables, effectuées sur $x_1, \ldots, x_n$. De sorte que, si l'une quelconque des transformations de (G) est

$$(T) \qquad x_i' = Tx_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

l'une quelconque des solutions de (S) est définie par les équations

$$(T\sigma) \qquad Tx_i = \alpha_i(t_1, t_2, \ldots, t_m). \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Nous étudierons d'abord comment on peut former tous ces systèmes automorphes, correspondant à un groupe (G) donné par les équations de définition de ses transformations finies.

Le cas le plus simple est celui où $m = n$, et où les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ constituent un système de fonctions indépendantes: il est clair que, si cela a lieu pour une solution, cela a lieu pour toutes. Considérons alors la solution (σ), et imaginons qu'on fasse dans (S) le changement de variables indépendantes

$$t_i' = \alpha_i(t_1, \ldots, t_n). \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Le nouveau système admettra la solution

$$x_i = t_i', \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et les autres solutions, s'en déduisant toujours par les transformations de (G), seront définies par les divers systèmes d'équations

$$Tx_i = f_i(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) = t'_i\,, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

qui définissent les diverses transformations de (G).

Le système (S) sera donc devenu le système des équations de définition du groupe (G), c.-à-d. sera de la forme [1]

$$U_s(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n\,\ldots\,,\,x_k'^{(k_1\ldots k_n)}\,,\,\ldots) = \omega_s(t'_1\,,\,\ldots\,,\,t'_n), \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

$$\left(x_k'^{(k_1\ldots k_n)} = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} x_k}{\partial t_1'^{k_1}\ldots\partial t_n'^{k_n}}\right);$$

où les fonctions U_s forment un système complet d'invariants fondamentaux du groupe (G), qui est connu par hypothèse.

Revenons maintenant aux variables primitives. On sait [2] qu'un changement de variables indépendantes, effectué dans les U_s, les change en des fonctions qui ne dépendent que des U_s et des variables indépendantes nouvelles; et, d'une manière plus précise, qui sont de la forme:

$$L_s\big(\ldots,\,U_h(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n\,,\,\ldots\,,\,x_k^{(k_1\ldots k_n)}\,,\,\ldots)\,,\,\ldots\,\ldots\,,\,\alpha_j^{(\delta_1\ldots\delta_n)}\,,\,\ldots\big), \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

où les $x_k^{(k\ldots k_n)}$ et les $\alpha_j^{(\delta_1\ldots\delta_n)}$ désignent des dérivées quelconques, des x_k et des α_j, prises par rapport à $t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n$.

Le système (S) s'obtient donc en égalant ces fonctions L_s aux fonctions de $t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n$:

$$\omega_s(\alpha_1\,,\,\ldots\,,\,\alpha_n); \qquad (s=1,2\ldots,p)$$

et pourra s'écrire enfin, en résolvant les équations ainsi obtenues par rapport aux U_s: [3]

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &U_s(x_1\,\ldots\,,\,x_n\,,\,\ldots\,,\,x_k^{(k_1\ldots k_n)}\,,\,\ldots) = \theta_s(t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n), \qquad (s=1,2,\ldots,p)\\ &\left(x_k^{(k_1\ldots k_n)} = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} x_k}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_n^{k_n}}\right).\end{aligned}\right.$$

[1] due à Lie. Voir, par exemple, notre mémoire *Sur la théorie générale des groupes*: N° 6. (Annales de l'École normale, 1903.)

[2] Voir le mémoire cité: N° 7.

[3] Pour la possibilité de cette résolution, voir encore le mémoire cité: N° 7.

Le raisonnement précédent, repris en sens inverse, montrerait facilement que tout système de cette forme, qui n'est pas impossible, satisfait à la question. La forme générale des fonctions θ_s s'obtient sans peine en écrivant que le système a une solution arbitraire donnée.

Les systèmes canoniques ainsi obtenus s'offrent d'eux-mêmes, dans la théorie de la similitude des groupes.[1] Nous les appellerons, pour abréger, des *systèmes automorphes de première espèce*.

2. Supposons encore $m = n$, mais supposons que les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne soient plus indépendantes; il y en aura, par exemple $m' < n$ d'entre elles qui seront indépendantes, tandis que les $n - m'$ autres seront fonctions de celles-là. Imaginons que nous prenions comme variables nouvelles $z_1, \ldots, z_{m'}$, ces m' fonctions α_i indépendantes, en même temps que $n - m'$ autres fonctions quelconques de $t_1, \ldots, t_n$ pour les autres variables indépendantes $z_{m'+1}, \ldots, z_n$. Parmi les équations du système (S), transformées par ce changement de variables, figureraient évidemment les équations

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_{m'+j}} = 0. \qquad (j=1,2,\ldots,n-m';\ i=1,2,\ldots,n)$$

Et, en revenant aux variables primitives, on voit que le système (S) comprend, parmi ses équations, celles d'un système complet, dont $z_1, \ldots, z_{m'}$ constituent une solution; et dont $x_1, \ldots, x_n$ sont des intégrales.

Des équations de ce système complet, on peut tirer les dérivées des x_i par rapport à $n - m'$ des variables; par exemple, par rapport à $t_{m'+1}, \ldots, t_n$. Et, par suite, on peut faire disparaître des autres équations de (S) toute différentiation par rapport à l'une quelconque de ces variables.

Donc le système (S) se compose alors: 1°) du système complet en question, dont $x_1, \ldots, x_n$ sont des intégrales; 2°) d'un système automorphe (S_1), relatif au groupe (G), mais où $t_1, \ldots, t_{m'}$ interviennent seules comme variables indépendantes; $t_{m'+1}, \ldots, t_n$ n'y jouent plus que le rôle de paramètres.

Inversement, dans cette hypothèse, le système complet peut être choisi arbitrairement mais le système (S_1) doit admettre les transformations infinitésimales ayant pour symboles les premiers membres des équations du système complet. On le verrait en raisonnant comme nous l'avons fait,

[1] Voir le mémoire cité § IX.

pour un cas analogue, dans un autre travail;[1] nous y avons indiqué aussi comment ce fait donne les conditions auxiliaires auxquelles doivent satisfaire les arbitraires qui figurent, en général, dans les équations de (S_1), pour que (S_1) et le système complet constituent, dans leur ensemble, un système différentiel compatible. On pourra, du reste, toujours déterminer ces arbitraires, en même temps que le système complet, en se donnant l'une quelconque des solutions (σ) du système (S) que l'on veut former.

3. Une réduction analogue se présente toujours si $m > n$; de sorte que ce cas se ramène toujours, par la séparation d'un certain système complet, au cas où m est au plus égal à n, et où, parmi les fonctions α_i, il y en a m d'indépendantes. Au point de vue de l'intégration de (S), on peut aussi intégrer d'abord le système complet qui se sépare de (S), et prendre pour nouvelles variables indépendantes un système fondamental d'intégrales distinctes de ce système complet; et l'on sera ramené au cas où il y a autant de fonctions α_i indépendantes que de variables t_k.

On voit donc, qu'en dehors du cas des systèmes automorphes de première espèce, il ne reste comme cas intéressant que celui où m est inférieur à n; et, en raisonnant de même, on voit qu'on peut même supposer qu'il y a, parmi les α_i, exactement m fonctions de $t_1, \ldots, t_m$ indépendantes. Nous allons examiner ce dernier cas.

4. Supposons d'abord le groupe (G) transitif; les points $(x_1, \ldots, x_n)$ qui font exception à la *transitivité*, — (c.-à-d. qui ne peuvent pas venir coïncider avec un point *arbitraire*, par au moins une transformation de (G)) — satisfont, s'il en existe, à certaines relations (R) en $x_1, \ldots, x_n$, de forme déterminée, qui s'obtiennent en discutant le degré d'indétermination, c.-à-d. la résolubilité des équations de définition de (G). On peut d'abord supposer que ces relations (R) ne font pas partie des équations du système (S).

Considérons alors la solution (σ) comme représentant une multiplicité à m dimensions, de l'espace $x_1, \ldots, x_n$. En lui appliquant une transformation de (G), convenablement choisie, on en déduira une autre solution $(T\sigma)$, représentant une multiplicité nouvelle, passant par un point arbitraire. Il

[1] *Sur la théorie de Galois et ses généralisations.* N^os 31 et 33 (Annales de l'École normale, 1904)

existe donc des familles de solutions de (S), dépendant de $n-m$ paramètres, c.-à-d. de la forme

$$(2) \qquad x_i = \alpha_i(t_1, \ldots, t_m \mid a_1, \ldots, a_{n-m}), \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

telles que l'on puisse résoudre leurs équations (2) par rapport à $t_1, \ldots, t_m$, $a_1, \ldots, a_{n-m}$.

Imaginons alors le système automorphe de première espèce (S_0), relatif au groupe (G), et admettant la solution (2), considérée comme fonction des n variables $t_1, \ldots, t_m, a_1, \ldots, a_{n-m}$. Ses solutions, si on y considère $a_1, \ldots, a_{n-m}$ comme des paramètres ayant des valeurs constantes déterminées, c.-à-d. si l'on les considère comme fonctions de $t_1, \ldots, t_m$ seulement, seront les mêmes que celles de (S). Donc ce système (S_0) contiendra un certain nombre d'équations ne dépendant de $a_1, \ldots, a_{n-m}$, ni directement, ni par celles des dérivées des x_i où figure, parmi les indices de dérivation, au moins une fois l'une des lettres $a_1, \ldots, a_{n-m}$; et l'ensemble de celles de ces équations, conséquences des équations (S_0), et telles que toutes les analogues puissent s'en déduire par des différentiations et des éliminations, pourra être pris pour définir le système (S).

Imaginons toujours le système (S_0) formé, et cherchons à en déduire toutes les conséquences jusqu'à un ordre μ quelconque qui satisfassent aux deux conditions énoncées, c.-à-d. ne contiennent ni des dérivées autres que les dérivées par rapport aux t_i, ni les paramètres $a_1, \ldots, a_{n-m}$. Je dis que la première condition entraîne la seconde.

En effet, supposons formées toutes les conséquences de (S_0), jusqu'à l'ordre μ, satisfaisant à la première condition seulement; il faut prouver que $a_1, \ldots, a_{n-m}$ en disparaissent d'eux-mêmes. Sans cela, en effet, on pourrait peut-être éliminer $a_1, \ldots, a_{n-m}$ d'un certain nombre d'entre elles; mais il en resterait un certain nombre k qu'on pourrait résoudre par rapport à $a_1, \ldots, a_k$, par exemple. Considérons les équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_h = \Psi_h\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots \middle| t_1, \ldots, t_m \middle| a_{k+1}, \ldots, a_{n-m}\right), \quad (h=1, 2, \ldots, k) \\ & \qquad \left(x_i^{(\beta_1 \ldots \beta_m)} = \frac{\partial^{\beta_1 + \cdots + \beta_m} x_i}{\partial t_1^{\beta_1} \ldots \partial t_m^{\beta_m}}\right), \end{aligned} \right.$$

ainsi obtenues. Si on y effectue une transformation quelconque de (G), elles doivent visiblement rester invariantes, et par conséquent les seconds

membres sont des invariants différentiels de (G). Exprimons alors que ce système admet la solution (2): cette solution s'obtient, par définition, en effectuant, dans une multiplicité déterminée,

$$x_i = x_i^0 = \alpha_i^0(t_1, \ldots, t_m), \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

la transformation générale d'une certaine famille de transformations de (G), de la forme

$$x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid a_1, \ldots, a_{n-m}). \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

Or, si nous faisons dans les équations (3) la transformation (5), elles deviennent, puisque les Ψ_h sont des invariants,

$$a_h = \Psi_h\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots, x_i^{0(\beta_1\ldots\beta_m)}, \ldots \mid t_1, \ldots, t_m \mid a_{k+1}, \ldots, a_{n-m}\right); \quad (h=1,2,\ldots,k)$$

et il reste à remplacer les x_i^0 par leurs valeurs (4), ce qui ne peut introduire dans les Ψ_h les arbitraires $a_1, \ldots, a_k$. Il est donc impossible que les conditions obtenues soient réalisées identiquement.

5. La méthode à suivre pour former les systèmes (S) avec un nombre $m < n$ de variables indépendantes sera donc la suivante. On écrira le système (S_0), sous la forme (1), en laissant les θ_s indéterminés dans le second membre. Et on cherchera à en déduire des conséquences où ne figurent que des dérivées par rapport à $t_1, \ldots, t_m$; pour cela, on pourra être obligé de différentier d'abord les équations (1). On devra pousser les calculs jusqu'à ce qu'ils ne puissent plus donner d'équations nouvelles, qui ne soient des conséquences de celles déjà obtenues. Dans le système ainsi obtenu figureront certaines combinaisons des θ_i et de leurs dérivées: on les remplacera par des fonctions indéterminées de $t_1, \ldots, t_m$ seuls. Ces fonctions indéterminées devront pouvoir être déterminées en écrivant que le système admet une solution *arbitraire* (σ); de sorte que le système sera formé d'équations dont les seconds membres seront ces fonctions indéterminées, et les premiers des invariants différentiels de forme entièrement connue.

Si on laisse les seconds membres indéterminés, on devra les supposer liés par des relations de condition, obtenues en écrivant que le système est complètement intégrable.

Il est à remarquer que, le calcul précédent étant un calcul d'éliminations, on pourra être amené, dans le courant de ces éliminations, à supposer que certains déterminants fonctionnels sont différents de zéro. On devra donc, dans ce cas, reprendre le calcul à nouveau, en faisant l'hypothèse contraire, c.-à-d. en introduisant, dans les équations du système (S), celles que l'on obtient en égalant à zéro ces mêmes déterminants, et où ne figureront plus de fonctions indéterminées. De sorte qu'un même groupe (G) peut donner, pour un même nombre de variables indépendantes, divers types de systèmes automorphes.

Comme exemple, nous nous bornerons à citer celui du groupe des mouvements euclidiens ($n = 3$), en supposant $m = 1$, c.-à-d. que les multiplicités considérées sont des courbes. Les équations de définition du groupe, mises sous forme complétement intégrable, sont du premier et du second ordre. On trouve deux types de systèmes automorphes, contenant des équations du premier, du second et du troisième ordre. Ce sont, en désignant par x, y, z les fonctions inconnues, par t la variable indépendante, par ξ, η, ζ les dérivées de x, y, z par rapport à cette variable; et par des lettres accentuées les dérivées de ξ, η, ζ;

$$(6) \qquad \begin{cases} \sum \xi^2 = A(t), \qquad (A \neq 0) \\ \sum \xi'^2 = B(t), \\ \sum \xi''(\eta\zeta' - \zeta\eta') = C(t); \end{cases}$$

et

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum \xi^2 = 0, \\ \xi\eta' - \eta\xi' = J(t) \,.\, \zeta, \\ \dfrac{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}{\xi\eta' - \eta\xi'} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi^2 + \eta^2} = H(t) \,. \end{cases}$$

Le second convient à des familles de courbes minima; il faut joindre aux équations écrites celles qu'on en déduit par différentiations (jusqu'au troisième ordre, c.-à-d. au second par rapport à ξ, η, ζ).

6. Revenons sur l'hypothèse faite au début du N° 4, en supposant qu'au contraire on impose aux fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de satisfaire aux relations (R). En vertu de ces relations, on pourra alors exprimer $x_1, \ldots, x_n$

au moyen d'un moindre nombre n' de fonctions inconnues, qui seront transformées par un groupe (G'), isomorphe à (G), et ne dépendant que de n' variables; de sorte qu'on sera ramené à chercher les systèmes automorphes relatifs à (G').

Une réduction tout semblable se produira si le groupe (G) n'est pas transitif, les invariants de (G), d'ordre zéro, établissant encore des relations, de forme connue, entre $x_1, \ldots, x_n$. Nous pouvons donc considérer comme résolue la question de la construction des divers types de systèmes automorphes, relatifs au groupe (G), donné par les équations de définition de ses transformations finies.

Les résultats obtenus sont, bien entendu, des cas particuliers de résultats connus sur les invariants différentiels et l'équivalence des multiplicités par rapport à un groupe connu. Mais il était intéressant de les obtenir sous une forme aussi précise que possible, et sans rien supposer connu si ce n'est les notions fondamentales sur les équations de définition des groupes.

§ II. *De l'intégration des systèmes automorphes.*

7. Lie a montré[1] que l'intégration d'un système automorphe, dont le groupe associé (G) n'est pas simple, peut toujours se remplacer par l'intégration successive de *systèmes automorphes simples*, c.-à-d. dont les groupes associés sont simples.

Nous ne reviendrons pas sur la démonstration de ce théorème fondamental. Remarquons seulement que, pour l'appliquer, il faut déterminer une *suite normale* de sous-groupes du groupe (G) associé au système donné, c.-à-d. une suite de sous-groupes tels que chacun d'eux soit un sous-groupe invariant maximum du précédent. C'est là un problème auxiliaire que nous avons étudié, incidemment, dans un autre mémoire[2]: nous y avons montré qu'en dehors de simples calculs algébriques, la solution en peut nécessiter, tout-au-plus, l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

[1] Leipziger Berichte 1895, pages 285 et ss.

[2] *Sur la théorie des groupes continus*, § 7. Annales de l'École normale, 1903.

8. Une seconde réduction dans l'intégration d'un système automorphe se présente, si le groupe (G), associé au système, est imprimitif. Supposons, pour plus de simplicité, qu'il soit simple; ce qui, d'après ce qui précède, n'est pas une restriction.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables dépendantes. Les fonctions de ces variables, que le groupe échange entre elles, constituent les solutions de divers systèmes complets, invariants par le groupe, et qui, par suite, se construisent sans intégration. Supposons que l'on ait formé l'un d'eux, qu'on l'ait intégré, et que l'on ait fait le changement de variables dépendantes nécessaire pour que certaines de ces variables: $x_1, \ldots, x_{n'}$ par exemple, en constituent une solution. Elles sont alors échangées par un groupe (G'), isomorphe holoédriquement à (G), puisque (G) est simple par hypothèse.

Dans les équations du système automorphe donné (S), transformé par le changement de variables dépendantes indiqué, isolons alors les équations où ne figurent que les seules variables dépendantes $x_1, \ldots, x_{n'}$; elles forment un système automorphe (S'), ayant (G') pour groupe associé. Si de plus on a choisi un système complet invariant donnant pour n' la plus petite valeur possible, (G') est primitif.

Supposons (S') intégré: à chacune de ses solutions ne peut correspondre, à cause de l'isomorphisme holoédrique de (G) et (G'), qu'une seule solution de (S): c'est dire que $x_{n'+1}, \ldots, x_n$ se calculent, sans intégration, au moyen des équations de (S), en fonction de $x_1, \ldots, x_{n'}$.

Donc l'intégration de (S) est ramenée à celle de (S').

En résumé, *l'intégration de tout système automorphe se ramène à celle de systèmes automorphes à groupes simples et primitifs.* Cette réduction nécessite, au plus, l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

9. Il peut arriver que, même pour des systèmes automorphes à groupes simples et primitifs, on puisse obtenir encore une simplification. Supposons en effet qu'il existe un groupe (G'), isomorphe holoédriquement au groupe (G) du système donné, et transformant des variables $y_1, \ldots, y_{n'}$ en nombre moindre que celui des variables $x_1, \ldots, x_n$ que transforme (G). Par hypothèse[1] il existe un troisième groupe (G_0), transformant des variables $z_1, \ldots, z_\nu$,

[1] Cela résulte de la définition de l'isomorphisme, telle que nous l'avons donnée dans notre mémoire, déjà cité, *sur la théorie des groupes continus* (§ IX).

et tel que (G) exprime la loi de transformation, par ce groupe (G_0), de certaines fonctions de $z_1, \ldots, z_\nu$; tandis que (G') exprime la loi de transformation, par ce même groupe (G_0), d'autres fonctions de $z_1, \ldots, z_\nu$. Comme, du reste, le type de (G') importe seul, et que l'on peut par suite le remplacer, ainsi que (G_0), par un groupe quelconque qui lui soit semblable; comme, de plus, nous supposons, pour simplifier, (G) et (G') primitifs, ce que nous pouvons faire, d'après ce qui précède; il nous est loisible d'admettre que $x_1, \ldots, x_n$ soient certaines des variables $z_1, \ldots, z_\nu$, tandis que $y_1, \ldots, y_{n'}$ sont un autre groupe des mêmes variables. Nous appellerons $z_1, \ldots, z_{n''}$ celles des variables $z_1, \ldots, z_\nu$ qui n'appartiennent, ni à l'un, ni à l'autre de ces deux groupes.

En vertu de ce qui a été dit, au numéro précédent, sur les systèmes automorphes à groupes imprimitifs, tout système automorphe, ayant (G_0) pour groupe associé, et qui comprend, parmi ses équations, celles du système donné (S), ne contient, en plus, que des équations qui fournissent explicitement $y_1, \ldots, y_{n'}, z_1, \ldots, z_{n''}$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, des variables indépendantes $t_1, \ldots, t_m$, des dérivées de $x_1, \ldots, x_n$, et des fonctions de $t_1, \ldots, t_m$, encore indéterminées, qui constituent les seconds membres de ces équations. Il en résulte qu'elles ne peuvent entraîner aucune condition d'intégrabilité, qui ne soit déjà condition d'intégrabilité de (S); et que, par suite, on y peut choisir arbitrairement les fonctions indéterminées qui figurent dans leurs seconds membres. La construction d'un tel système suppose donc seulement qu'on connait les équations de définition de (G_0), ce que nous admettons en effet. Soit donc (S_0) un tel système.

D'après ce que nous avons vu au numéro précédent, l'intégration de (S_0), qui entraîne celle de (S), se ramène à celle du système réduit (S') qui définit seulement $y_1, \ldots, y_{n'}$. Donc l'intégration de (S) se trouve ainsi remplacée par celle de (S'), où figure un moins grand nombre de fonctions inconnues.[1]

Donc *tout système automorphe, dont le groupe associé* (G) *est simple et primitif, est équivalent à un autre système automorphe, que l'on peut former, relatif à un groupe quelconque isomorphe holoédriquement à* (G).

[1] Les développements que nous venons de donner nous paraissent l'explication d'un passage très-peu explicite du mémoire déjà cité de S. Lie. (Leipziger Berichte, 1895, p. 290.)

Ce nouveau théorème permet de n'introduire, en définitive, que des systèmes automorphes à groupes simples, primitifs, et dépendant, pour une structure donnée, du nombre minimum de variables.

10. Pour achever la théorie de l'intégration des systèmes automorphes, il resterait à examiner séparément les systèmes correspondant aux divers types de groupes simples primitifs. Car si l'on a affaire à un groupe (G) semblable à l'un de ces groupes types (Γ), on pourra chercher d'abord une transformation qui change (G) en (Γ), ce qui nécessite, comme nous l'avons montré dans notre mémoire *sur la théorie des groupes continus* (§ IX),[1] l'intégration d'un système automorphe de première espèce, ayant (Γ) pour groupe associé.

Remarquons qu'il n'y a pas à se préoccuper des groupes finis; car un système automorphe à groupe fini se ramène à un système automorphe d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. On est donc dans le cas de ces systèmes dont nous avons prouvé autrefois[2] qu'ils s'intègrent au moyen d'équations différentielles ordinaires linéaires.

Bornons-nous donc aux groupes infinis, simples et primitifs. Lie en a trouvé quatre grandes classes, et M. Kowalewski a montré qu'il n'y en a pas d'autres, pour $n \leqq 5$. Il nous sera donc impossible d'épuiser la question, pour $n > 5$. Nous dirons seulement quelques mots pour chacune des quatre classes de groupes simples trouvées par Lie.

1°) *groupes ponctuels généraux.* Les systèmes automorphes correspondants sont ceux qui définissent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire aux dérivées partielles

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial t_i} = 0, \tag{8}$$

ou d'un système complet d'équations de la même forme: il n'y a donc rien de particulier à dire sur l'intégration de ces systèmes, qui revient à celle d'équations différentielles ordinaires, qui peuvent être tout-à-fait générales.

[1] Annales de l'École normale, 1903.

[2] Annales de Toulouse, T. VIII, H; T. X, C.

2°) *groupes ponctuels les plus généraux, n'altérant pas les volumes.* L'équation de définition unique d'un tel groupe est

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)} = 1.$$

Il n'y a pas de système automorphe correspondant, qui dépende de moins de n variables indépendantes. Les systèmes automorphes de première espèce ont la forme

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)} = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Pour intégrer un tel système, on peut se donner arbitrairement les fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et x_n se détermine par une quadrature.

Quant aux systèmes automorphes, dépendant de plus de n variables indépendantes, ce ne sont autre chose que des équations linéaires de la forme (8), ou des systèmes complets de telles équations, admettant un multiplicateur de Jacobi connu. La théorie de leur intégration est donc bien connue.

3°) *groupes généraux de transformations de contact.* Appelons, pour plus de netteté, $z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ les fonctions inconnues; et considérons d'abord un système automorphe de première espèce; soient $t_1, t_2, \ldots, t_{2n+1}$ les variables indépendantes. D'après la théorie de la similitude des groupes,[1] une solution de ce système peut être considérée comme définissant une transformation qui change le groupe général des transformations de contact en un autre groupe, qui lui est semblable; cette transformation change l'équation

$$dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0 \tag{9}$$

en une autre équation de Pfaff

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \theta_k(t_1, \ldots, t_{2n+1}) dt_k = 0. \tag{10}$$

Les diverses autres solutions se déduisent de la première en y effectuant, sur $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, les diverses transformations de contact, c.-à-d. les

[1] Voir notre mémoire: *Sur la théorie des groupes continus,* § IX. Annales de l'École normale, 1903.

diverses transformations laissant l'équation (9) invariante. Elles définiront donc à leur tour les diverses transformations qui changent (9) en (10). Le problème de l'intégration du système automorphe considéré est donc identique à celui qui consiste à ramener l'équation de PFAFF (10) à la forme canonique (9) c.-à-d. se ramène au problème classique de PFAFF.

L'intégration des systèmes automorphes à plus de $2n+1$ variables indépendantes, d'après ce que nous avons vu au n° 3, se ramène au cas précédent.

Mais il y a en outre à considérer des systèmes automorphes dépendant de moins de $2n+1$ variables indépendantes. Leur intégration se rattache encore à la théorie du problème de PFAFF: mais leur étude nécessiterait d'assez longs développements, que nous réserverons pour une autre travail.

4°) *groupes généraux de transformations de contact en* $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Le système automorphe de première espèce définit (on le verrait en raisonnant comme plus haut) toutes les transformations qui changent une expression de PFAFF

$$\sum_{k=1}^{2n} \theta_k(t_1, \ldots, t_{2n})dt_k \tag{11}$$

en une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + dU, \tag{12}$$

U étant une fonction arbitraire des variables indépendantes. La recherche de ces transformations se rattache à la théorie du problème de PFAFF. Il en est de même pour l'intégration des systèmes automorphes, relatifs au même groupe, et dépendant de moins de $2n$ variables indépendantes. C'est encore un point sur lequel nous nous réservons de revenir dans une autre occasion.

CHAPITRE II.

Sur l'intégration des systèmes différentiels, qui admettent des groupes de transformations.

§ I. *Un exemple de Lie.*

1. Nous allons exposer une méthode générale, dont le but est de ramener l'intégration de tous les systèmes différentiels, admettant des groupes continus de transformations, à l'intégration de systèmes automorphes.

Nous traiterons d'abord, suivant cette méthode, l'un des exemples étudiés par Lie.[1] Il nous sera plus facile ensuite de l'exposer dans toute sa généralité.

Le problème traité par Lie est le suivant:

Exposer une théorie générale d'intégration pour les équations aux dérivées partielles du second ordre, définissant une fonction inconnue z des deux variables indépendantes x, y; et admettant le groupe infini dont la transformation infinitésimale générale est de la forme:

$$(1) \qquad \xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \xi'(x)\,.\,z\frac{\partial f}{\partial z},$$

ξ étant une fonction arbitraire.

Lie ramène la solution de ce problème à l'intégration d'un système en involution; c.-à-d. à l'emploi de la méthode de M. Darboux. Notre solution sera toute autre, et conduira à prévoir quelques simplifications de plus.

2. Étudions d'abord le groupe considéré, que nous appellerons le groupe (G). Sa transformation finie générale est

$$(2) \qquad x' = X(x), \qquad z' = \frac{z}{X'(x)},$$

où $X(x)$ est une fonction arbitraire.

[1] Leipziger Berichte, 1895, pages 116 et ss.

Les équations de définition de ses transformations finies s'en déduisent sans peine. On en a d'abord une première forme évidente:

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \qquad z' \frac{\partial x'}{\partial x} = z. \tag{3}$$

Mettons-les sous la forme de Lie, en appliquant la méthode générale que nous avons exposée dans un autre travail.[1]

Nous introduisons deux variables indépendantes u et w, non transformées; et nous cherchons les relations entre les dérivées de x, z et de x', z' par rapport à ces variables. Pour savoir jusqu'à quel ordre il faudra pousser les calculs, nous devons mettre les équations (3) sous forme complètement intégrable; nous obtenons les équations, du 1er ordre seulement,

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{z}{z'}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{z'}{z}. \tag{4}$$

D'où les relations

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{z}{z'} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial w} = \frac{z}{z'} \frac{\partial x}{\partial w}, \tag{5}$$

et

$$\frac{\partial z'}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial w} = \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial w}.$$

Il faut éliminer les dérivées de x', z' par rapport à x, z; ce qui donne, d'abord les relations (5), et la relation

$$\frac{\partial z'}{\partial u} = \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial w}} \left[\frac{\partial z'}{\partial w} - \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial w} \right]. \tag{6}$$

Il est inutile de continuer à employer la méthode générale, car on voit de suite que ces équations s'écrivent:

$$z' \frac{\partial x'}{\partial u} = z \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad z' \frac{\partial x'}{\partial w} = z \frac{\partial x}{\partial w},$$

$$\frac{1}{z'} \frac{\partial z'}{\partial u} - \frac{1}{z'} \frac{\partial z'}{\partial w} \cdot \frac{\dfrac{\partial x'}{\partial u}}{\dfrac{\partial x'}{\partial w}} = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial w}},$$

[1] *Sur la théorie des groupes continus*, n° 6. (Ann. de l'Éc. norm., 1903.)

et la dernière peut se remplacer, en tenant compte des premières, par

$$\frac{D(x', z')}{D(u, w)} = \frac{D(x, z)}{D(u, w)}.$$

Ainsi se trouvent calculés les invariants différentiels fondamentaux

$$(7) \qquad z\frac{\partial x}{\partial u}, \quad z\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{D(x, z)}{D(u, w)}.$$

Les équations de définition de (G), ramenées à la forme de Lie, sont par suite

$$(8) \qquad z'\frac{\partial x'}{\partial x} = z, \qquad z'\frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{D(x', z')}{D(x, z)} = 1.$$

3. Nous devons maintenant considérer z comme une fonction de x et y, et chercher les équations différentielles correspondantes, qui admettent le groupe (G). Nous emploierons à cet effet une méthode nouvelle, analogue à celles qui ont été données par M. Tresse, dans sa thèse:[1] cette méthode est la base de la méthode d'intégration que nous exposerons ensuite.

Employons, pour plus de commodité, le langage géométrique. Nous avons à considérer une surface σ, et les surfaces qui lui sont *homologues* par rapport au groupe (G); c.-à.d. qui en proviennent par les transformations de ce groupe; et à chercher les relations en $z, p, q, r, s, t, \ldots$ qui peuvent convenir à la fois à toutes ces surfaces.

Imaginons à cet effet que la surface σ soit donnée par trois équations de la forme:

$$(\sigma) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Les homologues seront données, sous une forme analogue, par les solutions d'un système automorphe, dont le groupe associé s'obtiendra en adjoignant l'équation $y = y'$ à celles des diverses transformations de (G) (puisque celles-ci ne transforment pas y).

Plus simplement encore, nous servant de cette circonstance que y n'est pas transformé, il nous suffira de supposer σ définie par deux équations de la forme

$$(9) \qquad x = f(u, y), \qquad z = g(u, y);$$

[1] *Sur les invariants différentiels.* Paris, 1893.

et les homologues de σ seront définies d'une manière toute semblable par les solutions d'un système automorphe, relatif au groupe (G), qui sera de la forme

$$z\frac{\partial x}{\partial u}=\alpha, \qquad z\frac{\partial x}{\partial y}=\beta, \qquad \frac{D(x\,,\,z)}{D(u\,,\,y)}=\gamma, \tag{10}$$

où $\alpha\,,\beta\,,\gamma$ sont certaines fonctions de u et y, satisfaisant à la condition d'intégrabilité du système (10),

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial u}=\gamma; \tag{11}$$

et dont l'expression s'obtiendrait en exprimant que les équations (9) définissent une solution du système (10).

Il n'y aura donc qu'à chercher les relations entre $z\,,p\,,q\,,r\,,\ldots$ qui sont des conséquences de ces équations (10), et de l'hypothèse que z est fonction de x et y. Cette hypothèse s'exprimera du reste par les relations

$$\left|\begin{aligned} dx&=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial y}dy,\\ dz&=pdx+qdy,\\ dp&=rdx+sdy,\\ dq&=sdx+tdy,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

où du et dy sont arbitraires.

4. Cherchons d'abord les relations du premier ordre. On a à joindre, aux équations (10), les relations

$$\frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=p\frac{\partial x}{\partial y}+q; \tag{13}$$

ce qui donne les équations résolues

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\alpha}{z}, && \frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\beta}{z},\\ &\frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\alpha}{z}, && \frac{\partial z}{\partial y}=p\frac{\beta}{z}+q, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

et l'équation de condition:

$$(15) \qquad q\alpha - \gamma z = 0.$$

On n'en pourrait rien tirer, si $\alpha = \gamma = 0$, ce qui réduirait les équations (10) à $z = 0$. Cette surface particulière est invariante par toutes les transformations de (G). Nous pouvons la laisser de côté.

Alors α est nécessairement différent de zéro, sans quoi, à cause de (15), on retomberait sur le cas précédent. On peut donc écrire (15) sous la forme

$$(16) \qquad \frac{q}{z} = \frac{\gamma}{\alpha};$$

ce qui montre que $\frac{q}{z}$ est *un invariant différentiel du* 1^{er} *ordre* pour la famille de surfaces considérée.

On vérifierait facilement que, sous cette condition (16), le système (14) est complètement intégrable, de sorte qu'en le différentiant on n'obtiendra jamais de relation, indépendante des dérivées de x et z par rapport à u et y, qui ne soit une conséquence de (16), et des relations qu'on en peut déduire par différentiations successives.

Nous allons montrer que ces relations se déduiront les unes des autres par l'emploi répété de *deux paramètres différentiels.*

Supposons en effet l'une d'elles, qui est, par hypothèse, de la forme

$$(17) \qquad J(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H(u, y).$$

Nous aurons à la différentier par rapport à u et y; ce qui donnera, en tenant compte des relations (14), et employant les notations usuelles de différentiation totale,

$$\frac{dJ}{dx}\cdot\frac{\alpha}{z} = \frac{\partial H}{\partial u}, \qquad \frac{dJ}{dx}\cdot\frac{\beta}{z} + \frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

d'où l'on tire:

$$(18) \qquad \frac{1}{z}\frac{dJ}{dx} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial u}, \qquad \frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial u}.$$

Les deux membres de ces relations définissent les paramètres différentiels annoncés, sous leur double forme.

Nous obtiendrons par conséquent ainsi une série illimitée d'invariants différentiels, avec leurs expressions au moyen de α, β, γ et de leurs dérivées successives; en se servant de l'identité (11), on pourra même ne laisser dans ces expressions que α, β et leurs dérivées successives.

Si, jusqu'à un certain ordre m, on a obtenu les relations distinctes:

$$(19) \qquad J_k(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H_k\left(y, \alpha, \beta, \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \ldots\right), \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\mu)}$$

tous les systèmes différentiels dont nous cherchions la forme générale résulteront de l'élimination de u et de y entre les équations (19), où α et β auront été remplacées par des fonctions de u et de y. Bien entendu, il se pourra qu'ils ne contiennent qu'une partie des relations provenant de cette élimination.

Le cas où ils les contiennent toutes est celui où toutes les solutions du système différentiel en $x, y, z, p, q, r, \ldots$ se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de (G); de sorte qu'on pourrait dire encore qu'un tel système est automorphe; mais il nous parait préférable de n'employer ce mot que dans le sens plus restreint où nous l'avons employé jusqu'ici. On sait que, dans ce cas, l'ordre du système est limité; c.-à-d. qu'il existe un certain ordre m_0 tel que les équations d'ordre supérieur sont des conséquences des équations d'ordre égal ou inférieur à m_0.

5. Tout système différentiel, de l'espèce considérée, sera donc de la forme:

$$(20) \qquad F_h(J_1, J_2, \ldots, J_\mu) = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\rho)}$$

Et, réciproquement, tout système différentiel de cette forme, pourvu qu'il soit complètement intégrable, satisfait évidemment à la question.

A ce système on pourra associer le *système résolvant*

$$(21) \qquad F_h(H_1, H_2, \ldots, H_\mu) = 0, \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\rho)}$$

qui sera de lui-même complètement intégrable; et *l'intégration du système donné se décomposera en:* 1°) *l'intégration du système résolvant* (21); 2°) *l'intégration du système automorphe* (10).

Telle est, en deux mots, la méthode d'intégration annoncée. L'idée qui nous a guidé est de répartir l'ensemble des solutions du système donné en familles formées de solutions provenant les unes des autres par les transformations de (G). C'est aussi cette idée qui est, au fond, le principe de la méthode de Lie; mais l'introduction des systèmes automorphes nous permettra de préciser davantage la nature des intégrations auxquelles nous allons être conduits.

Il nous reste en effet à étudier, de plus près, les deux problèmes types auxquels nous nous trouvons ramenés.

6. Occupons-nous d'abord de l'intégration du système automorphe (10). On voit immédiatement qu'elle se réduit à celle de l'équation

$$\beta\frac{\partial x}{\partial u} - \alpha\frac{\partial x}{\partial y} = 0, \tag{22}$$

car on a ensuite

$$z = \frac{\alpha}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\beta}{\frac{\partial x}{\partial y}}; \tag{23}$$

et la troisième équation (10), est une conséquence de celles-là, en vertu de la condition (10).

Donc tout se réduit à l'intégration de l'équation différentielle ordinaire, à deux variables,

$$\alpha du + \beta dy = 0. \tag{24}$$

7. Etudions maintenant le système (21). Remarquons d'abord que la forme de J_k ne peut dépendre du choix de la variable indépendante u, qui a été supposée figurer dans les formules (9), définissant l'une des surfaces cherchées. Donc les H_k sont invariants[1] par l'ensemble des transformations

$$u' = \varphi(u, y), \qquad y' = y; \tag{25}$$

auxquelles s'associent

$$\alpha = \alpha'\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \beta = \alpha'\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta', \tag{26}$$

[1] Une idée analogue se trouve dans le mémoire de Lie *Sur les invariants intégraux*. Leipziger Berichte, 1897, pages 379 et ss.

obtenues en écrivant que le système

$$z\frac{\partial x}{\partial u'} = \alpha', \qquad z\frac{\partial x}{\partial y} = \beta', \qquad \frac{D(x\,,\,z)}{D(u'\,,\,y)} = \gamma'$$

est équivalent au système (10).

Reciproquement, toute fonction différentielle en $u\,,y\,,\alpha\,,\beta\,,\frac{\partial\alpha}{\partial u}\,,\ldots$ invariante par le groupe [(25), (26)], ne dépend pas des paramètres choisis pour représenter la surface σ; de sorte que, quand on y aura remplacé α et β, au moyen des formules (10), en fonction de $x\,,y\,,z\,,\frac{\partial x}{\partial u}\,,\ldots$, elle ne pourra dépendra que des dérivées de z par rapport à x et y; c.-à-d. qu'elle sera devenue un invariant J.

Donc le système (21) *est caractérisé par cette propriété d'être invariant par le groupe* [(25), (26)].

Il pourrait sembler que l'on est ramené à un problème de la même nature que le premier, et par suite que l'on va se trouver dans un cercle vicieux. Mais, ici, nous n'avons pas besoin de connaître toutes les solutions; il ne nous en faut au contraire qu'une seule, dans chaque série de solutions provenant les unes des autres par les transformations du groupe [(25), (26)]. Il faut donc chercher à faire ce choix, pour n'avoir pas d'intégrations superflues.

Cela revient à chercher une forme canonique de ce système, satisfaisant à la condition précédente. On y arrive en se donnant, pour les expressions de deux invariants, une forme déterminée. Comme celle de l'invariant y est forcée, on se donnera celle du premier invariant: $\frac{\gamma}{\alpha}$. Posons, par exemple,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial u}}{\alpha} = u\,. \tag{27}$$

Les deux premiers invariants suivants deviendront, en se servant des paramètres différentiels trouvés plus haut,

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)}{\partial u} = \frac{1}{\alpha'}, \qquad \frac{\partial\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\partial\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)}{\partial u} = \frac{\gamma'}{\alpha'}.$$

On aurait donc pu choisir les invariants du second ordre de manière qu'ils se réduisent, dans l'hypothèse (27), à α et β. On verra de même [1] que, par un choix convenable, les suivants se réduiraient à trois des dérivées $\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \beta}{\partial y}$, la quatrième étant liée aux autres par la relation (27). Et ainsi de suite.

Le système (21) sera donc remplacé par un système complètement intégrable, qui pourra être le plus général de ceux qui forment, avec (27) et les équations qu'on en déduit par différentiations, un système complètement intégrable. Il sera de la forme

$$\Phi_h\left(y, u, \alpha, \beta, \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \ldots\right) = 0, \qquad (h=1,2,\ldots,\rho) \tag{28}$$

et de l'ordre $m-1$, si le système (21) est d'ordre m.

Cette partie du calcul conduit du reste à un système auxiliaire identique à celui que donne Lie; il est facile de vérifier en effet que Lie fait la même suite de calculs, avec une autre interprétation seulement.

8. Bornons-nous, pour terminer, au cas d'une équation invariante du second ordre. Le système (28) se réduira à une équation [2]

$$\Phi(y, u, \alpha, \beta) = 0;$$

d'où l'on pourra tirer β, par exemple,

$$\beta = \chi(\alpha, u, y). \tag{29}$$

On sera donc ramené à une équation du premier ordre *linéaire*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial \chi}{\partial u} - \alpha u = 0,$$

[1] Cela résulte, sans calcul, d'une propriété générale des invariants différentiels: voir S. Lie, Leipziger Berichte, 1895, page 118.

[2] Le système (20) se réduit à une équation de la forme

$$F\left(y, \frac{q}{z}, \frac{zs-pq}{z^2}, \frac{t}{z} - \frac{q^2}{z^2}\right) = 0.$$

c.-à-d. à un système d'équations différentielles ordinaires

$$dy = -\frac{du}{\frac{\partial\chi}{\partial a}} = \frac{da}{\frac{\partial\chi}{\partial u} + au}. \tag{30}$$

On verrait que l'intégration se simplifie, si l'équation (29) est homogène en α et β, car alors le système [(27), (29)] admet le groupe à un paramètre

$$\alpha' = c\alpha, \qquad \beta' = c\beta.$$

L'intégration se ramène alors à celle d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, et à une quadrature.

Remarque. Si le système donné avait pour conséquence une relation de la forme

$$\frac{q}{z} = f(y) \tag{31}$$

c.-à-d.

$$\frac{\gamma}{a} = f(y),$$

l'équation (27) serait impossible. Les formules (18) montrent qu'alors tous les invariants sont fonctions de y seul.

Cela prouve qu'il serait impossible, dans ce cas, de fixer la position d'un point sur une surface intégrale par les valeurs de deux invariants; et, par conséquent, impossible d'avoir une correspondance univoque entre deux surfaces intégrales homologues. Il y a donc une infinité de transformations de (G) qui transforment l'une des surfaces dans l'autre, et chacune d'elles admet un sous-groupe du groupe (G). La réciproque est vraie, sauf dans le cas où la surface est telle que tous ses points soient invariants par les transformations de (G) qu'elle admet.

Vérifions ces prévisions: une surface de l'espèce considérée est de la forme

$$z = \psi(x) \,.\, \chi(y),$$

et admet le sous-groupe à un paramètre dont la transformation infinitésimale est

$$\frac{1}{\psi(x)}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}\, z\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Quant à l'intégration de (21), elle se réduira à celle d'une équation différentielle ordinaire donnant la fonction $f(y)$. On pourra satisfaire ensuite à

$$\frac{\gamma}{\alpha} = f(y)$$

en prenant, par exemple

$$\beta = 0, \qquad \alpha = e^{\int f(y)\,dy};$$

et les équations (10) donneront

$$x = \theta(u), \qquad z\theta'(u) = e^{\int f(y)\,dy};$$

c.-à-d. puisque $\theta(u)$ est arbitraire

$$z = \psi(x) \,.\, e^{\int f(y)\,dy}.$$

Il serait, bien entendu, immédiat d'intégrer

$$\frac{q}{z} = f(y),$$

mais il était intéressant de montrer que la méthode n'est en défaut que quant à la simplification du système résolvant (21).

§ II. *Autre exemple.*

9. Nous considérerons encore le groupe (G), dont la transformation infinitésimale générale est [1]

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi'(x) y \frac{\partial f}{\partial y} + \xi''(x) y \frac{\partial f}{\partial z}.$$

et dont la transformation finie générale est

$$x' = X(x), \qquad y' = yX'(x), \qquad z' = z + y\frac{X''(x)}{X'(x)}.$$

Et nous voulons étudier les équations aux dérivées partielles en $x, y, z, p, q, r, \ldots$, et les systèmes de telles équations, qui admettent ce groupe (G).

Appliquons la même marche que dans l'exemple précédent.

[1] Ce groupe a été considéré par M. Medolaghi, Annali di Matematica, 1898, page 229.

Nous cherchons d'abord à définir l'ensemble des surfaces homologues d'une surface déterminée, supposée définie par trois équations

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Cela revient à chercher les systèmes automorphes correspondants. Nous déterminons d'abord les invariants différentiels de (G), en considérant x, y, z comme fonctions des deux variables u, v non transformées. On trouve

$$\frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{y}\left[\frac{\partial y}{\partial u} - z\frac{\partial x}{\partial u}\right], \quad \frac{1}{y}\left[\frac{\partial y}{\partial v} - z\frac{\partial x}{\partial v}\right],$$

$$\frac{1}{y}\left[\frac{D(x, z)}{D(u, v)} - \frac{z}{y}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right];$$

et ceux qui s'en déduisent par différentiations successives. La forme des systèmes automorphes correspondants sera donc

$$(32) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha, \qquad \frac{1}{y}\left[\frac{\partial y}{\partial u} - z\frac{\partial x}{\partial u}\right] = \beta, \\ &\frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha', \qquad \frac{1}{y}\left[\frac{\partial y}{\partial v} - z\frac{\partial x}{\partial v}\right] = \beta', \\ &\qquad \frac{1}{y}\frac{D(x, z)}{D(u, v)} - \frac{z}{y^2}\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \gamma; \end{aligned}\right.$$

ce qui s'écrit, en résolvant

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha y, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = y(\alpha z + \beta), \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha' y, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = y(\alpha' z + \beta'), \\ &\alpha\frac{\partial z}{\partial v} - \alpha'\frac{\partial z}{\partial u} = (\alpha\beta' - \beta\alpha')z + \gamma; \end{aligned}\right.$$

et on trouve, comme conditions d'intégrabilité,

$$(34) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \alpha'}{\partial u} + \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \beta'}{\partial u} + \gamma \ [illegible]$$

10. Nous calculons maintenant les équations invariantes cherchées, en adjoignant aux équations (33) les suivantes

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v},$$

c.-à-d.

$$\text{(35)} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = y[\alpha(p + qz) + \beta q], \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = y[\alpha'(p + qz) + \beta' q].$$

Éliminant les dérivées par rapport à u et v; et, écartant le cas singulier où $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ serait nul,[1] il vient

$$\text{(36)} \qquad qy - z = \frac{r}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Et on montrerait, comme dans l'exemple précédent, que tous les autres invariants différentiels doivent s'en déduire par différentiations successives, au moyen de paramètres différentiels. Calculons ces paramètres différentiels: nous partons à cet effet de l'identité

$$J(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H\left(\alpha, \beta, \ldots, \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \ldots\right),$$

et, en la différentiant, nous obtenons

$$\alpha y\frac{dJ}{dx} + y(\alpha z + \beta)\frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial u},$$

$$\alpha' y\frac{dJ}{dx} + y(\alpha' z + \beta')\frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial u};$$

d'où on tire les paramètres différentiels équivalents

$$\text{(37)} \qquad \left|\begin{aligned} y\left(\frac{dJ}{dx} + z\frac{dJ}{dy}\right) &= \frac{\beta'\dfrac{\partial H}{\partial u} - \beta\dfrac{\partial H}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = A(H), \\ y\frac{dJ}{dy} &= \frac{\alpha\dfrac{\partial H}{\partial v} - \alpha'\dfrac{\partial H}{\partial u}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = B(H). \end{aligned}\right.$$

[1] Dans ce cas, on aurait, d'après les équations (32), $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0$, et ce serait en contradiction avec l'hypothèse que x et y sont deux variables indépendantes.

Les seconds membres des relations ainsi obtenues sont aussi des invariants différentiels. En effet, ils ne doivent pas changer de valeur quand on fait sur u et v un changement de variables quelconque

$$\bar{u} = \varphi(u, v), \qquad v = \psi(u, v). \tag{38}$$

Or, par ce changement de variables, le système (32) garde sa forme, les seconds membres étant remplacés respectivement par les fonctions $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}$ de $\bar{u}, \bar{v}$, définies par les formules

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{\alpha}'\frac{\partial\psi}{\partial u} = \alpha, \qquad \bar{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{\alpha}'\frac{\partial\psi}{\partial v} = \alpha', \\ &\bar{\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{\beta}'\frac{\partial\psi}{\partial u} = \beta, \qquad \bar{\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{\beta}'\frac{\partial\psi}{\partial v} = \beta', \\ &\qquad\qquad \bar{\gamma}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \gamma. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

On a donc à considérer le groupe [(38), (39)]. Ses invariants différentiels jusqu'au premier ordre sont

$$\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\alpha'}{\partial u}\right], \qquad \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\beta'}{\partial u}\right], \qquad \frac{1}{\gamma}(\alpha\beta' - \beta\alpha'); \tag{40}$$

c.-à-d. les expressions qui interviennent seules dans les conditions d'intégrabilité (34), et la valeur de l'invariant (36). Il était du reste évident que les conditions d'intégrabilité de (32) devaient être invariantes par le groupe [(38), (39)].

Nous supposerons que l'on remplace partout γ par sa valeur, tirée de (34)

$$\gamma = \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\beta'}{\partial u},$$

On pourra alors abandonner la dernière des équations (39); et les invariants différentiels seront seulement

$$\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad \frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u} - \dfrac{\partial\beta}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}; \tag{41}$$

— [dont le premier est égal à un, d'après (36); tandis que le second est l'équivalent de l'invariant $(qy - z)$] —; et ceux qui s'en déduisent par l'emploi des paramètres différentiels qui sont les seconds membres de (37). Nous

n'aurons à considérer que ceux qui proviennent ainsi du second des invariants (41), les autres étant tous identiquement nuls dans la question.

11. Nous obtenons donc une suite d'identités de la forme

$$(42) \qquad J_k(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H_k\left(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \ldots\right),$$

dont (36) est la première. Tout système répondant à la question sera de la forme

$$(43) \qquad F_h(J_1, J_2, \ldots, J_\mu) = 0. \qquad (h=1, 2, \ldots, \nu)$$

Et pour l'intégrer, nous le remplacerons par le système résolvant formé de la première des équations (34), et du système

$$(44) \qquad F_h(H_1, H_2, \ldots, H_\mu) = 0. \qquad (h=1, 2, \ldots, \nu)$$

Ce système résolvant intégré, on devra intégrer ensuite le système automorphe (46).

La réduction de l'intégration du système résolvant se fera suivant la méthode suivie au n° 7. Nous poserons, par exemple, pour le premier des H_k

$$(45) \qquad \frac{\dfrac{\partial \beta'}{\partial u} - \dfrac{\partial \beta}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = u;$$

et les suivants se réduiront alors à

$$-\frac{\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad \frac{\beta'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Comme on le voit en appliquant à l'identité (45) les opérations $A(F)$ et $B(F)$. Nous poserons alors

$$(46) \qquad -\frac{\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = v;$$

de sorte que deux des invariants H_k, de l'ordre suivant, se réduiront à

$$\frac{-\beta}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad \frac{\alpha}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

On voit donc que quatre des invariants se réduisent, en vertu des hypothèses (45) et (46), à quatre fonctions de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ indépendantes. On

aurait donc pu les remplacer par des combinaisons de ces invariants qui se seraient réduites précisément à $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$; et les suivants se réduiraient à des combinaisons de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ et de leurs dérivées, d'où pourraient se tirer toutes ces dérivées. Le système résolvant sera ainsi réduit aux équations

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} - \dfrac{\partial\alpha'}{\partial u} + \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial\beta}{\partial v} - \dfrac{\partial\beta'}{\partial u} + u(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0, \\[2mm] \alpha' + v(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0, \end{cases}$$

jointes à un système qui peut être le plus général de ceux qui, associés à ces équations (41), constituent un système complétement intégrable. Un tel système n'admet plus aucune transformation en $\alpha, \beta, \alpha', \beta', u, v$. Il ne présente donc plus rien de particulier, au point de vue de la théorie des groupes.

10. Il nous reste à étudier l'intégration du système (33). Elle est immédiate: x se détermine d'abord par l'équation

$$\alpha'\frac{\partial x}{\partial u} - \alpha\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

c.-à-d. en intégrant l'équation différentielle ordinaire

$$\alpha du + \alpha' dv = 0.$$

On a ensuite, sans intégration nouvelle,

$$y = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\alpha'}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad z = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial u} - \beta\right] = \frac{1}{\alpha'}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial v} - \beta'\right].$$

13. Considérons, par exemple, le cas d'une seule équation du second ordre

$$(48)\qquad F(qy - z, (sy - p)y + ty^2 z, ty^2) = 0.$$

On obtiendra, pour adjoindre aux équations (47), la seule équation

$$F\left(u, \frac{\beta'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, v\right) = 0,$$

d'où on tirera

$$(49) \qquad \beta' + f(u, v)(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0.$$

On trouve alors, par un calcul facile,

$$\beta' = \frac{f(u, v)}{v}\alpha', \qquad \beta = \frac{f(u, v)}{v}\alpha + \frac{1}{v}.$$

La seconde des équations (47) se réduit à une relation de la forme

$$g(u, v)\alpha + h(u, v)\alpha' - \frac{1}{v^2} = 0,$$

d'où on tirera, par exemple, α' en fonction linéaire de α, qui sera, par conséquent, déterminé par une équation linéaire

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} + M(u, v)\frac{\partial \alpha}{\partial u} - P(u, v)\alpha - Q(u, v) = 0,$$

c.-à-d. par l'intégration du système

$$(50) \qquad dv = \frac{du}{M(u, v)} = \frac{d\alpha}{P(u, v)\alpha + Q(u, v)}.$$

On a donc à intégrer une équation différentielle ordinaire à deux variables, u et v; puis à effectuer deux quadratures.

Remarque. Dans certains cas particuliers, il deviendrait impossible de poser des équations de condition analogues à (45) et (46). C'est dans le cas où les surfaces cherchées vérifient une relation de la forme

$$(51) \qquad qy - z = \text{constante},$$

ou deux relations de la forme

$$(52) \qquad \begin{cases} (sy - p)y + ty^2 z = F(qy - z), \\ ty^2 = G(qy - z). \end{cases}$$

Dans le second cas, on peut encore faire le changement de variables partiel tel que l'on ait l'identité (45). Et les équations (52) donneront

$$\beta' = \alpha'\frac{G(u)}{F(u)}, \qquad \beta = \alpha\frac{G(u)}{F(u)} - \frac{1}{F(u)};$$

et, en portant ces valeurs dans (45), il vient, en écartant la solution $\alpha' = 0$, qui ramènerait à l'autre cas singulier,

$$-G + uF + FG' - GF'' = 0,$$

qui est la condition d'intégrabilité du système (52); α et α' sont donc assujettis à la seule condition

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \alpha'}{\partial u} + \frac{\alpha'}{F} = 0.$$

Comme le choix de la variable v est encore arbitraire, on prendra, par exemple

$$\alpha' = ve^{\int \frac{du}{F}}, \qquad \alpha = \chi(u)e^{\int \frac{du}{F}}, \qquad (\chi(u) \text{ arbitraire}),$$

et l'intégration du système (33) se réduira à celle de

$$vdv + \chi(u)du = 0$$

c.-à-d. à une quadrature.

Quant à l'autre cas singulier, l'intégration est immédiate.

Les singularités précédentes tiennent encore à la nature même des choses, et non à la méthode employée. Les intégrales du système (52) admettent chacune un sous-groupe de (G), à un paramètre; et celles de l'équation (51) admettent un sous-groupe à deux paramètres.

§ III. *Méthode générale d'intégration.*

14. Le caractère général des raisonnements faits dans les exemples précédents est manifeste. Nous allons exposer maintenant comment ils constituent en effet le principe d'une méthode générale d'intégration des systèmes différentiels admettant des groupes, finis ou infinis, de transformations.

Soient $x_1, \ldots, x_m$ les variables indépendantes, $z_1, \ldots, z_q$ les fonctions inconnues; (A) la système donné; et (G) le groupe que ce système admet. Les équations (A) dépendent de $x_1, \ldots, x_n$, de $z_1, \ldots, z_q$ et des dérivées

$$z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

Le groupe (G) transforme entre elles toutes les variables $x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q$. Nous indiquerons plus loin les simplifications à apporter à la méthode si certaines de ces variables étaient invariantes par le groupe (G), mais, même dans ce cas, ce que nous allons dire s'appliquerait encore.

Chacune des solutions de (A) représente une multiplicité M, à m dimensions, de l'espace à $m+q=n$ dimensions. Désignons, pour plus de netteté, par $y_1 \ldots y_n$, les coordonnées d'un point quelconque; cela revient à poser, par exemple,

$$(53) \qquad x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m, z_1 = y_{m+1}, \ldots, z_q = y_n.$$

La multiplicité M peut être représentée aussi par des équations

$$(54) \qquad y_k = f_k(t_1, \ldots, t_m), \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

où $t_1, \ldots, t_m$ sont des variables nouvelles, que nous supposerons n'être pas transformées par le groupe (G); et nous représenterons les dérivées des y_k par rapport aux t_h par la notation

$$y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)} = \frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_m} y_k}{\partial t_1^{\beta_1} \ldots \partial t_m^{\beta_m}}.$$

Nous allons chercher à répartir les solutions M de (A) en familles de multiplicités homologues les unes des autres par rapport aux diverses transformations de (G). Une telle famille de multiplicités M, supposées définies par des équations de la forme (54), est donnée, dans le cas général, comme on l'a vu au chapitre précédent, par un système automorphe

$$(55) \qquad U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots) = \theta_s(t_1, \ldots, t_m). \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

Les premiers membres de ces équations (54) sont entièrement connus, car ils se déduisent des équations de définition des transformations finies du groupe (G), équations qui se déduisent elles-mêmes sans peine des équations (A) données; les seconds membres seuls dépendent du système particulier de multiplicités M défini par les équations (55). Ce sont donc ces fonctions θ_s que nous allons prendre pour inconnues auxiliaires.

Elles satisfont d'abord aux conditions d'intégrabilité du système (55). Soit

$$(56) \qquad \Psi_j\left(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \frac{\partial \theta_s}{\partial t_k}, \ldots\right) = 0, \qquad (j=1,2,\ldots,\rho)$$

ces conditions d'intégrabilité. A ces équations se joindront celles qui proviendront des équations (A) données.

Pour les former, nous nous servons de ce que, dans le cas général, ces équations (A) sont des relations entre des invariants différentiels de (G). Soit donc

$$J(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) \tag{57}$$

un tel invariant différentiel. Imaginons qu'on y fasse le changement de variables défini par les équations (53) et (54): il prendra la forme, entièrement explicite,

$$J(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) = \bar{J}(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots); \tag{58}$$

et, si on suppose ensuite qu'on y remplace $y_1, \ldots, y_n$ par une solution du système (55), cette fonction $\bar{J}$ deviendra une fonction $\eta(t_1, \ldots, t_m)$ bien déterminée. Or $\bar{J}$ est un invariant de (G), dans les mêmes conditions que les U_s; de sorte que l'équation

$$\bar{J}(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots) = \eta(t_1, \ldots, t_m). \tag{59}$$

admet non seulement la solution M de (55) considérée, mais toutes celles qui s'en déduisent par les transformations de (G), c.-à-d. toutes les solutions du système (55).

Cette équation (59) est donc une conséquence algébrique des équations (55) et de celles qui s'en déduisent par différentiations (si J est d'ordre supérieur aux U_s). Donc, en se servant du théorème général d'algèbre qui nous a déjà servi dans un autre travail,[1] on voit que η se calculera rationnellement en fonction des θ_s et de leurs dérivées, sans avoir à connaître les expressions de ces fonctions; c.-à.d. qu'on obtiendra, dans les conditions supposées, une identité

$$J(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) = H(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots), \tag{60}$$

où on pose, pour abréger,

$$\theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)} = \frac{\partial^{\gamma_1 + \cdots + \gamma_m} \theta_s}{\partial t_1^{\gamma_1} \ldots \partial t_m^{\gamma_m}}.$$

[1] *Sur la théorie de Galois et des diverses généralisations.* N° 5. Annales de l'École normale, 1904.

En faisant ce calcul pour les divers invariants $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$ qui figurent dans les équations (A), on obtiendra donc des fonctions équivalentes $H_1, H_2, \ldots, H_\mu$; et les équations (A) seront transformées, par là-même, en un système (B) de relations entre $H_1, H_2, \ldots, H_\mu$. Les équations de ce système, jointes aux conditions d'intégrabilité (56), constituent le système résolvant (C) que nous nous proposions d'obtenir.

15. Étudions ce système résolvant (C). Il présente, tel que nous l'avons formé, cet inconvénient, qu'une même famille de multiplicités M homologues sera donnée par une infinité de solutions du système (C). Cherchons, en effet, la condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes (55) définissent la même famille de multiplicités M; écrivons, pour plus de netteté, le second de ces systèmes

$$U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots) = \theta_s'(t_1', \ldots, t_m'), \qquad (s=1,2,\ldots,p) \tag{61}$$

en changeant le nom des variables indépendantes. Les équations (54) étant celles d'une solution de (55); il devra y avoir une solution

$$y_k = f_k'(t_1', \ldots, t_m'), \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{62}$$

de (61), qui représente la même multiplicité M; et cela suffira, puisque les autres multiplicités intégrales de (55), ou de (61), se déduisent de celle-là par les transformations de (G). Or la condition d'identité des multiplicités (54) et (62) est qu'il existe une transformation

$$t_i' = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m), \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{63}$$

qui change les fonctions (62) dans les fonctions (54), respectivement. Mais cette même transformation change alors toute homologue de (62) en une homologue de (54), puisque les transformations de (G) ne portent que sur $y_1, \ldots, y_n$ et non sur les paramètres t; de sorte que la condition cherchée est qu'il existe une transformation (63) par laquelle le système (61) devienne le système (55).

Ce premier point acquis, raisonnons comme au n° 7 de notre mémoire sur la théorie des groupes.[1] Les fonctions U_s sont des intégrales d'un

[1] *Sur la théorie des groupes continus.* Annales de l'École normale, 1903.

système complet, dont les équations ont pour premiers membres les prolongements de certaines transformations infinitésimales de la forme

(64)
$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_k}.$$

Ce système complet admet par conséquent toute transformation infinitésimale de la forme

(65)
$$\sum_{i=1}^{m} \vartheta_i(t_1, \ldots, t_m) \frac{\partial f}{\partial t_m},$$

prolongée dans les mêmes conditions; puisque le crochet des transformations (64) et (65) est évidemment nul. Ce qui revient à dire que le système complet considéré admet toute transformation de la forme (63). Donc, par cette transformation, en posant, pour abréger l'écriture,

$$U'_s = U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots), \qquad (s=1, 2, \ldots, p)$$

on aura des identités de la forme

$$U'_s = P_s(U_1, \ldots, U_p \mid \ldots, \varphi_i^{(\delta_1 \ldots \delta_m)}, \ldots); \qquad (s=1, 2, \ldots, p)$$

où, suivant nos notations,

$$\varphi_i^{(\delta_1 \ldots \delta_m)} = \frac{\partial^{\delta_1 + \ldots + \delta_m} \varphi_i}{\partial t_1^{\delta_1} \ldots \partial t_m^{\delta_m}}.$$

La condition pour que les systèmes (55) et (61) définissent la même famille de multiplicités M homologues est donc que les fonctions θ'_s soient liées aux fonctions θ_s par les relations

(66)
$$\theta'_s = P_s(\theta_1, \ldots, \theta_p \mid \ldots, \varphi_i^{(\delta_1 \ldots \delta_m)}, \ldots), \qquad (s=1, 2, \ldots, p)$$

associées aux relations (63); les φ_i étant des fonctions quelconques. Les équations [(63), (66)] définissent un groupe infini, isomorphe au groupe ponctuel général à m variables: on connait l'importance de tels groupes dans la théorie générale des groupes de transformations.[1]

[1] Voir, par exemple, le mémoire cité N° 7, où on trouvera les indications bibliographiques sur ce sujet.

Le système (C) est donc un système invariant par ce groupe infini [(63), (66)]; et une même famille de multiplicités M homologues est donnée par les diverses multiplicités θ

$$\theta_s = g_s(t_1, \ldots, t_m), \qquad (s=1,2,\ldots,p) \tag{67}$$

qui sont elles-mêmes homologues par rapport à ce groupe [(63), (66)].

16. Nous allons essayer de ne prendre qu'une seule multiplicité θ dans chacune des familles de multiplicités θ homologues, données par le système (C). Si nous réussissons, la répartition des multiplicités M en familles de multiplicités homologues sera obtenue.

Considérons une multiplicité M, représentée par les équations (54). Par le moyen de ces équations (54), tout invariant J de (G) devient une fonction $\eta(t_1, \ldots, t_m)$, et l'identité (60) lui fait correspondre une équation

$$H(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots) = \eta(t_1, \ldots, t_m), \tag{68}$$

à laquelle conduiraient aussi, comme nous l'avons vu, toutes les multiplicités homologues de M. Du reste H, provenant de l'invariant J, qui est indépendant du choix des paramètres t, est un invariant du groupe [(63), (66)]. Si donc on fait un changement de paramètres t, la relation (68) se transformera en celle qu'on obtient en faisant simplement ce changement de paramètres dans la fonction η.

Si donc l'invariant J n'est pas une constante (en vertu des équations (A)), on peut choisir les paramètres de manière que le second membre de (68) soit une fonction arbitraire de $t_1, \ldots, t_m$. Et, plus généralement, si on peut trouver λ invariants $J_1, J_2, \ldots, J_\lambda$, qui ne soient liés par aucune relation (en vertu des équations (A)), on pourra supposer les paramètres tellement choisis que les fonctions $H_1, H_2, \ldots, H_\lambda$, équivalentes à ces invariants par le calcul du N° 14, soient égales à λ fonctions arbitraires, indépendantes, de $t_1, \ldots, t_m$.

Le cas le plus avantageux est celui où $\lambda = m$. On pourra alors associer au système (C), en vertu du raisonnement précédent, les équations nouvelles

$$H_i(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots) = t_i; \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{69}$$

et, comme leurs premiers membres sont invariants par le groupe [(63), (66)], il est visible qu'elles n'en admettent plus aucune transformation.

Donc deux solutions du système résolvant [(C), (69)] donneront toujours des systèmes automorphes (55) fournissant deux familles, différentes de multiplicités M homologues. La séparation de ces familles de multiplicités est ainsi obtenue. On pourrait, naturellement, remplacer les seconds membres des équations (69) par m fonctions indépendantes quelconques de $t_1, \ldots, t_m$: cela serait sans influence sur la nature des intégrations.

Le système [(C), (69)] n'offre plus rien maintenant de particulier si ce n'est de contenir les conditions d'intégrabilité du système (55) et les équations (69).

Dans le cas où λ est inférieur à m, on ne pourra écrire que $\lambda < m$ équations de la forme (69); et la méthode n'est plus aussi avantageuse. Mais on prévoit, par ce qui s'est présenté dans les exemples précédents, qu'il se produira, dans ce cas, d'autres simplifications pour lesquelles il paraît difficile de donner des règles générales et précises. On devra chercher des équations différentielles auxiliaires nouvelles en $t_1, \ldots, t_m, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots,$ qui achèvent de déterminer le choix des paramètres, pour chaque multiplicité M; de manière à réduire au minimum le degré d'indétermination du système résolvant, comme nous pouvions le faire d'emblée dans le cas $\lambda = m$.

17. Nous concluons, *en résumé,* que notre méthode fournit, au moins dans le cas général, la réduction de l'intégration du système (A) aux *deux problèmes suivants successifs.*

1°) *intégration du système résolvant* [(C), (69)]. Comme il définit les familles de multiplicités M homologues, la difficulté de l'intégration de ce système peut être quelconque, (A) étant l'un quelconque des systèmes différentiels de l'espèce considérée.

2°) *intégration du système automorphe* (55). Nous avons rappelé au chapitre précédent, les diverses réductions possibles, pour de tels systèmes.

Remarquons que nous avons écarté le cas où le système (A) contiendrait des équations invariantes, qui ne seraient pas des relations entre invariants; il est visible que, dans ce qu'elle a d'essentiel, la marche générale indiquée s'appliquerait encore à de pareils systèmes. Il n'y a, en réalité, de changé que la forme du système automorphe à introduire.

18. Les calculs, nécessaires pour former le système résolvant (C), seront simplifiés, comme on l'a vu dans les exemples traités, par la recherche générale des invariants équivalents du groupe (G) et du groupe [(63), (66)]. La méthode à suivre sera la suivante:

Nous partons des équations (55), et nous leur adjoignons les relations identiques, fournies par les règles du calcul différentiel, entre les dérivées des z par rapport aux x et les dérivées des y par rapport aux t: ces relations devant être prises jusqu'à l'ordre maximum des dérivées figurant dans les équations (35). Soit (Δ) ce système de relations. Si entre les équations (55) et les équations (Δ) on peut éliminer toutes les dérivées par rapport à t, les équations résultant de cette élimination seront séparément invariantes par rapport au groupe (G) et au groupe [(63), (66)]; elles seront donc des relations entre certains invariants de ces deux groupes. Comme, du reste, on ne doit pouvoir en tirer aucune relation, non identique, entre des invariants d'un seul de ces groupes, elles pourront se mettre sous la forme

$$(70)\quad J_h(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(a_1 \ldots a_m)}, \ldots) = H_h(\theta_1, \ldots, \theta_p); \quad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\sigma)}$$

où les premiers et les seconds membres sont des invariants des deux groupes considérées, respectivement.

Si l'on faisait les mêmes calculs, en adjoignant aux équations (35) celles qui en résultent par différentiation jusqu'à un ordre quelconque, ce qui précède subsisterait, sauf qu'on pourrait, en plus de relations de la forme (70), trouver des relations où ne figureraient que des invariants du groupe [(63), (66)] (et qui appartiendraient aux conditions d'intégrabilité du système (35)); et même des relations, qui seraient des équations invariantes pour ce groupe (et qui seraient encore des conditions d'intégrabilité).

Il résulte des raisonnements faits au n° 14 que l'on obtiendra par cette voie tous les invariants du groupe (G), avec leur expression équivalente en invariants du groupe [(63), (66)].

On trouvera aussi tous les invariants de ce dernier groupe; car, quand on transforme un tel invariant, en y remplaçant les θ_s par les valeurs (35), on obtient un invariant de (G), qui ne dépend pas du choix des t, c.-à-d. qui est une fonction de $x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(a_1 \ldots a_m)}, \ldots$), à moins qu'il se réduise à une constante. Dans le premier cas, l'invariant considéré, étant

l'équivalent d'un invariant de (G), de la forme considérée, s'obtient, d'après ce qui précède, par le calcul indiqué. Dans le second cas, on a obtenu une condition d'intégrabilité du système (35), et le calcul indiqué doit encore la fournir.

19. On pourra aussi simplifier les calculs par l'emploi de paramètres différentiels.

Soit λ l'ordre minimum jusqu'auquel il faille différentier les équations (35) pour obtenir effectivement des relations de la forme (70). Et soit

$$J(x_1, \ldots, z_1, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) = H(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots)$$

l'une quelconque de ces relations, de l'ordre λ, ou d'un ordre supérieur: c'est toujours une conséquence des équations (35) différentiées et des équations (Δ), poussées jusqu'à l'ordre nécessaire. Et il en est de même des relations qu'on en déduit par différentiation

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{dJ}{dx_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_k} = \frac{dH}{dt_k}. \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

Jointes aux équations (Δ), et (35), différentiées jusqu'à l'ordre λ, ces relations fourniront, en plus de formules d'équivalence des invariants d'ordre λ, m relations de la forme

$$(71) \qquad \Omega_l\left(x_1, \ldots, z_1, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots, \frac{dJ}{dx_1}, \ldots, \frac{dJ}{dx_m}\right)$$
$$= A_l\left(\theta_1, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots, \frac{dH}{dt_1}, \ldots, \frac{dH}{dt_m}\right), \qquad (l=1,2,\ldots,m)$$

qui donneront, sous leur double forme équivalente, les paramètres différentiels annoncés.

SUR UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME CLASSIQUE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

E. PHRAGMÉN

A STOCKHOLM.

On sait le rôle fondamental que joue, dans la théorie élémentaire des fonctions analytiques, le théorème qui dit qu'une fonction entière est nécessairement une constante, si, en valeur absolue, elle reste partout inférieure à une quantité donnée.

En me servant des propriétés de l'expression analytique bien connue indiquée par LAPLACE et ABEL, et appliquée avec tant de succès par M. POINCARÉ et M. BOREL à l'étude de plusieurs problèmes difficiles, je suis arrivé à une extension assez remarquable de ce théorème.

Pour faciliter l'exposé de mon résultat je démontrerai successivement six théorèmes. Le premier de ces théorèmes s'énonce ainsi:

Théorème I. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|x|^k}$ *pour les points x situés à l'intérieur d'un certain angle, l'exposant k et le grandeur α de l'angle étant assujettis à la condition $k\alpha < \pi$;*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour tous les autres points x* (C_1 et C_2 désignant deux constantes).

Cette fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

Pour la démonstration nous pourrons supposer que l'angle considéré ait son sommet à l'origine et qu'il soit orienté de manière que l'axe réel

des x coïncide avec sa bissectrice. Choisissons alors $k_1 > k$ mais tel qu'on ait encore

$$k_1\alpha < \pi;$$

et considérons l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty F\left(a^{\frac{1}{k_1}}x\right)e^{-a}da, \tag{1}$$

l'axe réel positif étant pris pour chemin d'intégration.

La convergence de cette intégrale étant meilleure que celle de l'intégrale

$$C_1 \int_0^\infty \left|e^{-\left[a-a^{\frac{k}{k_1}}\cdot|x|^k\right]}da\right|, \tag{2}$$

ou de l'intégrale

$$C_2\int_0^\infty |e^{-a}da|, \tag{3}$$

il est évident que notre intégrale converge uniformément dans tout domaine fini et que, par conséquent, elle représente une fonction entière de x.

Or, on démontre aisément que cette fonction entière reste partout inférieure, en valeur absolue, à une certaine constante.

Remarquons, en effet, qu'on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, choisir pour chemin d'intégration au lieu de l'axe réel positif, une demi-droite infinie quelconque issue de l'origine et faisant avec l'axe positif un angle aigu. En effet, cela se démontre immédiatement en comparant avec les intégrales (2) et (3).

En posant maintenant

$$x = re^{\varphi i}, \qquad a = \rho e^{\theta i}$$

on aura

$$a^{\frac{1}{k_1}}x = r\rho^{\frac{1}{k_1}}e^{\left(\varphi+\frac{\theta}{k_1}\right)i},$$

et on pourra aisément choisir θ de manière que $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ et que, en même temps, $\varphi + \frac{\theta}{k_1}$ soit, en valeur absolue, supérieur ou égal à $\frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire

de manière que le point $a^{\frac{1}{k_1}}x$ ne soit pas situé à l'intérieur de l'angle donné. En effet, si

$$\frac{\alpha}{2} \leqq |\varphi| \leqq \pi,$$

on fera $\theta = 0$, et si $|\varphi| < \frac{\alpha}{2}$ on choisira θ de même signe que φ et tel que $|\theta| = k_1\left(\frac{\alpha}{2} - |\varphi|\right)$. On aura alors

$$\left|F\left(a^{\frac{1}{k_1}}x\right)\right| < C_2$$

et par conséquent

$$|\Phi(x)| < C_2 \int_0^{\infty} |e^{-a}da| \leqq \frac{C_2}{\cos\frac{k_1\alpha}{2}}.$$

La fonction $\Phi(x)$ sera donc nécessairement une constante.

Or, on en conclut immédiatement que la fonction $F(x)$ est elle-même une constante.

En effet, puisque l'intégrale (1) converge uniformément en tout domaine fini, on sait que, en écrivant

$$F(x) = \sum_\lambda F_\lambda x^\lambda$$

et en faisant

$$\Phi_\lambda = F_\lambda \int_0^{\infty} a^{\frac{\lambda}{k_1}} e^{-a}da,$$

on a

$$\Phi(x) = \sum_\lambda \Phi_\lambda x^\lambda.$$

Or, puisque nous avons démontré que $\Phi_\lambda = 0$ pour $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ il s'ensuit $F_\lambda = 0$ pour $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$; et par suite

$$F(x) = F_0 = \Phi_0.$$

c. q. f. d.

Pour mieux apprécier la portée du théorème que nous venons de démontrer, il se recommande de le transformer dans le théorème suivant:

Théorème II. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|x|^k}$ *pour tous les points x appartenant à un certain angle A de grandeur α, l'exposant k satisfaisant à la condition $k\alpha < \pi$.*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour tous les points x appartenant à l'un ou l'autre de deux angles B_1 et B_2 contigus de côté et d'autre à l'angle A,*

(C_1 et C_2 désignant deux constantes).

Cela posé, on aura nécessairement, tant que x reste compris dans l'angle A

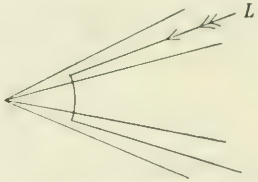
$$\lim_{|x|=\infty} \frac{F(x)}{(\log x)^\beta} = 0,$$

l'exposant β étant choisi supérieur à l'unité. Cette expression convergera uniformément vers sa valeur limite.

Pour démontrer ce nouveau théorème il suffira d'étudier l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^\beta}. \tag{4}$$

Nous formerons le chemin d'intégration des parties infinies de deux demi-droites issues du sommet des angles A, B_1, B_2 — nous supposerons que ce soit l'origine — et comprises dans l'intérieur des angles B_1 et B_2 respectivement, et d'une partie de circonférence les reunissant.



Il est clair que cette intégrale converge quel que soit x pourvu seulement que x ne soit pas situé sur le chemin d'intégration. Il est clair aussi que la valeur de notre intégrale ne varie pas si on change le chemin d'intégration, pourvu que ce chemin reste conforme aux indications données ci-dessus, et que le point x reste toujours du même côté du chemin d'intégration.

Notre intégrale définit donc deux fonctions analytiques, soit $F_1(x)$ et $F_2(x)$, selon que x est situé du même côté que l'origine ou de l'autre côté par rapport au chemin d'intégration L.

On a donc, pour x situé à l'intérieur de l'angle formé par la réunion des trois angles A, B_1, B_2,

$$F_1(x) = \int_{L_1} \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^3},$$

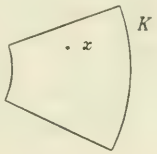
$$F_2(x) = \int_{L_2} \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^3}$$

si l'arc de circonférence qui entre dans le chemin L_1 a un rayon supérieur à $|x|$ et celui qui entre dans L_2 un rayon inférieur à $|x|$.

Il s'ensuit, si x appartient à l'intérieur de l'angle $(B_1 + A + B_2)$

$$F_2(x) - F_1(x) = \int_K \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^3}$$

K étant le chemin d'intégration indiqué dans la figure



c'est-à-dire

$$F_2(x) - F_1(x) = \frac{F(x)}{(\log x)^3}. \tag{5}$$

La fonction $F_1(x)$ est régulière dans tout domaine fini. C'est donc une fonction entière.

Or, cette fonction satisfait aux conditions posées dans le théorème I, si l'angle nommé dans ce théorème est formé de deux demi-droites situées dans les angles B_1 et B_2 respectivement, et choisies de manière que l'angle α_1 inclus par elles satisfasse à la condition

$$k\alpha_1 < \pi.$$

On a évidemment, en effet,

$$\lim_{|x|=\infty} F_1(x) = 0, \tag{6}$$

tant que x reste extérieur à cet angle ou même à un angle un peu moindre, et

$$\lim_{|x|=\infty} F_2(x) = 0 \tag{7}$$

tant que $|x|$ reste intérieur au même angle ou même à un angle un peu plus grand. Cette dernière propriété, combinée avec la formule (5), montre que la fonction $F_1(x)$ possède la propriété exigée sous 1° du théorème I.

On a donc, en appliquant ce théorème,

$$F_1(x) = \text{const.}$$

ou bien, en vertu de (6)

$$F_1(x) = 0,$$

ce qui donne, d'après (5),

$$\frac{F(x)}{\log x^{\beta}} = F_2(x),$$

identité qui persiste dans l'angle $(B_1 + A + B_2)$ et qui, en vertu de la formule (7), contient le résultat que nous voulions démontrer.

Nous ajouterons encore le théorème suivant qui constitue une généralisation du théorème I.

Théorème III. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_\lambda e^{|x|^{k_\lambda}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *quand x reste compris dans un certain angle A_λ de grandeur α_λ, les quantités k_λ et α_λ étant assujetties aux inégalités*

$$k_\lambda \alpha_\lambda < \pi,$$

2° $|F(x)| < \overline{C}$ *quand x reste extérieur à tous les angles A_λ.*

Parmi les angles A_λ il n'y a pas deux qui soient contigus. C_λ et $\overline{C}$ désignent des constantes.

Cela posé, la fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

En effet, d'après le second théorème, on conclut qu'on a, sans restriction,

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{F(x)}{(\log x)^3} = 0$$

et cela uniformément dans toutes les directions. On en conclut aisément que

$$F(x) = \text{const.}$$

Les fonctions

$$E_\alpha(x) = \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\nu\right)}$$

étudiées par M. Mittag-Leffler, nous donnent l'exemple de fonctions qui restent finies à l'extérieur d'un angle de grandeur α, et qui, dans cet angle, deviennent infinies comme

$$\frac{\pi}{\alpha} e^{x^{\frac{\pi}{\alpha}}}.$$

Par conséquent, nous ne pouvons pas, dans nos théorèmes, échanger la condition

$$k\alpha < \pi$$

contre cette autre condition

$$k\alpha \leqq \pi.$$

D'un autre côté on peut dire que nos théorèmes font ressortir les fonctions $E_\alpha(x)$ de M. Mittag-Leffler comme les fonctions les plus simples de leur espèce, en ce sens que, parmi les fonctions devenant infinies seulement dans un angle de grandeur α, il n'y en a pas dont l'ordre de croissance soit essentiellement inférieur à celui de $E_\alpha(x)$.

On peut démontrer des théorèmes analogues aux précédents, se rattachant à d'autres classes de fonctions étudiées par M. Mittag-Leffler, et dont je dois la connaissance à une communication personelle de l'auteur.

La fonction entière

[illegible]

ne devient infini pour x infini que lorsque la partie réelle de x est positive et la partie imaginaire de x comprise entre

$$2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2},$$

λ étant un nombre entier quelconque. Or, il est facile de former une nouvelle fonction qui devient infinie de la même manière que cette fonction, mais seulement lorsque la partie imaginaire de x est comprise entre

$$-\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad +\frac{\pi}{2},$$

la partie réelle étant positive. Il suffit de former l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{e^z}dz}{z-x}$$

le chemin d'intégration étant composé de deux droites parallèles à l'axe des x, infinies dans le sens positif de cet axe et situées de côté à d'autre de lui à une distance intermédiaire entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Ces deux droites sont réunies à l'aide d'une droite orthogonale à l'axe réel, comme l'indique la figure.

Cette intégrale représente deux fonctions analytiques différentes, soit $\mathcal{E}_1(x)$ et $\mathcal{E}_2(x)$, selon que le point x est situé du même côté par rapport au contour d'intégration que les points réels négatifs infiniment distants, ou du côté opposé. D'ailleurs le chemin d'intégration peut être choisi arbitrairement dans les limites indiquées sans que la valeur de l'intégrale soit changée. Il s'ensuit immédiatement que la fonction $\mathcal{E}_1(x)$ est une fonction entière, et que les deux fonctions sont réunies par l'identité

$$\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x) = e^{e^x}.$$

La fonction $\mathcal{E}_2(x)$ est par conséquent, elle aussi, une fonction entière.

Tant que la partie réelle de x reste positive et la partie imaginaire comprise entre deux limites choisies arbitrairement entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$, on conclut de la représentation

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{e^{e^z}}{z-x}\,dz$$

que

$$\lim_{x=\infty} \mathcal{E}_2(x) = 0. \tag{8}$$

De même on a

$$\lim_{x=\infty} \mathcal{E}_1(x) = 0 \tag{9}$$

quand la partie réelle de x est positive ou nulle, ou quand, cette partie réelle étant négative, la partie imaginaire reste extérieure à deux limites choisies arbitrairement de manière à embrasser l'intervalle de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

La manière dont se comporte la fonction $\mathcal{E}_1(x)$ à l'infini est complètement caractérisée par les deux formules (8) et (9), si on se rappelle que

$$\mathcal{E}_1(x) = e^{e^x} + \mathcal{E}_2(x).$$

Passons maintenant aux théorèmes analogues aux théorèmes précédents qui se rattachent à cette fonction.

Théorème IV. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|e^{kx}|}$ *tant que la partie réelle de x reste positive et la partie imaginaire comprise entre deux parallèles à l'axe réel dont la distance mutuelle est α, k et α remplissant la condition $k\alpha < \pi$,*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour toutes les autres valeurs de x.*

(C_1 et C_2 désignant deux constantes.)

Cette fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

Choisissons en effet $k_1 > k$ mais de manière qu'on ait encore

$$k_1\alpha < \pi,$$

et formons l'intégrale

$$(10) \qquad \int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log a + \xi\right)e^{-a}\,da.$$

La convergence de cette intégrale étant comparable à celle de l'une ou l'autre des deux intégrales

$$C_1 \int_0^\infty \left| e^{a^{\frac{\lambda}{k_1}} e^{\lambda\xi}} e^{-a}\,da \right|$$

ou

$$C_2 \int_0^\infty \left| e^{-a}\,da \right|$$

on s'assure immédiatement, 1° que l'intégrale converge uniformément quand ξ reste compris dans un domaine fini quelconque, le chemin d'intégration étant une demi-droite issue de l'origine et faisant avec l'axe réel un angle aigu, et 2° que la valeur de l'intégrale est la même indépendamment de la manière dont on choisit le chemin d'intégration dans les limites indiquées.

Il s'ensuit que l'intégrale (10) représente une fonction entière de ξ. Mais il s'ensuit aussi que cette fonction est une constante, car on démontre facilement, en choisissant le chemin d'intégration de manière que $\frac{1}{k_1}\log a + \xi$ appartient au domaine où la fonction $F(x)$ reste inférieure à C_2 en valeur absolue, qu'elle reste partout finie.

Pour conclure que la fonction $F(x)$ est elle aussi une constante, il faut connaître un théorème qui vient d'être démontré par M. Lerch au tome 27 de ce journal.[1] Indépendamment de M. Lerch, j'ai démontré moi-même le même théorème dans une conférence faite à l'université de Stockholm, il y a quelques années.

Voici l'énoncé de ce théorème:

Si l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^\infty f(a)e^{-ax}\,da$$

[1] *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel.*

converge pour $x \geq x_0$ (x_0 étant réel), *et si on a*

$$\varphi(x_0 + \nu c) = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

c désignant une constante positive, on aura nécessairement

$$f(a) = 0$$

pour toutes les valeurs positives de a.

Je donnerai ici ma propre démonstration qui consiste dans une simple application du facteur de discontinuité employé par M. VON KOCH dans ses recherches sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée (ce journal, t. 24, p. 159).

Si on fait

$$F(a) = \int_0^a f(a) e^{-ax_0} da$$

on sait, d'après l'hypothèse, que $F(a)$ reste inférieur en valeur absolue à une certaine constante C. D'ailleurs on a

$$\varphi(x_0 + t) = \int_0^\infty F'(a) e^{-at} da$$

$$= t \int_0^\infty F(a) e^{-at} da.$$

En posant

$$\psi(t) = \int_0^\infty F(a) e^{-at} da$$

on aura donc

$$\psi(t) = \frac{\varphi(x_0 + t)}{t}$$

et par suite, en vertu de l'hypothèse,

$$\psi(\nu c) = 0. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Soit maintenant α une quantité positive ou nulle et considérons la série infinie

$$\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{1}{\underline{|2}}\psi(2t)e^{2\alpha t} + \frac{1}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \ldots .$$

Cette série converge absolument pour les valeurs positives de t, et uniformément pour toutes les valeurs de t supérieures à une limite positive quelconque.

On a, en effet,

$$\left|\frac{1}{\underline{|\lambda}}\psi(\lambda t)e^{\lambda\alpha t}\right| \leqq \int_0^\infty |F(a)|e^{-a\lambda t}da\frac{e^{\lambda\alpha t}}{\underline{|\lambda}}$$

$$\leqq \frac{C}{\lambda t}\frac{e^{\lambda\alpha t}}{\underline{|\lambda}} .$$

Il s'ensuit qu'on peut écrire

$$\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{1}{\underline{|2}}\psi(2t)^{2\alpha t} + \frac{1}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \ldots$$

$$= \int_0^\infty F(a)\left[e^{(\alpha-a)t} - \frac{1}{\underline{|2}}e^{2(\alpha-a)t} + \frac{1}{\underline{|3}}e^{3(\alpha-a)t} - \ldots\right]da$$

ou encore

$$\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{1}{\underline{|2}}\psi(2t)e^{2\alpha t} + \frac{1}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \ldots = \int_0^\infty F(a)[1 - e^{-e^{(\alpha-a)t}}]da.$$

On en tire aisément

$$(11) \qquad \lim_{t=\infty}\left\{\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{1}{\underline{|2}}\psi(2t)e^{2\alpha t} + \frac{1}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \ldots\right\} = \int_0^\alpha F(a)da.$$

En effet, on voit immédiatement que

$$\lim_{t=\infty}\int_0^\infty F(a)[1 - e^{-e^{(\alpha-a)t}}]da = \int_0^\alpha F(a)da;$$

et puisque

$$\left|\int_0^{\infty} F(a)\left[1 - e^{-e^{(\alpha-a)t}}\right]da\right| < C\int_0^{\infty}\left(1 - e^{-e^{(\alpha-a)t}}da\right)$$

$$= C\int_0^{\infty}\left(1 - e^{-e^{(\alpha-a)t}}\right)da$$

$$= \frac{C}{t}\int_0^{\infty}\left(1 - e^{-e^{\dots}}\right)da$$

$$\left(< \frac{C}{t}\right)$$

on a encore

$$\lim_{t=\infty}\int_0^{\infty} F(a)\left[1 - e^{-e^{(\alpha-a)t}}\right]da = 0.$$

Faisons maintenant

$$t = \nu c$$

on aura d'après l'hypothèse

$$\phi(t)e^{\alpha t} - \frac{1}{\underline{|2}}\phi(2t)e^{2\alpha t} + \ldots = 0;$$

en effet chaque terme sera nul.

Il s'ensuit donc de la formule (11) que l'on a

$$\int_0^{\alpha} F(a)da = 0$$

indépendamment de la valeur, supposée positive, de α.

On a donc nécessairement aussi

$$F(a) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{a} f(a)e^{-ax}\,da = 0$$

pour toutes les valeurs positives de a, et enfin

$$f(a) = 0$$

pour les mêmes valeurs.

Pour appliquer ce résultat à la question qui nous occupe, faisons dans la formule

$$\int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log a + \xi\right)e^{-a}\,da = \text{const.}$$

$\xi = \frac{1}{k_1}\log\frac{1}{x}$. On aura, en désignant la constante par C,

$$\int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log\frac{a}{x}\right)e^{-a}\,da = C$$

ou encore, pour x positif,

$$\int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log a\right)e^{-ax}\,da = \frac{C}{x},$$

formule qui peut s'écrire

$$\int_0^\infty \left(F\left(\frac{1}{k_1}\log a\right) - C\right)e^{-ax}\,da = 0.$$

Il s'ensuit, en vertu du théorème de M. Lerch, que

$$F\left(\frac{1}{k_1}\log a\right) = C$$

pour les valeurs positives de a. Or, $F(x)$ est une fonction entière; on a donc identiquement

$$F(x) = C. \qquad\qquad \text{c. q. f. d.}$$

En partant du théorème que nous venons de démontrer, on arrive facilement au théorème suivant.

Théorème V. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{k|x|}$ *tant que la partie réelle de x reste positive et sa partie imaginaire comprise entre $-\frac{\alpha}{2}$ et $+\frac{\alpha}{2}$, k et α remplissant l'inégalité*

$$k\alpha < \pi;$$

2° $|F(x)| < C_2$ *tant que la partie réelle de x reste positive et sa partie imaginaire comprise soit entre* $-\frac{a}{2} - \delta$ *et* $-\frac{a}{2}$ *soit entre* $\frac{a}{2}$ *et* $\frac{a}{2} + \delta$, δ *désignant une quantité positive arbitrairement donnée.*

(C_1 *et* C_2 *désignant deux constantes.*)

Cette fonction $F(x)$ *satisfera, pour toutes les valeurs de x indiquées sous* 1°, *à la condition*

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{x(\log x)^\beta} = 0$$

et cette expression tendra vers sa limite uniformément pour toutes les valeurs en question (β désigne une quantité réelle supérieure à l'unité).

Ce théorème se démontre à l'aide de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(z)}{z-x}\,\frac{dz}{z(\log z)^\beta},$$

le chemin d'intégration étant composée de deux droites parallèles à l'axe réel, infinies dans le sens positif et situées de côté et d'autre de cet axe à une distance intermédiaire entre $\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2} + \delta$, et d'une droite orthogonale à l'axe réel joignant ces deux droites.

Cette intégrale définira deux fonctions analytiques différentes $F_1(x)$ et $F_2(x)$, dont l'une $F_1(x)$ est une fonction entière et l'autre est liée à cette fonction par l'identité

$$F_2(x) - F_1(x) = \frac{F(x)}{x(\log x)^\beta}.$$

On démontre comme plus haut que

$$F_1(x) = 0$$

de sorte qu'on a identiquement

$$\frac{F(x)}{x(\log x)^\beta} = F_2(x)$$

et on conclut de là que

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{x(\log x)^\beta} = 0$$

pour toutes les valeurs de x dont la partie réelle est positive et la partie imaginaire comprise entre deux limites, comprises elles-mêmes entre $-\frac{\alpha}{2}-\delta$ et $\frac{\alpha}{2}+\delta$.

On peut résumer tous les résultats obtenus jusqu'ici dans le théorème suivant:

Théorème VI. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_\lambda e^{|x|^{k_\lambda}}$ *dans certains angles de grandeur* α_λ ($k_\lambda \alpha_\lambda$ étant $<\pi$)

2° $|F(x)| < \overline{C}_\nu e^{\left|e^{\overline{k}_\nu x}\right|}$ *dans certaines bandes limitées par deux droites parallèles et une droite qui les coupe, $\overline{k}_\nu$ étant choisi de manière que $\overline{k}_\nu x$ soit réel sur la droite médiane de la bande et la largeur de la bande $\overline{\alpha}_\nu$ satisfaisant à l'inégalité $|\overline{k}_\nu|\overline{\alpha}_\nu < \pi$.*

3° $|F(x)| < C$ *pour toutes les autres valeurs de x.*

C_λ, $\overline{C}_\nu$, C sont des constantes, et on suppose que parmi les angles et bandes considérés il n'y ait pas deux qui soient contigus.

Cela posé, la fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

La démonstration de ce théorème est intuitive.

Avant de finir nous avons encore une remarque à ajouter.

Tous les théorèmes que nous venons de démontrer sont susceptibles d'une généralisation assez importante, qu'il suffira de formuler par rapport au théorème I.

Théorème I a. *Soit $F(x)$ une fonction analytique uniforme et régulière à l'extérieur d'un cercle K donné. Supposons qu'on ne sache pas si cette fonction est régulière à l'infini ou non, mais qu'on connaisse chez elle les deux propriétés suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|x|^k}$ *pour les points x situés à l'extérieur de K et à l'intérieur d'un certain angle, l'exposant k et la grandeur α de l'angle étant assujettis à la condition $k\alpha < \pi$;*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour tous les autres points extérieurs à K* (C_1 et C_2 désignant deux constantes).

Cette fonction $F(x)$ sera nécessairement régulière à l'infini.

En effet, désignons par K' une circonférence extérieure à K, et considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K'} \frac{F(z)}{z-x}\,dz.$$

Cette intégrale représente deux fonctions analytiques différentes $F_1(x)$ et $F_2(x)$, selon que x est intérieur ou extérieur à K'. D'ailleurs la valeur de l'intégrale est indépendante de la manière dont on choisit K' pourvu que cette circonférence reste extérieure à K. On en conclut l'identité

$$F_1(x) - F_2(x) = F(x).$$

Or $F_1(x)$ est évidemment une fonction entière, et $F_2(x)$ est régulière à l'infini. Par conséquent $F_1(x)$ est une constante, en vertu du théorème I. La fonction $F(x)$ est donc bien, comme nous l'avons avancé, régulière à l'infini.

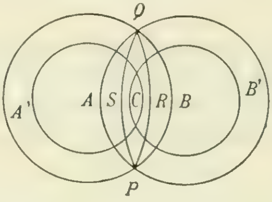
Ajoutons encore un mot sur le principe de démonstration employé tant de fois dans ce qui précède. Ce principe est au fond identique à celui qui a guidé M. Cousin dans ses recherches si remarquables sur les fonctions de plusieurs variables. Pour se convaincre plus facilement de cette identité il convient de transformer un peu l'exposition de cet auteur. Voici donc comment se présente, dans le cas le plus simple, son théorème fondamental dans notre méthode d'exposition.

Théorème de M. Cousin. *Soient A et B deux domaines continus possédant une partie commune C, constituant un seul domaine continu. Soient $\varphi(x)$ une fonction analytique définie à l'intérieur et sur le bord de A, et $\psi(x)$ une fonction analytique définie à l'intérieure et sur le bord de B. Supposons enfin que la différence $\varphi(x) - \psi(x)$ soit régulière à l'intérieur et sur le bord de C.*

Cela posé, il existe une fonction analytique $f(x)$ définie à l'intérieur et sur le bord du domaine formé par la réunion des deux domaines A et B, et telles que, à l'intérieur et sur le bord de A, la différence $f(x) - \varphi(x)$, et à l'intérieur et sur le bord de B, la différence $f(x) - \psi(x)$ sont des fonctions régulières.

En effet, soit A' un domaine renfermant le domaine A à son intérieur et choisi de manière que la fonction $\varphi(x)$ soit encore définie à l'intérieur

et sur le bord de A', et soit B' un domaine possédant la même propriété par rapport au domaine B et la fonction $\psi(x)$. Soient PRQ et QSP les deux contours suffisamment indiqués par la figure.



Posons

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{PRQ} \frac{\varphi(z) - \psi(z)}{z - x} dz,$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{QSP} \frac{\psi(z) - \varphi(z)}{z - x} dz.$$

La fonction $\varphi_1(x)$ est régulière à l'intérieur et sur le bord du domaine A. De même la fonction $\psi_1(x)$ est régulière à l'intérieur et sur le bord du domaine B. A l'intérieur et sur le bord de C on a, en vertu du théorème de Cauchy,

$$\varphi_1(x) - \psi_1(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = \psi(x) - \psi_1(x).$$

La fonction $\psi(x) - \psi_1(x)$ qui est définie à l'intérieur et sur le bord du domaine B est par conséquent la continuation analytique de la fonction $\varphi(x) - \varphi_1(x)$ qui est définie à l'intérieur et sur le bord du domaine A.

Nous avons donc réussi à définir une fonction qui satisfait à toutes les conditions voulues.

C'est de cette manière que je professe la belle théorie de M. Cousin, dans mes leçons à l'université de Stockholm, dès l'apparition de son travail. Certes, il n'y a pas, entre ce mode d'exposition et celui qu'à employé M. Cousin lui-même, de différence très profonde. Mais j'ai trouvé que, surtout pour l'enseignement, la méthode esquissée ci-dessus possède certains avantages.

ON THE REDUCTION OF A GROUP OF HOMOGENEOUS LINEAR SUBSTITUTIONS OF FINITE ORDER

BY

W. BURNSIDE
of GREENWICH.

Although the conception of a group does not occur explicitly in ABEL's published writings it is incontestible that, from the point of view of the present time, the idea underlies the whole of his wonderful investigations into the theory of algebraically soluble equations. More than one passage in these investigations suggests strongly that the idea was present in the writer's mind though it has not found direct expression in his mode of presenting his results. It will not then appear improper that a memoir dealing with some of the recent results obtained in the theory of groups of linear substitutions of finite order should appear in this volume which commemorates the great mathematician.

In the course of the last five or six years great advances have been made in this theory. The appearance of two memoirs by Herr FROBENIUS *Über Gruppencharactere* and *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante* (Berliner Sitzungsberichte, 1896, pp. 985—1021 and pp. 1343—1382), which have been followed by a series of others developing and extending the same ideas, marks a new departure of great importance in this connection. Later in date than Herr FROBENIUS, but independently as regards method, I have considered the theory of the factors of the group-determinant and the corresponding theory of the representation of a group of

finite order as an irreducible group of linear substitutions; basing my investigation on a certain continuous group which is completely defined by any given abstract group of finite order.[1]

So far as I am aware the only proof hitherto given of what is defined below as the »complete reducibility» of a reducible group of finite order of homogeneous linear substitutions, other than that due to Herr Frobenius, is contained in a memoir by Herr Maschke.[2] The number of distinct representations of a group of finite order as an irreducible group of homogeneous linear substitutions has hitherto been determined only by the processes, both of them indirect, of which Herr Frobenius and I have made use.

My principal object in the present memoir is to establish these two results by direct and comparatively simple methods, based on a repeated use of the theorem that, for every group of homogeneous linear substitutions of finite order, there is at least one invariant Hermitian form.

As the phraseology of the subject has not yet become uniform, I define here the sense in which certain phrases will be used.

A group of homogeneous linear substitutions is spoken of as reducible or irreducible according as it is or is not possible to find a set of linear functions of the variables, less in number than the variables, which are transformed among themselves by every operation of the group.

A reducible group of homogeneous linear substitutions is called »completely reducible» when it is possible to choose the variables in such a way that (I) they fall into sets, each set of variables being transformed among themselves by every operation of the group, while (II) the group in each separate set is irreducible. In this sense the first result to be proved is that a group of linear homogeneous substitutions of finite order is either irreducible or completely reducible.

[1] Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 29, pp. 207—224; pp. 546—565, (1898); Vol. 35, pp. 206—220, (1902).

[2] *Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind.* Math. Ann., Vol. 52, pp. 363—368, 1899.

Since this paper was written Herr Loewy in a memoir *Über die Reducibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen* (Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 4, pp. 44—64, 1903) has obtained a more general result of which the theorem in question is a particular case.

If

$$S_1, S_2, \ldots, S_N$$

are the operations of an abstract group G of finite order N; and

$$x'_i = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ijk} x_j, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N)$$

a set of linear homogeneous substitutions

$$s_1, s_2, \ldots, s_N;$$

such that if

$$S_p S_q = S_r,$$

then

$$s_p s_q = s_r,$$

for all sets of suffixes, the group of linear substitutions is said to give a »representation» of the abstract group G. The one-to-one correspondence of the operations of the group and the substitutions is an essential part of the representation. Thus a second representation in the same number of variables

$$y'_i = \sum_{j=1}^{j=n} \beta_{ijk} y_j, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N)$$

is spoken of as »distinct» or not distinct from the former according as it is not or is possible to find a linear substitution

$$y_i = \sum_{j=1}^{j=n} \gamma_{ij} x_j, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

which, *for each* k, will transform

$$x'_i = \sum_j \alpha_{ijk} x_j,$$

into $\qquad (i=1,2,\ldots,n)$

$$y'_i = \sum_j \beta_{ijk} y_j.$$

It is thus to be noticed that it may very well be possible to transform

the one group of substitutions into the other while at the same time they give distinct representations of G. In particular the two groups may consist of the same set of substitutions and yet may give distinct representations of G. Two representations which are not distinct will be called *equivalent*.

When the word »distinct representation» is used in this sense, the second result proved here is that the number of distinct irreducible representations of a group of finite order is equal to the number of separate conjugate sets of operations which the group contains.

1. A group of homogeneous linear substitutions in n variables, if of finite order, has at least one invariant Hermitian form of non-vanishing determinant in the n variables and their conjugates; and by a suitable transformation of the variables one such form may always be taken to be

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n.$$

This theorem, due to Prof. A. Loewy[1] and to Prof. E. H. Moore,[2] is of fundamental importance in the theory of groups of finite order.

The step-by-step process, by which any Hermitian form of non-vanishing determinant is brought to the form quoted, must break off at some step before the last when the determinant of the form vanishes. Hence a form in the n variables and their conjugates, whose determinant vanishes can always be reduced to the form

$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \dots + y_s\bar{y}_s, \qquad (s < n),$$

where $y_1, y_2, \dots, y_s$ are s linearly independent functions of the original variables.

Suppose now that for a group G of linear substitutions in the variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

an Hermitian form f or

$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \dots + y_s\bar{y}_s$$

of vanishing determinant is invariant. Choose new variables of which

[1] Comptes Rendus, Vol. 123, pp. 168—171 (1896).

[2] Mathematische Annalen, Vol. 50, pp. 213—219 (1898).

$y_1, y_2, \ldots, y_s$ are the first s; and in these variables, let the substitutions of the group be

$$y'_i = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ijk} y_j, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N),$$

where N is the order of the group, and the different operations correspond to different values of the suffix k.

For any substitution of the group f becomes

$$\sum_{i=1}^{i=s} \Big(\sum_j \alpha_{ijk} y_j\Big)\Big(\sum_j \bar{\alpha}_{ijk} \bar{y}_j\Big).$$

The coefficient of $y_j \bar{y}_j$ in this is

$$\sum_{i=1}^{i=s} \alpha_{ijk} \bar{\alpha}_{ijk},$$

and if $j > s$, this is zero. Hence

$$\alpha_{ijk} = 0,$$

if

$$j > s.$$

Every operation of the group therefore transforms $y_1, y_2, \ldots, y_s$ among themselves. If then a group of linear substitutions in n variables, of finite order, has an invariant form of zero determinant, the group is reducible.

Suppose now that the operations of a group G of finite order in $r+s$ variables are of the form

$$x'_u = \sum_{v=1}^{v=r} \alpha_{uvk} x_v, \qquad (u=1,2,\ldots,r)$$

$$x'_{r+u} = \sum_{v=1}^{v=r} \beta_{uvk} x_v + \sum_{w=1}^{w=s} \gamma_{uwk} x_{r+w}, \qquad (u=1,2,\ldots,s)$$

so that the symbols $x_1, x_2, \ldots, x_r$ are transformed among themselves by every operation of the group. The equations

$$x'_{r+u} = \sum_{w=1}^{w=s} \gamma_{uwk} x_{r+w}, \qquad (u=1,2,\ldots,s)$$

constitute a group of finite order, with which the given group is isomorphic; as also do the equations

$$x'_u = \sum_{v=1}^{v=r} \alpha_{uvk} x_v . \qquad (u=1,2,\ldots,r)$$

Suppose further that both these groups are irreducible; and that the latter has been so transformed, if necessary, that

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_r \bar{x}_r = f'$$

is an invariant Hermitian form for it; the same transformation of the first r x's being carried out also in the last s equations of G.

Let now

$$f = \sum a_{ij} x_i \bar{x}_j$$

be an invariant positive Hermitian form, of non-vanishing determinant, of G. If α and β are arbitrary constants, each of the set of forms

$$\alpha f + \beta f'$$

is invariant for G. If D is the determinant of f, the determinant of $\alpha f + \beta f'$ is

$$\alpha^n D + \alpha^{n-1}\beta\left(\frac{\partial D}{\partial a_{11}} + \frac{\partial D}{\partial a_{22}} + \ldots + \frac{\partial D}{\partial a_{rr}}\right) + \ldots .$$

Now $\dfrac{\partial D}{\partial a_{11}}$ is the determinant of the form that results from f on making x_1 zero. This is a positive form of non-vanishing determinant in the remaining $n-1$ symbols and their conjugates, and its determinant therefore is a positive (non-zero) number. Hence the coefficient of $\alpha^{n-1}\beta$ in the determinant of $\alpha f + \beta f'$ is different from zero, and therefore the determinant must vanish, when β is suitably chosen, for some finite value of α.

It follows that f' is not the only Hermitian form of vanishing determinant which is invariant for G; or in order words, the set of symbols $x_1, x_2, \ldots, x_r$ is not the only set, less than $r+s$, which are transformed among themselves by every operation of the group. By hypothesis the substitutions on the first r x's form an irreducible group, and therefore the other set of symbols which are transformed among themselves cannot be functions of the first r x's alone. Let

$$y_1 = \sum_{i=1}^{i=r+s} b_i x_i$$

be one symbol of the set. Since by hypothesis the equations

$$x'_{r+u} = \sum_{w=1}^{s} \gamma_{uwk} x_{r+w}, \qquad (u=1,2,\ldots,s)$$

constitute an irreducible group, the functions that arise from y_1 by the substitutions of G, when considered as functions of the last s x's alone, must be s linearly independant functions. If, on the other hand, more than s linearly independent functions of all the x's so arise, the last s x's could be eliminated among them, and a linear function of the first r x's expressed in terms of the y's. Since the substitutions on the first r x's form an irreducible group, this would mean that the set of y's contained $r+s$ independent functions, which is not the case. Hence just s linearly independent functions

$$y_1, y_2, \ldots, y_s$$

arise from y_1 by the substitutions of the group; and this set of functions are transformed among themselves by every operation of the group. Moreover the last s x's can be expressed in terms of the y's and the first r x's.

By a suitable choice of new variables for the last s x's, the equations of G can therefore be given a form in which the variables are divided into two sets, of r and s, those of each set being transformed among themselves by the group.

Let G now be any group of linear substitutions, of finite order, in n variables. If G is reducible it must be possible to find a set of n' $(< n)$ linear functions of the variables which are transformed among themselves by every operation of G. If the group in the n' variables is reducible the process may be repeated. At last a set of, say n_1, linear functions of the original variables must be arrived at such that the group in these variables is irreducible. Take these n_1 functions for the first n_1 of a set of new variables. Then every operation of the group has the form

$$x'_u = \sum_{v=1}^{v=n_1} \alpha_{uvk} x_v, \qquad (u=1,2,\ldots,n_1)$$

$$x'_{n_1+u} = \sum_{v=1}^{v=n_1} \beta_{uvk} x_v + \sum_{w=1}^{w=n-n_1} \gamma_{uwk} x_{n_1+w}. \qquad (u=1,2,\ldots,n-n_1)$$

The last $n-n_1$ equations still define a group of finite order G', iso-

morphic with G, when in them $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ are made zero. If this group is reducible, a set of n_2 linear functions of $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_n$ may be found such that they are transformed among themselves by every operation of G', while the group of substitutions in these n_2 variables is irreducible. If these linear functions are represented by

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$$

and are taken for new variables, the substitutions of G may be written in the form

$$x'_u = \sum_{v=1}^{v=n_1} \alpha_{uvk} x_v, \qquad (u=1,2,\ldots,n_1)$$

$$y'_u = \sum_{v=1}^{v=n_1} \beta_{uvk} x_v + \sum_{v=1}^{v=n_2} \gamma_{uvk} y_v, \qquad (u=1,2,\ldots,n_2)$$

$$x'_{n_1+n_2+u} = f(x, y) + \sum_{w=1}^{w=n-n_1-n_2} \delta_{uvk} x_{u_1+u_2+w}, \qquad (u=1,2,\ldots,n-n_1-n_2)$$

where $f(x, y)$ represents a linear function of $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$.

Here again the last $n - n_1 - n_2$ equations still define a group of finite order G'', isomorphic with G, when in them $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ are made zero. If G'' is reducible the same process may be repeated, till an irreducible group is arrived at for the group that remains when all preceding sets of variables are made zero. Let the third set of variables thus introduced be denoted by

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n_3},$$

and so on till all the variables are accounted for.

Consider now the group that has been called G', so far as it affects the y's and the z's. (This is equivalent to supposing that the variables are divided by the above process into three sets, but it will be seen that the argument will apply equally well whatever the number of sets.) By the result of the previous paragraph the z's may be replaced by linear functions of themselves and the y's, so that the equations of G' have the form

$$y'_u = \sum_{v=1}^{v=n_2} \gamma_{uvk} y_v, \qquad (u=1,2,\ldots,n_2)$$

$$\zeta'_u = \sum_{v=1}^{v=n_3} \delta'_{uvk} \zeta_v. \qquad (u=1,2,\ldots,n_3)$$

With the x's, y's and ζ's as variables the equations of G take the form

$$x'_u = \sum_{v=1}^{v=n_1} \alpha_{uvk} x_v,$$

$$y'_u = \sum_{v=1}^{v=n_1} \beta_{uvk} x_v + \sum_{v=1}^{v=n_2} \gamma_{uvk} y_v, \qquad (u=1,2,\ldots,n_2)$$

$$\zeta'_u = \sum_{v=1}^{v=n_1} \varepsilon_{uvk} x_v + \sum_{v=1}^{v=n_3} \delta_{uvk} \zeta_v. \qquad (u=1,2,\ldots,n_3)$$

A second precisely similar application of the result of the previous paragraph, enables us to replace the y's by n_2 linear functions of themselves and the x's, and the ζ's by n_3 linear functions of themselves and the x's, so that with these new variables, the variables of each set are transformed among themselves by every operation of the group. Hence:

Theorem. If a group of homogeneous linear substitutions, of finite order, is reducible, new variables may be chosen so that (I) the variables fall into sets, those of each set being transformed among themselves by every operation of the group, while (II) the group of linear substitutions in each separate set is irreducible.

2. If a group of linear substitutions of finite order has two distinct invariant Hermitian forms f and f' then every form of the set $\alpha f + \beta f'$ is invariant. Now α and β may be chosen so that the determinant of $\alpha f + \beta f'$ is zero without the form being identically zero; and the group is then, as shewn in § 1, reducible. An irreducible group has therefore only one invariant Hermitian form.

Suppose now that when a group G has been completely reduced, the two sets of variables

$$\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_r, \\ y_1, y_2, \ldots, y_s, \end{matrix} \qquad (r \not> s),$$

are transformed, each among themselves, irreducibly. Let f be an invariant Hermitian form in these $r+s$ variables of non-vanishing determinant. When in f we make $y_1 = y_2 = \ldots = y_s = 0$, f must reduce to a Hermitian form f_1 in the x's, invariant for the transformation of the x's; and

therefore of non-vanishing determinant in the r variables and their conjugates. Hence f may be expressed in the form

$$\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + \ldots + \xi_r\bar{\xi}_r + f',$$

where

$$\xi_i = X_i + Y_i;$$

$X_1, X_2, \ldots, X_r$ are r linearly independent functions of the x's; Y_1, $Y_2, \ldots, Y_r$ are r linear functions of the y's; and f' is a form in the y's alone, of non-vanishing determinant as regards them. Since the y's are transformed among themselves by the group, there must be a Hermitian form f'' in the y's alone which is invariant. Hence

$$\alpha(\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + \ldots + \xi_r\bar{\xi}_r) + \alpha f' + \beta f''$$

is invariant for the group. Now, since the determinant of f'', regarded as a form in the y's alone, is not zero, a non-zero value of α may be found so that the determinant of $\alpha f' + \beta f''$, regarded as a form in the y's alone, and therefore of $\alpha f + \beta f''$, regarded as a forme in the x's and y's, vanishes. For this value $\alpha f' + \beta f''$ must vanish identically; since $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ are linearly independent as regards the x's, while the y's are transformed irreducibly among themselves. Hence $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ are transformed among themselves by every operation of the group. It follows that

$$X_1, X_2, \ldots, X_r$$

and

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$$

undergo, each set among themselves, the same substitution for every operation of the group. If $r < s$, this is impossible since the group in the y's is irreducible. If $r = s$, it must be possible to transform the group of the y's, so that for each operation of the group the x's and y's undergo the same substitution.

The form f can therefore only have terms containing the product of an x by a y, when the number of x's and y's are equal, while the group in one set can be so transformed that the substitutions in the two sets, corresponding to each operation of the group, are identical.

Suppose next that in the completely reduced form of G_1, there are just s sets of r variables each

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s)$$

such that (I) the variables of each set are transformed irreducibly among themselves, and (II) the group in each set can be so transformed that the substitution on its variables, corresponding to each operation of G_1 is identical with the corresponding substitution on the variables of the first set.

Let these transformations be carried ont, and further transform all the sets, if necessary, so that for each the invariant Hermitian form is

$$x_{i1}\bar{x}_{i1} + x_{i2}\bar{x}_{i2} + \ldots + x_{ir}\bar{x}_{ir}.$$

When thus transformed the operations of the group will give for each set the substitutions

$$x'_{ip} = \sum_{q=1}^{q=r} \alpha_{pqk} x_{iq}, \qquad (p=1,2,\ldots,r)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, N).$$

Let

$$f = \sum a_{ip,jq} x_{ip} \bar{x}_{jq}$$

be an invariant form for the group. On transformation by any operation of the group f becomes

$$f' = \sum a_{ip,jq} \sum_{u=1}^{u=r} \alpha_{puk} x_{iu} \sum_{v=1}^{v=r} \bar{\alpha}_{qvk} \bar{x}_{jv}.$$

Hence

$$a_{iu,jv} = \sum_{p,q} a_{ip,jq} \alpha_{puk} \bar{\alpha}_{qvk}$$

for each k. These relations express that

$$\sum_{u,v} a_{iu,jv} x_u \bar{x}_v$$

is an invariant Hermitian form for the group

$$x'_p = \sum_{q=1}^{q=r} \alpha_{pqk} x_q. \qquad (p=1,2,\ldots,r)$$

But, by supposition, the only invariant form for this group is

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_r\bar{x}_r.$$

Hence

$$a_{ip,jq} = 0, \quad \text{if} \quad p \neq q$$

and

$$a_{ip,jp} = a_{iq,jq},$$

for all suffixes p and q.

If then

$$a_{ip,jp} = b_{i,j},$$

the most general invariant Hermitian form in the rs variables is

$$\sum_{i,j,p} b_{i,j}\, x_{ip}\,\bar{x}_{jp}.$$

This form contains just s^2 arbitrary coefficients; it is in fact a linear combination of the s^2 forms

$$\sum_p x_{ip}\,\bar{x}_{ip}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_p (x_{ip}\,\bar{x}_{jp} + \bar{x}_{ip}\,x_{jp}), \\ \sum_p \sqrt{-1}\,(x_{ip}\,\bar{x}_{jp} - \bar{x}_{ip}\,x_{jp}), \end{array}\right| \begin{array}{c} i, j = 1, 2, \ldots, s \\ i \neq j \end{array}$$

Combining the last two results, the number of linearly independant invariant Hermitian forms which a group possesses is given by the following statement.

Theorem. If, when a group of finite order has been completely reduced, the variables are divided into ν_1 sets of n_1 each, ν_2 sets of n_2 each, ... such that the groups transforming each of the ν_i sets of n_i variables are equivalent to each other, and are distinct from those transforming each of the ν_j sets of n_j variables ($j \neq i$), then the number of linearly independent invariant Hermitian forms for the group is

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_i^2 + \ldots.$$

3. The nature of the complete reduction of a group G, of finite order N, when represented as a group of regular permutations of N symbols

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

will next be investigated.

Suppose that when the reduction has been completely effected, the variables fall into ν_1 sets of n_1 each, ν_2 sets of n_2 each, ..., ν_m sets of n_m each, such that (I) the groups transforming each of the ν_i sets of n_i are equivalent to each other, while (II), if $j \neq i$ the group of substitutions of one of the ν_j sets is distinct from that of one of the ν_i sets. The irreducible substitution group in any one of the sets will be spoken of as an *irreducible component* of G; and the condition (II) of the preceding sentence will be expressed by saying that the irreducible component given by one of the ν_i sets is *distinct* from that given by one of the ν_j sets. The number of distinct irreducible components of G, when represented as a regular permutation group in N symbols is then denoted by m.

The only linear function of the x's which is invariant for every operation of G is their sum. This necessarily occurs as one of the sets of variables transformed among themselves in the completely reduced form. Hence we may and shall take

$$n_1 = \nu_1 = 1,$$

the corresponding reduced variable being the sum of the x's. Further since the x's can be expressed in terms of the new variables

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \nu_i = N.$$

When x_1 is expressed in terms of the new variables which effect the complete reduction of G, it will, in respect of the ν sets of n each

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$$
$$(i = 1, 2, \dots, \nu)$$

which all undergo the same substitutions, contain the terms

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} (\alpha_1^{(i)} x_{i1} + \alpha_2^{(i)} x_{i2} + \dots + \alpha_n^{(i)} x_{in}).$$

If ν is greater than n, not more than n of the linear functions

$$\alpha_1^{(i)} x_1 + \alpha_2^{(i)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{(i)} x_n$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

can be linearly independent; and therefore the terms in question can be expressed as the sum of not more than n linear functions of the form

$$\alpha_1^{(i)} \xi_{i1} + \alpha_2^{(i)} \xi_{i2} + \ldots + \alpha_n^{(i)} \xi_{in},$$

where

$$\xi_{i1} = \sum_j \beta_j^{(i)} x_{j1}, \qquad \xi_{i2} = \sum_j \beta_j^{(i)} x_{j2}, \quad \ldots, \quad \xi_{in} = \sum_j \beta_j^{(i)} x_{jn}.$$

But for each i,

$$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}$$

undergo the same substitution as

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}.$$

Hence the reduced variables may be chosen so that of the ν sets, the n sets of ξ's form a part. When so chosen, the remaining $\nu - n$ sets do not appear at all in x_1; and therefore do not appear at all in the expressions of any of the original variables. But this is impossible since the N original variables, by supposition independent, would then be expressed in terms of $N - n(\nu - n)$ reduced variables. Hence no ν can be greater than the corresponding n.

The invariant Hermitian forms of G are next to be considered. Their number is N. In fact every invariant Hermitian form for G will arise on carrying out the permutations of G in

$$\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i x_i \sum_{i=1}^{i=n} \bar{\alpha}_i \bar{x}_i,$$

where the α's are arbitrary coefficients and summing the resulting expressions. There can therefore be no forms linearly independent of those that arise from

$$x_1\bar{x}_1, \; x_1\bar{x}_i + \bar{x}_1 x_i, \; \sqrt{-1}(x_1\bar{x}_i - \bar{x}_1 x_i)$$

$$(i = 2, 3 \ldots, N)$$

as leading terms. If G contains a permutation which changes x_1 into x_i and x_i into x_1, the form that arises from $x_1\bar{x}_i + \bar{x}_1 x_i$ is distinct from all the rest, while that which arises from $\sqrt{-1}(x_1\bar{x}_i - \bar{x}_1 x_i)$ is identically zero. If the permutation of G, which changes x_i into x_1, changes x_1 into x_j, then $x_1\bar{x}_i + \bar{x}_1 x_i$ and $\sqrt{-1}(x_1\bar{x}_i - \bar{x}_1 x_i)$ give rise to the same pair of forms as $x_1\bar{x}_j + \bar{x}_1 x_j$ and $\sqrt{-1}(x_1\bar{x}_j - \bar{x}_1 x_j)$. The total number of linearly independant Hermitian forms for G is therefore N. Now by considering the completely reduced form of G, it has been shown in § 2, that this number is $\sum_{i=1}^{i=m} \nu_i^2$.

Hence

$$\sum_{i=1}^{i=m} \nu_i^2 = N;$$

and combining this with

$$\sum_{i=1}^{i=m} n_i \nu_i = N,$$

and

$$\nu_i \ngtr n_i,$$

it follows that

$$\nu_i = n_i$$

for each i. Hence:

Theorem. In the completely reduced form of a regular permutation group, the number of times that each distinct irreducible component of the group occurs is equal to the number of variables which it transforms among themselves.

4. Any linear substitution on the original variables which is permutable with every operation of the regular permutation group G must, when expressed in terms of thereduced variables, transform among themselves for each i, the n_i^2 variables contained in the n_i sets of n_i each. This is the consequence of the groups in the different sets being »distinct». Suppose now that it were possible to form n independent linear functions

$$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$$

of

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

such that the symbols in these two lines undergo identical substitutions for each operation of G. Then

$$x'_{i1} = \xi_1, \qquad x'_{i2} = \xi_2, \ \ldots, \ x'_{in} = \xi_n,$$

would be permutable with every operation of the group of linear substitution in

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}.$$

Since this group is irreducible there can be no substitution permutable with every one of its substitutions except

$$x'_{i1} = \alpha x_{i1}, \qquad x'_{i2} = \alpha x_{i2}, \ \ldots, \ x'_{in} = \alpha x_{in}.$$

Hence the only linear functions of the n^2 variables, of which the set considered is one set of n, which undergo for every operation of G, the same substitution as

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$$

are those given by

$$\sum_i \alpha_i x_{i1}, \ \sum_i \alpha_i x_{i2}, \ \ldots, \ \sum_i \alpha_i x_{in}.$$

A substitution which is permutable with every operation of G must therefore, so far as it affects these n^2 variables, be of the form

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} x_{kj}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Now it is well known that there is a group G', of order N, of regular permutations in the N symbols

$$x_1, x_2, \ldots, x_N,$$

which is simply isomorphic with G, while every one of its operations is permutable with every operation of G. Combining this fact with the previously determined form of any linear substitution which is permutable with every operation of G, it follows that for the variables in the scheme,

$$\begin{array}{l} x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}, \end{array}$$

(I) every operation of G gives the same transformation of the set of variables in each line; (II) every operation of G' gives the same transformation of the set of variables in each column, and (III) the group of transformations of the variables in each line corresponding to the operations of G and of the variables in each column corresponding to G' are both irreducible. From the last result it is an immediate corollary that for the group $\{G, G'\}$ the n^2 variables undergo an irreducible group of linear substitutions.

The group of permutations $\{G, G'\}$ therefore, when completely reduced, transforms the N variables among themselves in m sets of $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_m^2$ each such that the group in each separate set is irreducible and distinct from all the others. Hence there are just m linearly independent invariant Hermitian forms for $\{G, G'\}$.

The number of such forms can again be determined directly. Suppose that when $\{G, G'\}$ is represented as a permutation group in the N original variables, the subgroup which leaves x_1 unchanged permutes $x_i, x_j, \ldots, x_k$ transitively among themselves. Then of the N invariant Hermitian forms of G, those containing the terms $x_1\bar{x}_i, x_1\bar{x}_j, \ldots, x_1\bar{x}_k$ will be permuted among themselves by $\{G, G'\}$, and their sum only will be invariant for the latter group. The total number of independent invariant forms for $\{G, G'\}$ is therefore equal to the number of transitive sets in which the subgroup of $\{G, G'\}$, which leaves x_1 unchanged, permutes the symbols; including of course x_1 as one of the sets. This number is known [1] to be equal to the number of distinct sets of conjugate operations contained in G. Hence:

Theorem. When a group G of finite order N, containing m distinct conjugate sets of operations, and represented as a regular permutation group in N symbols is completely reduced, the number of its distinct irreducible components is m.

5. If there are one or more linear relations among the variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

affected by a group of linear homogeneous substitutions, the group must be reducible. Suppose in fact that the variables are connected by just t independent linear relations

$$\sum a_i^{(k)} x_i = 0,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, t).$$

[1] *Theory of groups of finite order*, p. 146. (Cambridge 1897.)

Then if

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'$$

are the transformed variables for any operation of the group

$$\sum a_i^{(k)} x_i' = 0$$

is true, for each k, in virtue of the preceding relations. Hence if new variables are chosen of which the first t are defined by

$$y_k = \sum a_i^{(k)} x_i,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, t)$$

the variables

$$y_1, y_2, \ldots, y_t$$

are transformed among themselves by every operation of the group. For an irreducible group of linear homogeneous substitutions the variables are therefore necessarily independent; the only non-independent set which undergo formally the operations of the group being a set of zeroes.

Suppose now that

$$x_i' = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ijk} x_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N)$$

is any representation of a group G of finite order N as a group of linear substitutions. Let y_1 be any arbitrarily chosen linear function of the x's, and let

$$y_1, y_2, \ldots, y_N$$

be the N linear functions that arise from y_1 by the substitutions of the group. When the x's undergo the substitutions of the group, the N y's undergo the permutations of the regular permutation-group in N symbols which is always one form of representation of G. The y's may or may not be linearly independent; in particular cases a number of them, when regarded as functions of the x's, may be actually identical.

Form now from the N y's, the n_i sets of n_i symbols each $(i = 1, 2, \ldots, r)$ in terms of which the regular form of G is completely reduced. Each set of n_i are transformed irreducibly among themselves by every operation

of G. Hence when these variables are expressed in terms of the original x's, those given by any one set must either be linearly independent, or must all identically vanish. Further for any two sets which do not identically vanish, the variables of each set must either be independent of those of the other, or those of each set must be expressible linearly in terms of those of the other. The latter alternative is possible only when the irreducible components corresponding to the two sets are not distinct.

In this way a certain number of linearly independent sets of linear functions of the original x's are formed such that each set are transformed linearly and irreducibly among themselves, the corresponding group being one that arises in the complete reduction of the regular form of G. If the original x's can be expressed in terms of the N y's, the complete reduction is thus arrived at. If not, let z_1 be a linear function of the x's which is linearly independent of the y's. Then if

$$z_1, z_2, \ldots, z_N$$

are the linear functions of the x's that arise from z_1 by the operations of the group, the z's may be dealt with as the y's have been; and a further number of sets of linear functions of the x's obtained each of which are transformed irreducibly among themselves, the corresponding groups being again those that arise from the reduction of the regular form of G. This process may be continued till the x's have been replaced by an equal number of reduced variables linearly independent of each other. Hence:

Theorem. The only distinct irreducible groups of linear substitutions with which an abstract group G, of finite order, is simply or multiply isomorphic are the m distinct irreducible components that arise from the complete reduction of the regular form of G.

Dec. 6, 1902.

BIBLIOGRAPHIE.

Johann Ambrosius Barth.

Leipzig 1904.

FISCHER, V., Vektordifferentiation und Vektorintegration. — IV + 82 p. 8. Mk. 3—.

Fratelli Bocca.

Turin 1904.

BURALI-FORTI, C., Lezioni di geometria metrico-proiettiva.

Punti; loro somme e prodotti. Vettori; loro somme e prodotti. Coordinate cartesiane. Rette e piani perpendicolari. Coordinate cartesiane ortogonali. Rotazioni nel piano. Alcune curve. Riduzione delle formazioni geometriche. Elementi proiettivi. Intersezioni. Legge di dualità. Birapporti. Omografie nei fasci. Omografie nei fasci sovrapposti. Involuzione. Coniche. Formazioni geometriche variabili. Linee ed inviluppi di rette e piani. Arco, flessione, torsione. Superfici rigate. Inviluppi e traiettorie di sistemi di linee. Superfici in generale. Omografie in generale. Collineazioni. Polarità nel piano e nella stella. Polarità nello spazio. — XII + 308 p. 8. L. 8—.

C. J. Clay and Sons.

Cambridge 1903—04.

GRACE, J. H. & YOUNG, A., The algebra of invariants.

The fundamental theorem. Transvectants. Elementary complete systems. GORDAN's theorem. The quintic. Simultaneous systems. HILBERT's theorem. Geometry. Apolarity and rational curves. Ternary forms. Types of covariants. General theorems of quantics. Appendix: The symbolical notation, WRONSKI's theorem, JORDAN's lemma, Types of covariants. Index. — VI. + 384 p. 8. Sh. 10—.

JESSOP, C. M., A treatise on the line complex.

Systems of coordinates. The linear complex. Synthesis of the linear complex. Systems of linear complexes. Ruled cubic and quartic surfaces. The quadratic complex. Special varieties of the quadratic complex. The cosingular complexes.

Polar lines, points, and planes. Representation of a complex by points of space. The general equation of the second degree. Connexion of line-geometry with sphere-geometry, and with hyper-geometry. Congruences of lines. Congruences of the second order without singular curves. The congruence of the second order and second class. The general complex. Differential equations connected with the line complex. Index. — XV + 364 p. 8. Sh. 10—.

Lord Kelvin, W. Thomson, Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light. Followed by twelve appendices on allied subjects. — XXI + 694 p. 8. Sh. 15—.

Gauthier-Villars.

Paris 1903—04.

Appell, P., Traité de mécanique rationnelle. 2e éd. T. 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique, avec 99 fig.

Moments d'inertie. Théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes. Dynamique du corps solide. Mouvements parallèles à un plan. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Corps solide libre. Mouvement relatif. Principe de d'Alembert. Équations générales de la dynamique analytique. Équations canoniques. Théorèmes de Jacobi et de Poisson. Principes d'Hamilton, de la moindre action et de la moindre contrainte. Chocs et percussions. Notions sur les machines. Similitude. — VIII + 551 p. 8. Fr. 16—.

Autonne, L., Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale, en un produit d'inversions.

Géométrie des substitutions orthogonales et des sphères. Multiplication des inversions et problème inverse. — (Ann. de l'univ. de Lyon. Nouv. sér. I. fasc. 12) 124 p. 8.

Borel, E., Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au collège de France. Rec. et réd. par L. Zoretti.

Le théorème de M. Mittag-Leffler. La série de Taylor. Le théorème de M. Picard. Les séries de fractions rationnelles. — VI + 122 p. 8. Fr. 3,50.

Humbert, G., Cours d'analyse, prof. à l'École polyt. T. I.

Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques. Avec 111 figures. — XV + 483 p. 8. Fr. 16—.

Jouffret, E, Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions et introduction à la géométrie à n dimensions.

Définitions. Intersections et parallélisme. Perpendicularité. Quelques théorèmes. Systèmes de coordonnées. Les angles. Les êtres de la géométrie à quatre

dimensions. Les polyédroïdes. Applications. Hors de l'étendue. — XXX + 215 p. 8. Fr. 7,50.

d'Ocagne, M., Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie.

Systèmes d'éléments cotés. Représentation nomographique sur un seul plan. Représentation nomographique sur plusieurs plans mobiles superposés. (Extr. du Journ. de l'Ecole polyt. 2e série (Cah. n° 8).) — 62 p. 4. Fr. 3,50.

Picard, E. & Simart, G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. T. 2, fasc. 2.

Suite de l'étude des intégrales doubles de second espèce. Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce. Des relations entre la théorie des intégrales doubles de second espèce et celle des intégrales de différentielles totales. Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce. — 179 p. 8. Fr. 14 — (le volume complet).

Richard, J., Sur la philosophie des mathématiques.

La logique. La géométrie. Questions diverses. Considérations sur différentes sciences. — 248 p. 12. Fr. 3,25.

Robin, G., Oeuvres scientifiques, réunies et publ. sous les auspices du ministère de l'instruction publique par Louis Raffy. Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.

Suites convergentes et séries numériques. Définition générale des fonctions d'une variable. Fonctions finies. Fonctions à oscillation moyenne nulle ou fonctions intégrables. Problème inverse du calcul des fonctions. Fonctions inverses; exponentielle et logarithme. Dérivées. Premiers exemples de fonctions uniformément différentiables. Propriétés générales des fonctions uniformément différentiables. Séries de fonctions. Séries entières. Intégrales et fonctions primitives. Séries de Fourier. Notions sur les fonctions de deux variables et applications à la théorie des fonctions d'une variable. — VI + 215 p. 8. Fr. 7 —.

A. Hermann.

Paris 1903—04.

Hadamard, J., Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique.

Le deuxième problème aux limites de la théorie des fonctions harmoniques. Les ondes au point de vue cinématique. La mise en équation du problème de l'hydrodynamique. Mouvement rectiligne des gaz. Les mouvements dans l'espace.

Application à la théorie de l'élasticité. La théorie générale des caractéristiques. Notes: Sur le problème de Cauchy et les caractéristiques. Sur les glissements dans les fluides. Sur les tourbillons produits par les ondes de choc. Sur la réflexion dans le cas d'un piston fixe. — XIII + 375 p. 8. Fr. 18—.

Mach, E., La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Trad. sur la 4ème éd. allemande par E. Bertrand.

Introduction de E. Picard. Développement des principes de la statique. Développement des principes de la dynamique. Extension des principes et développement déductif de la mécanique. Développement formel de la mécanique. Rapports de la mécanique avec d'autres sciences. Examen de quelques objections. Extraits des écrits de Galilée. Indications chronologiques. — IX + 498 p. 8. Fr. 15—.

Ulrico Hoepli.

Milano 1903—04.

Betti, E., Opere matematiche. Pubbl. per cura della R. Accademia des Lincei. T. 1.

Elenco dei lavori scientifici di E. Betti. Sopra la determinazione analitica dell' efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura. Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo. Un teorema sulle risolventi delle equazioni risolubili per radicali. Estratto di una lettera al prof. B. Tortolini. Sulla risoluzione delle equazioni algebriche. Sopra l'abassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche. Un teorema sulle risoluzione analitica delle equazioni algebriche. Sopra la teoria delle sostituzioni. Estratto di una lettera al prof. J. J. Sylvester. Sopra la più generale funzione algebrica che può soddisfare una equazione il grado della quale è potenza di un numero primo. Sopra le forme omogenee a due indeterminate. Sopra le serie doppie ricorrenti. Sur les fonctions symétriques des racines des équations. Sopra l'equazioni algebriche con più incognite. Sopra i covarianti delle forme binarie. Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche. Sopra le funzioni simmetriche delle radici di una equazione. Sopra i combinanti. Sur la résolution par radicaux des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier. Estratto di una lettera al sig. C. Hermite. Fondamenti di una teoria generale delle funzioni di una variabile complessa. La teoria delle funzioni ellittiche. Indice alfabetico dei nomi ricordati in questo volume. — XI + 412 p. 4. L. 25—.

Maggi, G. A., Principii di stereodinamica. Corso sulla formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del movimento dei solidi.

Il teorema di d' Alembert. Il teorema di Hamilton. Il teorema di Jacobi. XI + 262 p. 8. L. 7,50.

Marcolongo, R., Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici.

Le funzioni armoniche e poliarmoniche ed i teoremi di Green. Le funzioni potenziali newtoniane. Principii della meccanica dei corpi continui. Le equazioni dell' equilibrio e del moto dei corpi elastici isotropi. Le equazioni dell' elasticità per i corpi anisotropi. Teoremi generali sulle equazioni dell' equilibrio dei corpi isotropi. Metodo d' integrazione del Betti. Il problema di Boussinesq e Cerruti. La deformazione di una sfera isotropa. Il problema di Saint-Venant sulla deformazione delle aste cilindriche. Deformazione delle piastre cilindriche o problema complementare di Saint-Venant. I problemi del prof. Voigt e la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli. — Manuali Hoepli 348—349. XIV + 366 p. 16. L. 3—.

Pascal, E., I gruppi continui di trasformazioni. (Parte generale della teoria.)

Teoria generale dei gruppi di trasformazioni. Teoria generale dell' invariantività rispetto ad un gruppo di trasformazioni. Proprietà relative alla costituzione dei gruppi. Gruppi aggregati ad un dato. Teoria invariantiva dei gruppi ampliati. — Manuali Hoepli 327—328. XI + 358 p. 16. L. 3—.

Pascal, E., Lezioni di calcolo infinitesimale. Ed. 2. P. 2.

Gli integrali definiti e indefiniti. L'integrabilità delle funzioni. Calcolo degli integrali indefiniti e definiti. Gli integrali multipli. Le forme ai differenziali totali di primo ordine e di primo grado. Geometria integrale. Equazioni differenziali. — Manuali Hoepli 180—181. VIII + 329 p. 16. L. 3—.

Saccheri, G., L'Euclide. Trad. e note de G. Boccardini. — Manuali Hoepli 340. XXIV + 126 p. 16. L. 1,50.

Mayer & Müller.

Berlin 1903.

Alexejeff, W. G., Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung. (Nach Untersuchungen von N. W. Bugajew und P. A. Nekrassow in Zusammenhang mit meinen Untersuchungen über formale Chemie). — 48 p. 8. M. 1—.

Weierstrass, K., Mathematische Werke. Hrsg. unter Mitwirkung einer von d. königl. preuss. Ak. d. Wiss. eingesetzten Commission. Bd III: Abhandlungen III. Mit Bildniss des Verfassers. VIII + 362 p. 4. In Orig.-Halbfranzband M. 27—. Auf Schreibpapier. Broschirt. M. 32—. Auf Büttenpapier. Broschirt. M. 41—. (Exemplare auf Schreib-

und Büttenpapier werden nur bei Subscription auf alle erscheinenden Bände abgegeben.)

C. Naud.

Paris 1903.

Delaporte, L. J., Essai philosophique sur les géométries non euclidiennes.

Aperçu historique sur le développement des géométries non-euclidiennes. Considérations mathématiques. L'espace géométrique. Définition de la ligne droite. La quatrième dimension. — 139 p. 8.

Delsol, E., Principes de géométrie.

Du nombre. De l'espace. Théorie des parallèles et des tangentes. Application du calcul à la géométrie. — 96 p. 8.

Poincaré, H., Figures d'équilibre d'une masse fluide. Leçons prof. à la Sorbonne en 1900. Réd. par L. Dreyfus.

Théorèmes généraux sur le potentiel newtonien. Masse homogène fluide. Fonctions sphériques. Masse fluide hétérogène. Problème de Clairaut. Masse solide recouverte d'une masse fluide. Fonctions de Lamé. Attraction des ellipsoïdes. Anneau de Saturne. — 210 p. 8. Fr. 7—.

Ditta Nicola Zanichelli.

Bologna 1904.

Enriques, F., Lezioni di geometria proiettiva. 2a ed. aument.

Propozioni fondamentali. Legge di dualità — Teoremi preliminari. Gruppi armonici. Il postulato della continuità e le sue applicazioni. Il teorema fondamentale della proiettività. Proiettiv. tra forme di 1ª specie. Involuzione nelle forme di 1ª specie. Proiettiv. tra forme di 2ª specie. Le coniche. Proiettiv. fra coniche. Problemi determinati. Proprietà focali delle coniche. Le proprietà metriche dei coni quadrici. Proiettiv. tra forme di 3ª specie. — VIII + 409 p. 8. L. 10—.